

则 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
又 $h(1) = 0$, 则 $h(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

即 $x > 1$ 时, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ 恒成立,

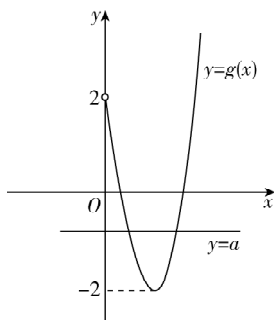
令 $x = 2$, 则 $\ln 2 > \frac{2 \times (2-1)}{2+1} = \frac{2}{3}$, 所以 $c = 3(1 - \ln 2) < 1$.

又 $a = \frac{2\sqrt{e}}{3} > 1$, 所以 $a > c$. 综上所述, $c < a < b$. 故选 D.

3. (-2, 2) 【解析】 由 $x^3 - 3x = a - 2(x-1)^2$, 即 $a = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

令 $g(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$, 则 $g'(x) = 3x^2 + 4x - 7 = (3x+7)(x-1)$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 且 $g(0) = 2$, $g(1) = -2$, 作出 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的大致图象如图所示.

方程 $x^3 - 3x = a - 2(x-1)^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数解, 等价于直线 $y = a$ 与曲线 $y = g(x)$ 有两个交点, 所以 $a \in (-2, 2)$.



4. 【证明】 (1) 由题得, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = 1 - ae^x$, 则当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < -\ln a$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > -\ln a$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递增, 在区间 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递减.

由 $g(x) = \ln x - ax, x > 0$ 得 $g'(x) = \frac{1}{x} - a$, 则由 $g'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{a}$, 由 $g'(x) < 0$

得 $x > \frac{1}{a}$, 故函数 $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上

单调递增, 在区间 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

设 $y = \frac{1}{a} + \ln a$ ($0 < a < 1$), 则 $y' = -\frac{1}{a^2} +$

$\frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^2}$, 当 $0 < a < 1$ 时, $y' < 0$, 则 $y =$

$\frac{1}{a} + \ln a$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 当 $a \rightarrow 1$

时, $y \rightarrow 1$, 所以 $\frac{1}{a} > -\ln a$, 所以在 $g(x)$

的单调递减区间上, $f(x)$ 也单调递减.

(2) 由 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 分别得 $a =$

$\frac{x}{e^x}, a = \frac{\ln x}{x}$, 因此函数 $f(x), g(x)$ 共有

3 个不同的零点, 即直线 $y = a$ 与曲线

$F(x) = \frac{x}{e^x}, G(x) = \frac{\ln x}{x}$ 共有 3 个交点,

只需证这 3 个交点的横坐标依次成等比数列.

由 $F'(x) = \frac{1-x}{e^x}, G'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 知, 当

$F'(x) = 0$ 时, $x = 1$, 当 $G'(x) = 0$ 时, $x = e$, 则函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 函数 $G(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增, 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 故 $G(x)_{\max} = F(x)_{\max} = \frac{1}{e}$.

故 $y = F(x) - G(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 且 $F(1) - G(1) > 0, F(e) - G(e) < 0$, 由函数零点存在定理知, 存在唯一实数 $x_0 \in (1, e)$, 使 $F(x) = G(x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow 0$, 所以直线 $y = a$ 与曲线 $F(x), G(x)$ 过同一点 (x_0, a) .

设直线 $y = a$ 与曲线 $F(x) = \frac{x}{e^x}$ 的另一

交点为 (x_1, a) , 与曲线 $G(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的

另一交点为 (x_2, a) , 则 $0 < x_1 < 1 < x_0 < e <$

$x_2, \frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_0}{e^{x_0}} = a = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_2}{x_2}$.

故 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_0}{e^{\ln x_0}}$, 即 $F(x_1) = F(\ln x_0)$,

又 $\ln x_0 \in (0, 1)$, 则由函数 $F(x)$ 的单

调性得 $x_1 = \ln x_0$. 同理, 由 $\frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{\ln x_2}{x_2} =$

$\frac{\ln e^{x_0}}{e^{x_0}}$ 得 $x_2 = e^{x_0}$. 故 $x_1 x_2 = e^{x_0} \ln x_0 = x_0^2$.

综上, 函数 $f(x), g(x)$ 的 3 个零点从小到大依次成等比数列.

专练 1 新情境、新定义专练

刷素养

1. A 【解析】 1 至 2 039 这 2 039 个整数中, 被 2 除余 1 且被 3 除余 2 的数, 按从小到大的顺序排成一列, 把这列数记为数列 $\{a_n\}$,

则数列 $\{a_n\}$ 是一个以 5 为首项, 6 为

公差 of 的等差数列, 所以 $a_n = 5 + (n-1) \cdot 6 = 6n-1$ ($1 \leq n \leq 340, n \in \mathbf{N}_+$),

故 $b_n = (\sqrt{2})^{a_n} = (\sqrt{2})^{6n-1}$.

故 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\sqrt{2})^{6n+5}}{(\sqrt{2})^{6n-1}} = (\sqrt{2})^6 = 8$. 故选 A.

2. ACD 【解析】 对于 A, 由题意知 $b_{n+3} + b_n = 4, b_{n+6} + b_{n+3} = 4$, 两式相减, 得 $b_{n+6} = b_n$, 故 A 正确;

对于 B, $b_4 + b_1 = b_5 + b_2 = b_6 + b_3 = 4$, 又 $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项依次为 1, 2, 3, 3, 2, 1, 均不为 0, 又 $b_{n+6} = b_n$, 故 B 错误;

对于 C, 由 $b_{n+6} = b_n$ 可得 $S_{12n} = 2S_{6n}$, 即

当 $p = 6n$ 时, 均有 $S_{2p} = 2S_p$, 故 C 正确;

对于 D, $B_{n+3} = 1 \cdot b_{n+3} - 2 \cdot 1 = 1 \cdot (4 - b_n) - 2 \cdot 1 = 1 \cdot b_n - 2 \cdot 1 = B_n$, 且 $\{B_n\}$ 的前 3 项依次为 1, 0, 1,

记 $\{B_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则由周期性可得 $T_{3n} = 2n, T_{3n+1} = T_{3n+2} = 2n+1$,

当 $\{B_n\}$ 的前 m 项和为 2 026 $= 2 \times 1 013$ 时, $m = 3 \times 1 013 = 3 039$, 故 D 正确. 故选 ACD.

3. BCD 【解析】 对于 A, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q > 1$, 则 $a_{n+k} - a_n = a_1 q^{n+k-1} - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1} (q^k - 1)$,

其中 $q^k > 1$, 则 $q^{n-1} (q^k - 1) > 0$, 若 $a_1 < 0$, 则 $a_{n+k} - a_n < 0$, 即 $a_{n+k} < a_n$, 不符合定义, 故 A 错误.

对于 B, $a_{n+k} - a_n = [2(n+k) + (-1)^{n+k}] - [2n + (-1)^n] = 2k + (-1)^n [(-1)^k - 1]$, 当 n 为奇数时, $a_{n+k} - a_n = 2k - (-1)^{k+1} + 1$,

因为 $-(-1)^{k+1} + 1 \geq 0$,

所以存在正整数 k ($k \geq 2$), 使得对任

意 $n \in \mathbf{N}_+$, 均有 $a_{n+k} > a_n$, 符合定义;

当 n 为偶数时, $a_{n+k} - a_n = 2k + (-1)^k - 1$, 因为 $(-1)^k - 1 \geq -2$, 所以存在正整数 k ($k \geq 2$), 使得对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, 均有 $a_{n+k} > a_n$, 符合定义, 故 B 正确.

对于 C, $a_{n+k} - a_n = \left(n+k + \frac{r}{n+k}\right) -$

$\left(n + \frac{r}{n}\right) = k - \frac{kr}{(n+k)n} = k \left[1 - \frac{r}{(n+k)n}\right] =$

$k \cdot \frac{n^2 + kn - r}{(n+k)n}$,

令 $f(n) = n^2 + kn - r$, 则二次函数的图象

开口向上, 对称轴方程为 $n = -\frac{k}{2} < 0$,

所以 $f(n)$ 在 $n \in \mathbf{N}_+$ 时单调递增, 令最小值 $f(1) = 1 + k - r > 0$, 解得 $k > r - 1$,

又 $k \in \mathbf{N}_+, k \geq 2, r \in \mathbf{N}_+, r \geq 2$, 故存在 $k \geq r$ 时, $a_{n+k} - a_n > 0$, 符合定义, 且“间隔数”的最小值为 r , 故 C 正确.

对于 D, 因为 $\{a_n\}$ 是“间隔递增数列”, 所以 $a_{n+k} - a_n = [(n+k)^2 + t(n+k)] -$

$$(n^2+ln)=k(2n+k+l)>0,$$

即 $2n+k+l>0$ 对任意 $n \in \mathbf{N}_+$ 成立,

设 $g(n)=2n+k+l$, 显然当 $n \in \mathbf{N}_+$ 时 $g(n)$ 单调递增, 故要使 $g(n)=2n+k+l>0$, 只需 $g(1)=2+k+l>0$, 即 $-2-l<k$.

又“间隔数”的最小值为 3, 故 $k \geq 3$ 时, $-2-l<k$, 且 $k \leq 2$ 时, $-2-l \geq k$, 故 $-2-l<3$ 且 $-2-l \geq 2$, 故 $-5<l \leq -4$, 故 **D 正确**. 故选 BCD.

- 4. ABD** 【解析】对于 A, $f\left(x-\frac{b}{3a}\right)+f\left(-x-\frac{b}{3a}\right)=a\left(x-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(x-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(x-\frac{b}{3a}\right)+d+a\left(-x-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-x-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-x-\frac{b}{3a}\right)+d=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d$, 又 $f\left(\frac{b}{3a}\right)=a\left(\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(\frac{b}{3a}\right)+d=\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^2}{9a^2}+\frac{bc}{3a}+d=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d$, 所以 $f\left(x-\frac{b}{3a}\right)+f\left(-x-\frac{b}{3a}\right)=2f\left(\frac{b}{3a}\right)$, 故点 $\left(\frac{b}{3a}, f\left(\frac{b}{3a}\right)\right)$ 是一元三次函数 $f(x)$ 图象的对称中心. 设 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a \neq 0)$ 上任一点, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线斜率 $k=f'(x_0)=3ax_0^2+2bx_0+c$, 则切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, 即 $y=(3ax_0^2+2bx_0+c)(x-x_0)+ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$, 与 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 联立, 消去 y 并整理得 $ax^3+bx^2-(2bx_0+3ax_0^2)x+2ax_0^3+bx_0^2=0$, 整理得一元三次方程 $(x-x_0)^2 \cdot (ax+2ax_0+b)=0$, 切线与曲线 $y=f(x)$ 有唯一的公共点 $\Leftrightarrow$ 一元三次方程有三个相等的实数根 $\Leftrightarrow x=x_0=\frac{b}{3a}$, 所以点 $P\left(\frac{b}{3a}, f\left(\frac{b}{3a}\right)\right)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上, 且该点处的切线与 $f(x)$ 的图

象无其他交点, 故 **A 正确**;

对于 B, 由于“伴随割点”的横坐标 $x_1 \neq x_0$, 因此 $ax_1+2ax_0+b=0 \Rightarrow 2x_0+x_1=-\frac{b}{a}$, 故 **B 正确**;

对于 C, 设点 (x_0, y_0) 的“伴随割点”为点 (x_1, y_1) , 且两者关于原点对称, 则 $x_0+x_1=0, y_0+y_1=0$, 所以

$$\begin{cases} x_0+x_1=0, \\ 2x_0+x_1=-\frac{b}{a}, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_0=\frac{b}{a}, \\ x_1=-\frac{b}{a}, \end{cases}$$

于是 $y_0+y_1=f(x_0)+f(x_1)=f\left(\frac{b}{a}\right)+f\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{2b^3}{a^2}+2d=0$, 得 $d=-\frac{b^3}{a^2}$, 故 **C 错误**;

对于 D, 由于 A, B, C 是 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点,

$$\text{故设 } f(x)=a(x-x_A)(x-x_B)(x-x_C)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

根据一元三次方程根与系数的关系知

$$x_A+x_B+x_C=-\frac{b}{a} \quad ①,$$

又由 D, E, F 分别是 A, B, C 的“伴随

$$\text{割点”, 结合 B 选项知 } \begin{cases} 2x_A+x_D=-\frac{b}{a}, \\ 2x_B+x_E=-\frac{b}{a}, \\ 2x_C+x_F=-\frac{b}{a}, \end{cases}$$

三式相加得 $2(x_A+x_B+x_C)+x_D+x_E+x_F=-\frac{3b}{a}$, 代入①得 $x_D+x_E+x_F=-\frac{b}{a}$,

于是设 $g(x)=f(x)-a(x-x_D)(x-x_E)(x-x_F)=(ax^3+bx^2+cx+d)-a[x^3-(x_D+x_E+x_F)x^2+(x_Dx_E+x_Ex_F+x_Fx_D)x- x_Dx_Ex_F]=[c-a(x_Dx_E+x_Ex_F+x_Fx_D)]x+ax_Dx_Ex_F+d$,

则 $g(x)$ 的图象为一条直线,

又 $g(x_D)=f(x_D), g(x_E)=f(x_E),$

$g(x_F)=f(x_F)$,

所以点 D, E, F 均在 $g(x)$ 的图象上,

D, E, F 三点共线, 故 **D 正确**. 故选 ABD.

名师点拨 三次函数图象的切线与图象的交点问题可以转化为三次函数的零点问题.

研究切点间的关系即研究零点间的关系, 可以借助函数思想, 也可以进行适当的代数变形, 或结合一元三次方程根与系数的关系研究.

- 5. BC** 【解析】选项 A, $f(x)=\sin x$, 则 $f'(x)=\cos x \neq \sin(x+\pi)$, **A 错误**;

选项 B, $f(x)=e^x$, 则 $f'(x)=e^x$, $f^{(2)}(x)=[f'(x)]'=(e^x)'=e^x$, 所以 $f^{(n)}(x)=e^x$, 所以 $f^{(n)}(0)=e^0=1$,

从而 $f(x)=e^x$ 在 $x_0=0$ 处的 3 次泰勒

多项式为 $T_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, **B 正确**;

选项 C, $f(x)=\cos x, f'(x)=-\sin x$,

$$f^{(2)}(x)=-\cos x, f^{(3)}(x)=\sin x,$$

$$f(0)=\cos 0=1, f'(0)=-\sin 0=0,$$

$$f^{(2)}(0)=-\cos 0=-1, f^{(3)}(0)=\sin 0=0,$$

所以 $f(x)=\cos x$ 在 $x_0=0$ 处的 3 次泰勒

多项式为 $T_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3=1-\frac{x^2}{2}$, **C 正确**;

选项 D, 由选项 B 知 $f(x)=e^x$ 在 $x_0=0$ 处的 n 次泰勒多项式为 $T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$,

则 $T_n(0.1)=1+0.1+\frac{0.1^2}{2}+\frac{0.1^3}{6}+\frac{0.1^4}{24}+\cdots$, 而 $\frac{0.1^3}{6}=\frac{0.001}{6} \approx 0.0001667, \frac{0.1^4}{24} < 0.0001$,

所以 $e^{0.1} \approx 1+0.1+0.005+0.0002=1.1052$, **D 错误**. 故选 BC.

专练 2 创新题型专练

刷素养

- 1. 【解】**(1) 选条件①:

依题意得, 当 $n=1$ 时, $2a_1=2S_1=2 \times$

1^2+a_1 , 解得 $a_1=2$, 又 $2S_2=2 \times 2^2+a_2$,

即 $2(2+a_2)=8+a_2$, 解得 $a_2=4$.

又数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d ,

则 $d=a_2-a_1=4-2=2$, 所以 $a_n=a_1+$

$(n-1)d=2+2(n-1)=2n(n \in \mathbf{N}_+)$,

验证: 当 $a_n=2n$ 时, $2S_n=n(a_1+a_n)=2n+2n^2=2n^2+a_n$, 符合已知条件.

所以 $a_n=2n(n \in \mathbf{N}_+)$.

选条件②:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $a_3+a_5=16$ 且 $S_3+S_5=42$, 所以

$$\begin{cases} (a_1+2d)+(a_1+4d)=16, \\ 3a_1+\frac{3(3-1)d}{2}+5a_1+\frac{5(5-1)d}{2}=42, \end{cases}$$

整理得 $\begin{cases} a_1+3d=8, \\ 8a_1+13d=42, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=2, \\ d=2, \end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+2(n-1)=$

$2n$, 所以 $a_n=2n(n \in \mathbf{N}_+)$.

选条件③:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

由 $\frac{S_n}{S_{2n}}=\frac{n+1}{4n+2}$, 得 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$, 即 $\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{1}{3}$,

得 $a_2=2a_1$, 故 $d=a_1$,

又 $S_7 = 7a_1 + \frac{7 \times 6d}{2} = 28a_1 = 56$, 解得 $a_1 = 2$, 所以 $a_n = 2n (n \in \mathbf{N}_+)$,
 验证: 当 $a_n = 2n$ 时, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1)$, $S_{2n} = 2n(2n+1)$,
 所以 $\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{n+1}{4n+2}$, 符合已知条件. 所以 $a_n = 2n (n \in \mathbf{N}_+)$.

(2) 由 (1) 得, $a_n = 2n$, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1)$.
 因为 $\{b_n\}$ 为等比数列,
 设公比为 q , 且 $b_1 = a_1 = 2$, $b_2 = a_3 = 2 \times 3 = 6$, 所以 $q = \frac{b_2}{b_1} = 3$, 所以 $b_n = 2 \times 3^{n-1}$.

所以 $\frac{1}{S_n} + b_n = \frac{1}{n(n+1)} + 2 \times 3^{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + 2 \times 3^{n-1}$.

思路: 观察形式, 分组求和, 前者用裂项相消法, 后者直接用公式法

$$\frac{1}{n+1} + 2 \times 3^{n-1},$$

$$\text{故 } T_n = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] + \frac{2(1-3^n)}{1-3} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 3^n - 1 = 3^n - \frac{1}{n+1}.$$

2. (1) 【解】 $f(x) = \ln x + 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
 若不等式 $ax - f(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $ax - (\ln x + 1) \geq 0$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 恒成立.

令 $\varphi(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $a \geq \varphi(x)_{\max}$.

$$\varphi(x)_{\max}, \varphi'(x) = \frac{1 - (\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

由 $\varphi'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$;

由 $\varphi'(x) < 0$, 得 $x > 1$;

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值, 且最大值 $\varphi(1) = 1$, 所以 $a \geq 1$,

故实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(2) 【证明】若选①,

由 (1) 可知, $\frac{\ln x + 1}{x} \leq 1$, 即 $\ln x \leq x - 1$,

当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立.

令 $x = \frac{1}{n^2}$, 则 $x - 1 = \frac{1}{n^2} - 1 > \ln \frac{1}{n^2} =$

$$-\ln n^2, n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+,$$

所以 $\ln n^2 > 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n \cdot n} > 1 - \frac{1}{n(n-1)}$

$$= 1 - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n},$$

$$n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+,$$

所以 $\ln 2^2 + \ln 3^2 + \ln 4^2 + \cdots + \ln n^2 >$

$$\left(1 - \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3}\right) +$$

$$\left(1 - \frac{1}{4-1} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = n -$$

$$1 - 1 + \frac{1}{n} = n + \frac{1}{n} - 2 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+),$$

不等式得证.

若选②,

由 (1) 可知, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$\ln x + 1 < x$, 所以 $\ln x < x - 1$.

$$\text{令 } x = 1 + \frac{1}{3^n}, \text{ 则 } \ln\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) < 1 + \frac{1}{3^n} - 1 = \frac{1}{3^n},$$

$$\text{所以 } \ln\left[\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right) \cdots \right.$$

$$\left.\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) +$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) < \frac{1}{3} +$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} =$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) <$$

$$e^{\frac{1}{2}} (n \in \mathbf{N}_+), \text{ 不等式得证.}$$

模块综合测试

刷综合

1. D 【解析】数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = -3$, $a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4 = 9$, 所以 $a_2 = -1$, $a_4 = 3$, 则 $S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(a_2 + a_4)}{2} = 5$. 故选 D.

2. C 【解析】对函数 $y(t) = \cos t - \sin t$ 求导得 $y'(t) = -\sin t - \cos t$,

故该质点在 $t = \frac{\pi}{4}$ s 时的瞬时速度为

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} =$$

$$-\sqrt{2} \text{ (m/s)}. \text{ 故选 C.}$$

3. C 【解析】由 $f(x) = x^2 + ax$ 可得其导函数为 $f'(x) = 2x + a$, 由 $f'(x) = 2x + 1$, 可得 $a = 1$, 所以 $f(x) = x^2 + x$,

$$\text{所以 } \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

因此数列 $\left\{\frac{1}{f(n)}\right\} (n \in \mathbf{N}_+)$ 的前 100 项

$$\text{和为 } \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(100)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} +$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}. \text{ 故选 C.}$$

4. A 【解析】 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} + a - 2^n - a = 2^n, n \geq 2$,

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1 = 4 + a, a_2 = 4$,

$$\text{所以 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{4+a} = 2, \text{ 则 } a = -2, a_1 = 2,$$

易知 $a_1 a_2, -a_2 a_3, a_3 a_4, \cdots, -a_8 a_9, a_9 a_{10}$

构成首项为 8, 公比为 -4 的等比数列,

所以 $a_1 a_2 - a_2 a_3 + a_3 a_4 - \cdots - a_8 a_9 +$

$$a_9 a_{10} = \frac{8[1 - (-4)^9]}{5} = \frac{8 \times 2^{21}}{5}. \text{ 故选 A.}$$

5. C 【解析】由题意可得 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ \ln(x+1) - x \neq 0, \end{cases}$
 解得 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, 可排除 D.

$$\text{设 } y = \ln(x+1) - x, \text{ 则 } y' = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1},$$

所以当 $x > 0$ 时, $y' < 0$; 当 $-1 < x < 0$ 时,

$y' > 0$, 则 $y < y_{\max} = 0$,

所以当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 可排除 A.

当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 可排除 B.

故选 C.

6. D 【解析】设 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} (x > 0)$, 可得

$$a = \frac{\ln 3}{9} = f(3), b = \frac{1}{e^2} = \frac{\ln e}{e^2} = f(e), c =$$

$$\frac{\ln 2}{4} = f(2).$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3},$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt{e}$,

则当 $x > \sqrt{e}$ 时, $1 - 2\ln x < 0$, 即 $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减.

又因为 $\sqrt{e} < 2 < e < 3$, 所以 $f(2) > f(e) > f(3)$, 即 $c > b > a$. 故选 D.

7. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (n \in \mathbf{N}_+),$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 则}$$

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right],$$

当 $a_1 = 1$ 时也满足 $a_n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$, 故对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, $a_n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$.

当 n 为奇数时, $a_n = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)$, 数列 $\{a_n\}$ 中的奇数项单调递减,

此时 $a_n \leq a_1 = 1$, 且 $a_n = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) > \frac{2}{3}$, 即 $\frac{2}{3} < a_n \leq 1$;

当 n 为偶数时, $a_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$, 数列 $\{a_n\}$ 中的偶数项单调递增,

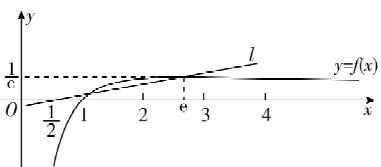
此时 $a_n \geq a_2 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$, 且 $a_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < \frac{2}{3}$, 此时 $\frac{1}{2} \leq a_n < \frac{2}{3}$.

综上所述, 数列 $\{a_n\}$ 中的最小项为 $a_2 = \frac{1}{2}$, 最大项为 $a_1 = 1$.

若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $a_n \in [s, t]$, 其中 $s, t \in \mathbf{R}$, 当 $s = \frac{1}{2}, t = 1$ 时, $t - s$ 取最小值, 且其最小值为 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 故选 C.

8. C 【解析】点 $P(x_0, f(x_0))$ 在直线 l 上方, 即 $\frac{\ln x_0}{x_0} > a(2x_0 - 1)$, 因为 $x > 0$, 所以 $\frac{\ln x}{x} > a(2x - 1)$ 有且仅有一个正整数解. 由 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 则当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$.

又当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$, 所以可得函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示,



直线 $l: y = a(2x - 1)$ 过定点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

当 $a \leq 0$ 时, $\frac{\ln x}{x} > a(2x - 1)$ 有无数个正整数解, 不合题意, 故 $a > 0$.

又 $\frac{\ln x}{x} > a(2x - 1)$ 有且仅有一个正整数解, 所以 2 是唯一的正整数解,

$$\begin{cases} \frac{\ln 2}{2} > a \cdot (4 - 1), \\ \frac{\ln 3}{3} \leq a \cdot (6 - 1), \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{\ln 3}{15} \leq a < \frac{\ln 2}{6}.$$

故选 C.

9. BD 【解析】由题意 $S_6 > S_7 > S_5$, 则 $a_7 = S_7 - S_6 < 0, a_6 = S_6 - S_5 > 0$,

又 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $d = a_7 - a_6 < 0$, 故 A 错误;

又 $a_6 + a_7 = S_7 - S_5 > 0$, 即 $a_6 > -a_7 > 0$, 则 $|a_6| > |a_7|$, 故 D 正确;

$$S_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} = 6(a_6 + a_7) > 0, \text{ 故 B 正确};$$

正确;

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, $d < 0, a_6 > 0, a_7 < 0$, 所以当 $1 \leq n \leq 6 (n \in \mathbf{N}_+)$ 时, $a_n > 0$, 当 $n \geq 7 (n \in \mathbf{N}_+)$ 时, $a_n < 0$,

所以当 $n = 6$ 时, S_n 取得最大值 S_6 , 所以数列 $\{S_n\}$ 的最大项为 S_6 , 故 C 错误. 故选 BD.

10. BCD 【解析】A 项, 由 $\frac{2S_n}{a_n - 1} = a_1$, 得

当 $n = 1$ 时, $\frac{2S_1}{a_1 - 1} = \frac{2a_1}{a_1 - 1} = a_1$, 且 $\{a_n\}$ 为正项数列, 可得 $a_1 = 3$, 由 $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n}$, 令 $n = 1$, 得 $b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1} = \frac{2}{3}$, 故 A 错误;

B 项, 由 A 知 $a_1 = 3$, 则 $\frac{2S_n}{a_n - 1} = 3, S_n =$

利用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 转化 S_n 与 a_n 的关系式

$\frac{3}{2}(a_n - 1)$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{2}(a_n - 1) - \frac{3}{2}(a_{n-1} - 1)$, 整理得 $a_n = 3a_{n-1}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 3^n$, 故 B 正确;

C 项, 令 $c_n = \frac{n}{a_n} = \frac{n}{3^n}$, 则 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1) \cdot 3^n}{n \cdot 3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n}$,

由 $3n - (n+1) = 2n - 1 > 0$, 可得 $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$,

即 $c_{n+1} < c_n$, 则数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 单调递减, 故

C 正确;

D 项, $b_n = 1 - \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{3^n} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

因为函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以数列 $\{b_n\}$ 单调递增, 则 $b_n \geq b_1 = \frac{2}{3}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

11. CD 【解析】由函数 $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{e^x}$,

可得 $f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{e^x}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 2$,

当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $-1 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1, 2)$ 上单调递增.

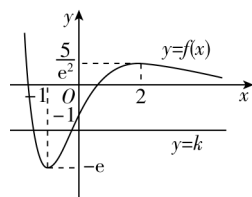
当 $x = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(-1) = -e$;

当 $x = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(2) = \frac{5}{e^2}$;

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$,

又 $f(0) = -1$, 作出函数 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示.



对于 A, 结合图象得, 函数 $f(x)$ 存在两个零点, 所以 A 不正确.

对于 B, 函数 $f(x)$ 仅存在最小值, 所以 B 不正确.

对于 C, 当 $x \in [t, +\infty)$ 时, $f(x)_{\max} = \frac{5}{e^2}$, 且 t 为正数, 可得 $0 < t \leq 2$, 所以 t 的最大值为 2, 所以 C 正确.

对于 D, 当 $-e < k < 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 的图象有两个交点, 即方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根, 所以 D 正确. 故选 CD.

12. $2^{n+1} - \frac{n^2 + n}{2} - 2$ 【解析】由 $a_1 + \frac{1}{2}a_2 +$

$$\frac{1}{2^2}a_3 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}a_n = n,$$

得当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_3 + \cdots +$

$$\frac{1}{2^{n-2}}a_{n-1} = n - 1,$$

两式作差得 $\frac{1}{2^{n-1}}a_n = n - (n - 1)$,

所以 $a_n = 2^{n-1}, n \geq 2$.

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 满足上式,

所以 $a_n = 2^{n-1}$.

所以 $2a_n - n = 2^n - n$.

则 $S_n = (2^1 - 1) + (2^2 - 2) + \cdots + (2^n - n)$

$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) - (1 + 2 + \cdots + n)$

$$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} - \frac{n(1+n)}{2}$$

$$= 2^{n+1} - \frac{n^2+n}{2} - 2.$$

13. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ 【解析】设切

点坐标为 $(x_0, (x_0 - 1)e^{x_0})$, 因为 $f'(x) = xe^x$, 所以切线的斜率 $k = x_0 e^{x_0}$, 所以切线方程是 $y - (x_0 - 1)e^{x_0} = x_0 e^{x_0}(x - x_0)$.

因为切线过点 $A(a, 0)$, 所以 $-(x_0 - 1)e^{x_0} = x_0 e^{x_0}(a - x_0)$, 即 $x_0^2 - (a+1)x_0 + 1 = 0$.

因为过点 $A(a, 0)$ 可以作曲线 $f(x)$ 的两条切线,

所以方程 $x_0^2 - (a+1)x_0 + 1 = 0$ 有两个不同的实数根,

所以 $\Delta = (a+1)^2 - 4 > 0$, 解得 $a > 1$ 或 $a < -3$.

14. 1 【解析】依题意, $f(x_1) = g(x_2)$, 即

$$x_1 e^{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2},$$

$$\therefore \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{1}{x_2} \ln \frac{1}{x_2} = e^{\frac{\ln \frac{1}{x_2}}{x_2}} \ln \frac{1}{x_2},$$

$$\therefore x_1 e^{x_1} = e^{\frac{\ln \frac{1}{x_2}}{x_2}} \ln \frac{1}{x_2}.$$

$\therefore f(x) = xe^x, \therefore f'(x) = e^x + xe^x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore$ 函数 $f(x) = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x_1 = \ln \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = \frac{1}{x_2}$,

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} - x_1 - \ln x_1 = x_1 e^{x_1} - (x_1 + \ln x_1) = e^{x_1 + \ln x_1} - (x_1 + \ln x_1),$$

→ 黑板: 同构变形, 便于构造新函数研究最值

令 $t = x_1 + \ln x_1$, 显然 $t = x_1 + \ln x_1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $t \in \mathbf{R}$, 设 $h(t) = e^t - t$, 令 $h'(t) = e^t - 1 = 0$, 解得 $t = 0$, 当 $t \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(t) < 0$, 当 $t \in (0, +\infty)$ 时, $h'(t) > 0$,

$\therefore h(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(t)_{\min} =$

$h(0) = 1$. 即 $\frac{x_1}{x_2} - x_1 - \ln x_1$ 的最小值为 1.

15. 【解】(1) $f'(x) = 6x^2 - 2ax + 12$,

因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值 5,

所以 $f'(2) = 24 - 4a + 12 = 0$, 得 $a = 9$,

此时 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1) \cdot (x-2)$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 符合题意,

所以 $a=9$, 则 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + b$.

又 $f(2) = 4 + b = 5$, 所以 $b = 1$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$,

所以 $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$.

列表如下:

x	0	(0, 1)	1	(1, 2)	2	(2, 3)	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	单调递增	极大值 6	单调递减	极小值 5	单调递增	10

由于 $1 < 5$, 故当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = 1$.

16. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\therefore a_1 = 1, S_3 = 3a_1 + 3d = 6,$$

$$\therefore d = 1, \text{ 则 } a_n = n.$$

由 $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \cdots \cdot b_n = 2^n$ 得, 当 $n \geq 2$

$$\text{时, } b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \cdots \cdot b_{n-1} = 2^{n-1},$$

$$\therefore b_n = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2^{n-n+1} = 2^{a_n} = 2^n (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时, $b_1 = 2^1 = 2$, 满足上式, 故 $b_n = 2^n$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得, } c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{2^n}.$$

设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

$$\text{则 } T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n},$$

$$\text{得 } \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}},$$

两式相减得,

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots +$$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\text{所以 } T_n = 2 - \frac{2+n}{2^n}.$$

17. 【解】(1) 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x) = 2e^{2x} + 2(2-1)e^x - 2x - 1 = 2e^{2x} + 2e^x - 2x - 1$,

求导得 $f'(x) = 4e^{2x} + 2e^x - 2$,

$$\text{则 } f(0) = 2e^0 + 2e^0 - 0 - 1 = 3, f'(0) = 4e^0 + 2e^0 - 2 = 4,$$

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-3=4x$, 即 $4x-y+3=0$.

$$(2) f'(x) = 2ae^{2x} + 2(a-1)e^x - 2 = 2(ae^x - 1) \cdot (e^x + 1),$$

当 $a \leq 0$ 时, $ae^x - 1 < 0$, 故 $f'(x) < 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

当 $a > 0$ 时, 令 $ae^x - 1 = 0$, 得 $e^x = \frac{1}{a}$, 即

$$x = \ln \frac{1}{a} = -\ln a,$$

当 $x < -\ln a$ 时, $e^x < \frac{1}{a}$, $f'(x) < 0$, $f(x)$

单调递减;

当 $x > -\ln a$ 时, $e^x > \frac{1}{a}$, $f'(x) > 0$, $f(x)$

单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 由 (2) 知,

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 至多只有一个零点, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = -\ln a$ 处取得最小值,

$$f(-\ln a) = ae^{-2\ln a} + 2(a-1)e^{-\ln a} - 2 \cdot$$

$$(-\ln a) - 1 = \frac{1}{a} + 2(a-1) \cdot \frac{1}{a} +$$

$$2\ln a - 1$$

$$= \frac{1}{a} + 2 - \frac{2}{a} + 2\ln a - 1 = 1 - \frac{1}{a} + 2\ln a,$$

令 $g(a) = 1 - \frac{1}{a} + 2\ln a, a > 0$, 则

$$g'(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} = \frac{1+2a}{a^2} > 0,$$

故 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 0$,

当 $0 < a < 1$ 时, $g(a) < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$, 又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x)$ 有两个零点;

当 $a=1$ 时, $g(a) = 0$, 则 $f(x)$ 仅有一个零点;

当 $a > 1$ 时, $g(a) > 0$, 则 $f(x)$ 无零点.

综上, a 的取值范围是 $(0, 1)$.

18. (1) 【证明】因为 $a_{2n+1} = 2^{a_{2n}+2} = 2^{\log_2 2^{a_{2n}+2}} = 2^2 a_{2n-1} = 4a_{2n-1}$, 由 $a_1 = 1$ 可知 $a_{2n-1} \neq 0$,

所以 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = 4$, 所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1, 公比为 4 的等比数列.

(2) 【解】由 (1) 得 $a_{2n-1} = 4^{n-1}$,

$$\text{则 } a_{2n} = \log_2 a_{2n-1} = \log_2 4^{n-1} = 2n-2,$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{a_{2n+1} \cdot a_{2n}}{2} = \frac{4^n (2n-2)}{2} = (n-1) \cdot 4^n,$$

所以 $T_n = 0 \times 4^1 + 1 \times 4^2 + \cdots + (n-1) \times 4^n$,

则 $4T_n = 0 \times 4^2 + 1 \times 4^3 + \cdots + (n-1) \times 4^{n+1}$,

所以 $-3T_n = 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n - (n-1)4^{n+1}$

$$= \frac{4^2(1-4^{n-1})}{1-4} - (n-1)4^{n+1}$$

$$= \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{16}{3} - (n-1)4^{n+1}$$

$$= \frac{4-3n}{3} \cdot 4^{n+1} - \frac{16}{3},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{3n-4}{9} \cdot 4^{n+1} + \frac{16}{9}.$$

(3)【证明】由(1)得 $a_{2n-1} = 4^{n-1}$, 则 $a_{2n+3} = 4^{n+1}$, 所以 $a_{2n+4} = \log_2 a_{2n+3} = 2n+2$, 所以 $c_n = \sqrt{1 + \frac{8}{(a_{2n+4})^2}} =$

$$\sqrt{1 + \frac{2}{(n+1)^2}},$$

$$\begin{aligned} & \text{又 } n+1 - \frac{1}{n+1} = n + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ & = \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right] + \\ & \left[1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\right] + \cdots + \left[1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right], \end{aligned}$$

点悟: 将所证不等式的右边转化

为数列 $\left\{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\}$ 的前 n 项和

欲证 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n < n + 1 - \frac{1}{n+1}$,

只要证 $c_n < 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}$,

$$\text{即证 } \sqrt{1 + \frac{2}{(n+1)^2}} < 1 + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\text{即证 } 1 + \frac{2}{(n+1)^2} < \left[1 + \frac{1}{n(n+1)}\right]^2.$$

$$\text{因为 } 1 + \frac{2}{(n+1)^2} < 1 + \frac{2}{n(n+1)} < 1 + \frac{2}{n(n+1)} + \left[\frac{1}{n(n+1)}\right]^2 = \left[1 + \frac{1}{n(n+1)}\right]^2,$$

$$\text{所以 } c_n < 1 + \frac{1}{n(n+1)}, \text{ 得证.}$$

19. (1)【解】设 $f(x)$ 图象的切点为 (m, e^m) , 又 $f'(x) = e^x$, 则 $l: y - e^m = e^m(x - m)$, 因为 l 过原点, 所以 $0 - e^m = e^m(0 - m)$, 可得 $m = 1$, 所以切线的斜率为 e . 设 $g(x)$ 图象的切点为 $(n, kn^2 + k)$, $g'(x) = 2kx$, 则有 $2kn = e$, 得 $n = \frac{e}{2k}$,

$$\text{由斜率公式可得 } \frac{k\left(\frac{e}{2k}\right)^2 + k - 0}{\frac{e}{2k} - 0} = e, \text{ 解}$$

$$\text{得 } k = \pm \frac{e}{2}.$$

(2)(i)【解】由题意有 $h(x) = e^x - kx^2 - k$, 所以 $h'(x) = e^x - 2kx$, 令 $h_1(x) = h'(x)$, 则 $h'_1(x) = e^x - 2k$.

当 $k = 0$ 时, $h(x) = e^x$ 单调递增, 此时 $h(x)$ 无极值点.

当 $k < 0$ 时, $h'_1(x) > 0$, 则 $h'(x)$ 单调递增, 且 $h'(0) = 1 > 0$, $h'\left(\frac{1}{2k}\right) = e^{\frac{1}{2k}} - 1 < 0$,

故存在 $t_0 \in \left(\frac{1}{2k}, 0\right)$ 使得 $h'(t_0) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, t_0)$ 上单调递减, 在 $(t_0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(x)$ 有一个极值点.

当 $k > 0$ 时, 令 $h'_1(x) = 0$ 得 $x = \ln 2k$, 且 $h'_1(x)$ 为增函数,

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2k)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2k, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h'(x) \geq h'(\ln 2k) = e^{\ln 2k} - 2k \ln 2k = 2k(1 - \ln 2k)$.

当 $0 < k \leq \frac{e}{2}$ 时, $h'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立, 则 $h(x)$ 单调递增, 此时 $h(x)$ 无极值点.

当 $k > \frac{e}{2}$ 时, $h'(\ln 2k) < 0$, $h'(0) = 1 > 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h'(x) > 0$,

故 $\exists t_1 \in (0, \ln 2k)$, $\exists t_2 \in (\ln 2k, +\infty)$, 使得 $h'(t_1) = h'(t_2) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, t_1)$, $(t_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (t_1, t_2) 上单调递减, 故 $h(x)$ 有两个极值点.

综上可得, 当 $k < 0$ 时, $h(x)$ 有一个极值点; 当 $0 \leq k \leq \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 无极值点;

当 $k > \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 有两个极值点.

(ii)【证明】由(i)知, 当 $k < 0$ 时, $h(x)$ 有一个负的极小值点 x_1 ,

又 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增, 即 x_1 为 $h(x)$ 的极小值点也是最小值点,

所以 $h(x)_{\min} = h(x_1) = e^{x_1} - kx_1^2 - k$, 又

$$h'(x_1) = e^{x_1} - 2kx_1 = 0, \text{ 即 } e^{x_1} = 2kx_1,$$

所以 $h(x_1) = 2kx_1 - kx_1^2 - k = -k \cdot (x_1 - 1)^2 > 0$, 故 $h(x)$ 无零点, 不满足题意;

当 $k > \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 有两个正的极值点,

不妨设极大值点为 x_2 , 极小值点

为 x_1 ,

由(i)可知 $0 < x_2 < 1 < \ln 2k < x_1$,

$h(x)$ 在 $(-\infty, x_2)$, $(x_1, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_2, x_1) 上单调递减,

$$h(x_2) = e^{x_2} - k(x_2^2 + 1) = 2kx_2 - k(x_2^2 + 1) = -k(x_2 - 1)^2 < 0,$$

故 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $h(x) \leq h(x_2) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上无零点.

先证明当 $x > 2e$ 时, $e^x > x^3 + x$,

记 $n(x) = e^x - (x^3 + x)$ ($x > 2e$), 则 $n'(x) = e^x - 3x^2 - 1$, 令 $n_1(x) = n'(x)$,

$$n'_1(x) = e^x - 6x,$$

令 $n_2(x) = n'_1(x)$, 则 $n'_2(x) = e^x - 6$,

当 $x > 2e$ 时 $n'_2(x) = e^x - 6 > 0$, 此时 $n_2(x)$ 单调递增,

故 $n_2(x) = e^x - 6x > e^{2e} - 12e > e^5 - 12e = e(e^4 - 12) > 0$, 故 $n'(x)$ 单调递增,

故 $n'(x) > n'(2e) = e^{2e} - 12e^2 - 1 > e^5 - 12e^2 - 1 = e^2(e^3 - 12) - 1 > e^2(2 \cdot 7^3 - 12) - 1 > 0$, 故 $n(x)$ 单调递增,

则 $n(x) = e^x - (x^3 + x) > e^{2e} - (8e^3 + 2e) = e[e^2(e^{2-3} - 8) - 2] > e[e^2 \cdot (e^{2 \cdot 0.4} - 8) - 2] > e[e^2(1.2e^2 - 8) - 2] > e[e^2(1.2 \times 7.29 - 8) - 2] > 0$,

故当 $x > 2e$ 时, $e^x > x^3 + x$.

$$\text{所以 } h(4k) = e^{4k} - k[(4k)^2 + 1] > 4k[(4k)^2 + 1] - k[(4k)^2 + 1] = 3k[(4k)^2 + 1] > 0,$$

又 $h(x_1) = -k(x_1 - 1)^2 < 0$, 故 $\exists x_0 \in (x_1, 4k)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 故 $h(x)$ 有唯一的零点.

$$h(2x_1) = e^{2x_1} - k(2x_1)^2 - k, \text{ 又 } \frac{e^{x_1}}{2x_1} = k,$$

点悟: 研究 $2x_1$ 与 x_0 的大小关系即研究 $h(2x_1)$ 与 0 的大小关系

$$\text{所以 } h(2x_1) = k(4kx_1^2 - 4x_1^2 - 1) = k(2x_1e^{x_1} - 4x_1^2 - 1),$$

令 $\varphi(x) = 2xe^x - 4x^2 - 1$ ($x > 1$), 则 $\varphi'(x) = (2x+2)e^x - 8x$,

令 $p(x) = e^x - x - 1$, 则 $p'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单调递增,

当 $x < 0$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 单调递减, 所以 $p(x) \geq p(0) = 0$, 故 $e^x \geq x + 1$,

$$\text{所以 } \varphi'(x) \geq (2x+2)(x+1) - 8x = 2(x-1)^2 \geq 0 \text{ 且不恒为 } 0,$$

即 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $\varphi(x) > \varphi(1) = 2e - 5 > 0$,

故 $h(2x_1) > 0 = h(x_0)$, 又 $h(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $2x_1 > x_0$.

综上, 若 x_1 为 $h(x)$ 的极小值点, x_0 为 $h(x)$ 的零点, 恒有 $2x_1 > x_0$.