

故该林区这种树木的总材积量的估计值为 $1\,209\text{ m}^3$.

5. 【解】(1) 根据题表数据可知, 超声波检查结果不正常的有 200 人, 其中患该疾病的有 180 人, 因此估计超声波检查结果不正常者患该疾病的概率
- $$p = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}.$$

(2) 零假设为 H_0 : 超声波检查结果与患该疾病无关.

$$\chi^2 = \frac{1\,000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)}{200 \times 800 \times 800 \times 200} =$$

$$765.625 > 10.828.$$

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 超声波检查结果与患该疾病有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.001.

链接教材 本题是教材第 133 页例 4 的同类试题, 考查利用独立性检验分析两类变量是否有关联, 难度及运算量都不大, 步骤中注意给出零假设及判断结果.

基于小概率值 α 的独立性检验是: 当 $\chi^2 \geq x_\alpha$ 时, 我们就推断 H_0 不成立, 即认为 X 和 Y 不独立, 该推断犯错误的概率不超过 α ; 当 $\chi^2 < x_\alpha$ 时, 我们没有充分证据推断 H_0 不成立, 可以认为 X 和 Y 独立.

6. 【解】(1) 补全列联表如下:

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

$$K^2 = \frac{150 \times (26 \times 30 - 24 \times 70)^2}{50 \times 100 \times 96 \times 54} = \frac{75}{16} =$$

4.6875 > 3.841, 4.6875 < 6.635, 所以有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异, 没有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

(2) 由题中数据知, $\bar{p} = \frac{96}{150} = 0.64$,

$$p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.5 + 1.65 \cdot$$

$$\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{150}} = 0.5 + 1.65 \times \frac{0.5}{\sqrt{150}} \approx 0.5 +$$

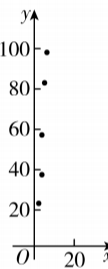
$$1.65 \times \frac{0.5}{12.247} \approx 0.57.$$

$$\text{又 } 0.64 > 0.57,$$

所以可以认为生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了.

刷原创

1. C 【解析】由题可得 $2.706 = x_{0.1} < \chi^2 = 2.974 < x_{0.05} = 3.841$, 则根据小概率值 α 的独立性检验知, 变量 x, y 不相互独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.1. 故选 C.

2. 【解】(1) 作出散点图, 由图知 $y = bx + a$ 更加适合,
- 
- 由题可知 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, $\bar{y} = \frac{22+39+59+82+98}{5} = 60$,
- $$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1 \times 22 + 2 \times 39 + 3 \times$$

$$59 + 4 \times 82 + 5 \times 98 = 1\,095,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 5 \times 3^2 = 10,$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{1\,095 - 5 \times 3 \times 60}{10} =$$

19.5, 所以 $\hat{a} = 60 - 19.5 \times 3 = 1.5$, 所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 19.5x + 1.5$.

(2) 将 $x = 6$ 代入上述经验回归方程, 得 $\hat{y} = 19.5 \times 6 + 1.5 = 118.5$, 所以预测第 6 个月的销售额约为 119 万元.

(3) 补全缺失数据后的 2×2 列联表如下:

	喜欢	不喜欢	总计
男	40	50	90
女	80	30	110
总计	120	80	200

零假设为 H_0 : 消费者选择意向与性别不存在关联.

$$\text{则 } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (40 \times 30 - 80 \times 50)^2}{120 \times 80 \times 110 \times 90} \approx 16.5 >$$

10.828, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 可以认为消费者选择意向与性别存在关联.

专练 1 新情境、新定义专练

刷素养

1. D 【解析】因为 $1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$, 所以从 2, 2, 3, 3, 5, 7 中任选 3 个数组成三位数, 可以分成两类:

①若三个数都不相同, 则可以组成三位数 $A_4^3 = 24$ 个;

②若含有 2 个 2 或 2 个 3, 则可以组成三位数 $2 \times C_3^1 \times C_3^1 = 18$ 个.

故由分类加法计数原理, 共可以组成不同三位数的个数为 $24 + 18 = 42$. 故选 D.

2. ABD 【解析】对 A: 观察方阵可知, $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1}$, 所以 $a_{j,i} = C_{j+i-2}^{j-1}$, 根据组合数性质得 $a_{j,i} = C_{j+i-2}^{j-1} = C_{j+i-2}^{(j+i-2)-(j-1)} = C_{i+j-2}^{i-1} = a_{i,j}$, 故 A 正确;

对 B: 由 A 分析知 $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1}$, 所以 $a_{i-1,j} + a_{i,j-1} = C_{i+j-3}^{i-2} + C_{i+j-3}^{i-1} = C_{i+j-2}^{i-1} = a_{i,j}$, 即 $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ ($i > 1, j > 1$), 故 B 正确;

对 C: 由 A 分析知 $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1}$, 可得 $a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} = C_{i-1}^{i-1} + C_i^{i-1} + C_{i+1}^{i-1} = C_i^i + C_{i+1}^{i-1} = C_{i+1}^i + C_{i+1}^{i-1} = C_{i+2}^i = a_{i+1,3} \neq a_{i+1,4}$, 故 C 错误;

对 D: 由组合数公式得 $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1} =$

$\frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

3. 4 【解析】依题意, 1 的质数分布区间 (1, 4) 内的质数有 2, 3 两个; 2 的质数分布区间 (4, 9) 内的质数有 5, 7 两个; 3 的质数分布区间 (9, 16) 内的质数有 11, 13 两个; 4 的质数分布区间 (16, 25) 内的质数有 17, 19, 23 三个; 5 的质数分布区间 (25, 36) 内的质数有 29, 31 两个; 6 的质数分布区间 (36, 49) 内的质数有 37, 41, 43, 47 四个.

因此从集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中任取两个元素, 则它们在其质数分布区间上的质数个数之和为 5 的选取方案为取 1 和 4, 2 和 3, 4 和 5, 共 4 种方案.

4. $C_n^k C_n^2 C_{n-3}^2$ 【解析】由题意得, $(a+b+c)^n = [(a+b)+c]^n = C_n^0 (a+b)^n + C_n^1 (a+b)^{n-1} c + C_n^2 (a+b)^{n-2} c^2 + \cdots + C_n^k (a+b)^{n-k} c^k + \cdots + C_n^n c^n$ ($0 \leq k \leq n$ 且 $k \in \mathbf{N}$), 则 $(a+b)^{n-k} c^k$ 的系数为 C_n^k .

在 n 个因式 $(a+b+c)$ 中取 3 个 a , 2 个

$b, n-5$ 个 c 相乘就是 $a^3 b^2 c^{n-5}$, 其方法数为 $C_n^3 C_{n-3}^2 C_{n-5}^{n-5} = C_n^3 C_{n-3}^2$, 故 $a^3 b^2 c^{n-5}$ 的系数为 $C_n^3 C_{n-3}^2$.

5. D 【解析】不超过 30 的自然数有 31 个, 其中素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 共 10 个, 孪生素数有 3 和 5, 5 和 7, 11 和 13, 17 和 19, 共 4 组.

$$\text{所以 } P(A) = \frac{C_{10}^2}{C_{31}^2} = \frac{45}{C_{31}^2}, P(AB) =$$

$$\frac{C_{10}^2 - 4}{C_{31}^2} = \frac{41}{C_{31}^2},$$

点悟: 正难则反思想的运用

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{41}{C_{31}^2}}{\frac{45}{C_{31}^2}} = \frac{41}{45}. \text{ 故}$$

选 D.

6. D 【解析】依题意, 小球从最上层 3 个缝隙中的一个落下的概率都相等, 往后每一层左右两边落下的概率相同, 由对称性可知, $P_1 = P_8 = \frac{1}{3}$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{96}, P_2 = P_7 = \frac{1}{3} \cdot (C_5^1 + C_5^0) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16},$$

$$P_3 = P_6 = \frac{1}{3} \cdot (C_5^2 + C_5^1 + C_5^0) \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$\frac{1}{6}, P_4 = P_5 = \frac{1}{3} \cdot (C_5^1 + C_5^2 + C_5^3) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{25}{96}, \text{故 A, B 正确.}$$

$$\text{则 } (P_i)_{\max} = P_4 = P_5 = \frac{25}{96}, (P_i)_{\min} = P_1 =$$

$$P_8 = \frac{1}{96}, \text{故 C 正确, D 错误. 故选 D.}$$

7.1 250 【解析】由题意知 $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $E(X) = 0.5n, D(X) =$

$$0.25n. \text{ 若 } 0.4 < \frac{X}{n} < 0.6, \text{ 则 } 0.4n < X <$$

$$0.6n, \text{ 即 } -0.1n < X - 0.5n < 0.1n,$$

$$\text{即 } |X - 0.5n| < 0.1n.$$

$$\text{由切比雪夫不等式 } P(|X - 0.5n| < 0.1n) \geq 1 - \frac{0.25n}{(0.1n)^2}, \text{ 知,}$$

若至少有 98% 的把握使发射信号“1”的频率在区间 $(0.4, 0.6)$ 内,

$$\text{则 } 1 - \frac{0.25n}{(0.1n)^2} \geq 0.98, \text{ 解得 } n \geq 1250.$$

所以估计信号发射次数 n 的最小值为 1250.

8. 【解】(1) 由用频率估计概率可知, 从所有选择投壶 2 的学生中, 随机选择一位学生, 这位学生在活动中投中壶 2 的概率为 $\frac{90}{90+60} = \frac{3}{5}$.

(2) 用高三年级学生投中各壶的频率估计这位学生投中各壶的概率,

$$\text{则投中壶 1 的概率为 } \frac{40}{200} = \frac{1}{5}, \text{ 未投中}$$

$$\text{壶 1 的概率为 } \frac{4}{5},$$

$$\text{投中壶 2 的概率为 } \frac{3}{5}, \text{ 未投中壶 2 的}$$

$$\text{概率为 } \frac{2}{5},$$

则这位学生在“过关比赛”中仅投中一

$$\text{次的概率为 } \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} +$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{28}{125}.$$

(3) 用 X 表示投完 20 次之后, 这位同学投中壶 2 的次数, 则 $X \sim B\left(20, \frac{3}{5}\right)$,

$$\text{则 } P(X=k) = C_{20}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{20-k}, k =$$

$$0, 1, \dots, 20,$$

假设投中壶 2 的次数为 k 的概率最大, 则

$$\begin{cases} P(X=k) \geq P(X=k+1), \\ P(X=k) \geq P(X=k-1), \end{cases} \text{ 即}$$

【敲黑板】若 $X \sim B(n, p)$, 则此式的解为 $p(n+1) - 1 \leq k \leq p(n+1)$, 熟记本结论, 可直接套用, 简化运算

$$\begin{cases} C_{20}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k+1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{19-k}, \\ C_{20}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right)^{21-k}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{58}{5} \leq k \leq \frac{63}{5}, \text{ 又 } k \in \mathbb{N}, \text{ 则 } k = 12,$$

故投完 20 次之后, 这位同学投中壶 2 的次数为 12 的概率最大.

9. 【思路导引】(1) 当 $\lambda = 400$ 时, 泊松分布 $X \sim \text{Poisson}(400)$ 近似于正态分布 $X \sim N(400, 400)$, 根据正态分布在 3σ 上的概率值即可求解;

(2) 设 X_1 为配送延迟包裹数, 根据 $n_1 = 20\,000 > 20, 0 < p_1 = 0.000\,15 < 0.05$, 若用二项分布计算概率数值过大, 可用泊松分布 $\text{Poisson}(np)$ 近似二项分布 $B(n, p)$, 得到 $\lambda = n_1 p_1 = 20\,000 \times 0.000\,15 = 3$, 再根据泊松分布概率计算公式 $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 求解;

(3) 由 $P(X \leq 1) > \frac{10}{11}$, 得到 $P(X=0) + P(X=1) > \frac{10}{11}$, 再根据泊松分布的概率计算公式求解.

【解】(1) 当 $\lambda = 400$ 时, 泊松分布 $X \sim \text{Poisson}(400)$ 近似于正态分布 $X \sim N(400, 400)$,

$$\text{即 } \mu = 400, \sigma = \sqrt{400} = 20, \text{ 则 } P(360 < X < 440) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma),$$

$$\text{根据正态分布的性质, } P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.954\,5,$$

$$\text{故 } P(360 < X < 440) \approx 0.954\,5.$$

(2) 设 X_1 为配送延迟包裹数, 则 $X_1 = 0, 1, 2, \dots, 20\,000, X_1 \sim B(20\,000, 0.000\,15)$, 因为 $n_1 = 20\,000 > 20, 0 < p_1 = 0.000\,15 < 0.05$,

$$\lambda = n_1 p_1 = 20\,000 \times 0.000\,15 = 3,$$

所以当 k 不太大时, 有 $P(X_1 = k) \approx$

$$\frac{(n_1 p_1)^k}{k!} e^{-n_1 p_1} = \frac{3^k}{k!} e^{-3},$$

那么, 某天至少 3 起配送延迟的概率约为 $P(X_1 \geq 3) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1) - P(X_1 = 2) \approx 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{9e^{-3}}{2} \approx 0.58$.

(3) 由 $P(X \leq 1) > \frac{10}{11}$, 可得 $P(X=0) +$

$$P(X=1) > \frac{10}{11},$$

根据泊松分布的概率公式可得 $P(X=0) = e^{-\lambda}, P(X=1) = \lambda e^{-\lambda}$, 则有 $(\lambda +$

$$1)e^{-\lambda} > \frac{10}{11}.$$

$$\text{设 } h(\lambda) = (\lambda + 1)e^{-\lambda} (\lambda > 0),$$

由 $h'(\lambda) = -\lambda e^{-\lambda} < 0$, 可知 $h(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{因为 } (\lambda + 1)e^{-\lambda} > \frac{10}{11} = \frac{150}{165} = \frac{1.5}{1.65} \approx$$

$$1 + \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \frac{1+\lambda}{e^\lambda} > \frac{1+\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{所以 } h(\lambda) > h\left(\frac{1}{2}\right), \text{ 即 } 0 < \lambda < \frac{1}{2},$$

故 λ 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

专练 2 创新题型专练

刷素养

1. 【解】(1) 若选①: 展开式前三项的二项式系数之和等于 29.

$$\text{即 } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 29,$$

$$\text{得 } 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 29, \text{ 整理得 } n^2 + n - 56 = 0, \text{ 解得 } n = 7 \text{ 或 } n = -8 (\text{舍去}), \text{ 所以 } n = 7.$$

$$\text{所以 } (2x-1)^7 \text{ 的展开式的通项 } T_{r+1} = C_7^r (2x)^{7-r} (-1)^r = (-1)^r \cdot 2^{7-r} \cdot C_7^r x^{7-r}, r = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

若选②: 展开式中倒数第三项与倒数第二项的系数的比值为 -6.

$$\text{则 } \frac{(-1)^{n-2} \cdot C_n^{n-2} \times 2^2}{(-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1} \times 2} = -\frac{\frac{n(n-1)}{2} \times 4}{2n} =$$

$$-(n-1) = -6, \text{ 解得 } n = 7.$$

$$\text{所以 } (2x-1)^7 \text{ 的展开式的通项 } T_{r+1} = C_7^r (2x)^{7-r} (-1)^r = (-1)^r \cdot 2^{7-r} \cdot C_7^r x^{7-r}, r = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

(2) $(2x-1)^7$ 展开式中所有项的系数绝对值之和, 即 $(2x+1)^7$ 展开式中所有项的系数之和,

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } (2 \times 1 + 1)^7 = 3^7.$$

所以展开式中所有项的系数绝对值之和为 3^7 .

(3) 由 (1) 得, $(2x-1)^7$ 的展开式的通

$$\text{项 } T_{r+1} = (-1)^r \cdot 2^{7-r} \cdot C_7^r x^{7-r}, r = 0, 1, 2, \dots, 7,$$

$$\text{则展开式中项的系数为 } (-1)^r \cdot 2^{7-r} \cdot C_7^r, r = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

若要找展开式中系数最小的项, 则 r 为奇数,

$$\text{当 } r = 1 \text{ 时, 该项系数为 } (-1)^1 \cdot 2^{7-1} \cdot C_7^1 = -448,$$

$$\text{当 } r = 3 \text{ 时, 该项系数为 } (-1)^3 \cdot 2^{7-3} \cdot C_7^3 = -560,$$

$$\text{当 } r = 5 \text{ 时, 该项系数为 } (-1)^5 \cdot 2^{7-5} \cdot C_7^5 = -84,$$

$$\text{当 } r = 7 \text{ 时, 该项系数为 } (-1)^7 \cdot 2^{7-7} \cdot C_7^7 = -1,$$

高中必刷题 数学

因此,展开式中系数最小的项为第4项 $T_4 = -560x^4$.

2. 【解】 (1) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, P(X=1) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} =$$

$$\frac{1}{2}, P(X=2) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, P(X=3) =$$

$$\frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

(2) 记方案一、二、三的返现金额分别

为 Y_1, Y_2, Y_3 .

对于方案一:依题意得 $E(Y_1) = 5$.

对于方案二:由(1)可得 $P(X \geq 2) =$

$$P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3},$$

记5次抽奖中得到5元返现的次数为

$$Z, \text{ 则 } Z \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{所以 } E(Z) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

又 $Y_2 = 5Z$,

$$\text{则 } E(Y_2) = E(5Z) = 5E(Z) = \frac{25}{3}.$$

对于方案三:记“一次抽奖中抽中红色

卡片”为事件 A , 则 $P(A) = \frac{1}{10}$,

“5次抽奖中有抽中红色卡片”为事件 B , 每次抽奖的结果相互独立,

$$\text{所以 } P(\bar{B}) = [P(\bar{A})]^5 = [1 - P(A)]^5 = \frac{59\,049}{100\,000},$$

$$\text{所以 } P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{40\,951}{100\,000}.$$

Y_3 的所有可能取值为 0, 15,

$$P(Y_3=15) = P(B) = \frac{40\,951}{100\,000},$$

$$P(Y_3=0) = P(\bar{B}) = \frac{59\,049}{100\,000},$$

$$\text{则 } E(Y_3) = 15 \times \frac{40\,951}{100\,000} < 15 \times \frac{1}{2} = 7.5.$$

$$\text{所以 } E(Y_2) = \frac{25}{3} > 7.5 > E(Y_3), \text{ 且}$$

$$E(Y_2) = \frac{25}{3} > E(Y_1) = 5.$$

综上所述,方案二的返现金额的数学期望最大.

模块综合测试

刷综合

1. C 【解析】 $A_m^5 = \frac{m!}{(m-5)!}$.

对于 A, $A_m^5 \cdot C_m^2 = \frac{m(m-1) \times 5!}{2}$, 当 $m =$

7 时, $A_m^5 = A_m^5 \cdot C_m^2$, 成立;

对于 B, $\frac{A_m^m}{A_{m-5}^{m-5}} = \frac{m!}{(m-5)!} = A_m^5$, 故 $A_m^5 =$

$\frac{A_m^m}{A_{m-5}^{m-5}}$, 成立;

对于 C, $A_{m-1}^5 + A_{m-1}^4 = \frac{(m-1)!}{(m-6)!} +$

$\frac{(m-1)!}{(m-5)!} = \frac{(m-4) \cdot (m-1)!}{(m-5)!}$, 显然无

论 m 取何值, A_m^5 与 $A_{m-1}^5 + A_{m-1}^4$ 都不相等;

对于 D, $A_m^5 = \frac{m!}{(m-5)!}$, 成立. 故选 C.

2. C 【解析】先选重复数字, 有 10 种, 再选重复数字所在的两个位置, 有 $C_4^2 = 6$ 种.

剩下两个位置填两个不同数字, 且不能等于重复数字, 因此从其余 9 个数字中有序选 2 个, 有 $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$ 种.

所以总数为 $10 \times 6 \times 72 = 4\,320$. 故选 C.

3. D 【解析】因为 $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(A) =$

$$\frac{2}{3}, \text{ 所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

故选 D.

4. B 【解析】对拟合模型 $y = ae^{0.21x}$ 两边同时取自然对数, 可得 $\ln y = \ln a +$

$0.21x$, 由 $z = \ln y$, 可得经验回归方程为 $\hat{z} =$

$0.21x + \ln a$. 由题表得, $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$, $\bar{z} =$

$$\frac{1.0+1.4+1.5+1.7+1.9}{5} = 1.5,$$

由于经验回归直线必过样本点的中心

$(\bar{x}, \bar{z})$, 将其代入经验回归方程得

$$1.5 = 0.21 \times 4 + \ln a, \text{ 得 } \ln a = 1.5 - 0.84 = 0.66, \text{ 故 } a = e^{0.66}.$$

故选 B.

5. A 【解析】设甲抛硬币正面向上的次数为 X , 乙抛硬币正面向上的次数为 Y , 由题意得抛硬币一次得到正面向上的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $Y \sim$

$$B\left(2, \frac{1}{2}\right). \text{ 由二项分布的概率计算公式得}$$

$$P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-0} = \frac{1}{8},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{1}{8},$$

$$P(Y=0) = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-0} = \frac{1}{4},$$

$$P(Y=1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2},$$

$$P(Y=2) = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-2} = \frac{1}{4}.$$

而每次抛掷结果相互独立, 得到甲正面向上次数大于乙正面向上次数的情况如下, 当 $X=1$ 时, $Y=0$, 概率为 $\frac{3}{8} \times$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{32}; \text{ 当 } X=2 \text{ 时, } Y=0 \text{ 或 } Y=1, \text{ 概}$$

$$\text{率为 } \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}; \text{ 当 } X=3 \text{ 时,}$$

$$Y=0 \text{ 或 } Y=1 \text{ 或 } Y=2, \text{ 概率为 } \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} +$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{32}, \text{ 且这三种情况互}$$

斥, 由互斥事件概率加法公式得所求

$$\text{概率为 } \frac{3}{32} + \frac{9}{32} + \frac{4}{32} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 A.}$$

6. C 【解析】对于 A: 随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$ 且 $P(X < 4) = 0.79$, 则 $P(X < -2) =$

$$P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 0.21, \text{ 故 A 正确};$$

对于 B: 随机变量 $X \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$, 则期

$$\text{望 } E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}, \text{ 故 B 正确};$$

对于 C: 因为 $P(X=i) = \frac{a}{i(i+1)} (i=1,$

$$2, 3), \text{ 所以 } P(X=1) = \frac{a}{2}, P(X=2) =$$

$$\frac{a}{6}, P(X=3) = \frac{a}{12}, \text{ 所以 } \frac{a}{2} + \frac{a}{6} + \frac{a}{12} =$$

$$1, \text{ 解得 } a = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } P(X=2) = \frac{2}{9}, \text{ 故}$$

C 错误;

对于 D: 从 3 名男生、2 名女生中选取 2 人, 则其中至少有一名女生的概率 $P =$

$$\frac{C_3^1 C_2^1 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{7}{10}, \text{ 故 D 正确}.$$

$$\text{【反思: } P = 1 - \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{7}{10}$$

故选 C.

7. C 【解析】设 $M =$ “从第一个盒子中取得标有字母 A 的球”, $N =$ “从第一个盒子中取得标有字母 B 的球”, $R =$ “第二次取出的球是红球”.

$$\text{由题意可知, } P(M) = \frac{7}{10}, P(N) = \frac{3}{10},$$

$$P(R|M) = \frac{1}{2}, P(R|N) = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } P(R) = P(M)P(R|M) + P(N)P(R|$$

$$N) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{59}{100} = 0.59.$$

故选 C.

8. A 【解析】设混合检测方式样本需要检测的总次数为 Y , 则 Y 可能的取值为 1, 11.

$$P(Y=1) = (1-p)^{10}, P(Y=11) = 1 - (1-p)^{10},$$

故 Y 的分布列为

Y	1	11
P	$(1-p)^{10}$	$1 - (1-p)^{10}$

$$\therefore E(Y) = 1 \times (1-p)^{10} + 11 \times [1 - (1-p)^{10}] = 11 - 10 \times (1-p)^{10}.$$

设逐份检测方式下样本需要检测的总次数为 X , 则 $E(X) = 10$.

要使得混合检测方式优于逐份检测方式, 则需 $E(Y) < E(X)$,

$$\text{即 } 11 - 10 \times (1-p)^{10} < 10, \text{ 即 } (1-p)^{10} > \frac{1}{10}, \text{ 即 } 1-p > 10^{-0.1}.$$

$$\text{又 } \lg 0.794 \approx -0.1,$$

$$\therefore 1-p > 10^{\lg 0.794} = 0.794,$$

$$\therefore p < 1 - 0.794 = 0.206, \therefore 0 < p < 0.206.$$

故选 A.

9. ABD 【解析】对于 A, B 项, 由题表可得 $0.3 + 0.4 + m = 1$, 所以 $m = 0.3$.

$$\text{则 } E(X) = 4 \times 0.3 + 6 \times 0.4 + 8 \times 0.3 = 6,$$

$$D(X) = (4-6)^2 \times 0.3 + (6-6)^2 \times 0.4 + (8-6)^2 \times 0.3 = 2.4, \text{ 故 A 正确, B 正确;}$$

$$\text{对于 C, D 项, 因为 } Y = 2X - 1, E(X) = 6, D(X) = 2.4,$$

$$\text{所以 } E(Y) = 2E(X) - 1 = 2 \times 6 - 1 = 11,$$

$$D(Y) = 2^2 D(X) = 9.6, \text{ 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.}$$

10. ABD 【解析】令 $x+1=t$, 可得 $x=t-1$, 代入题中等式得 $(-1+t)^{2026} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{2026} t^{2026}$. 令 $f(t) = (-1+t)^{2026} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{2026} t^{2026}$.

$$\text{对于 A 选项, 展开式通项为 } T_{k+1} = C_{2026}^k \cdot (-1)^{2026-k} t^k (0 \leq k \leq 2026, k \in \mathbf{N}), \text{ 所以 } a_1 = C_{2026}^1 \cdot (-1)^{2025} = -2026, \text{ A 正确;}$$

$$\text{对于 B 选项, } a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2026} = f(-1) = (-2)^{2026} = 2^{2026}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C 选项, 由 A 选项可知, } a_k = C_{2026}^k \cdot (-1)^{2026-k} (0 \leq k \leq 2026, k \in \mathbf{N}), \text{ 当 } k \text{ 为奇数时, } a_k < 0, \text{ 且 } a_k = -C_{2026}^k, \text{ 当 } k \text{ 为偶数时, } a_k > 0, \text{ 且 } a_k = C_{2026}^k, \text{ 结合二项式系数的增减性可知, } a_k (0 \leq k \leq 2026, k \in \mathbf{N}) \text{ 中最大的是 } a_{1012} \text{ 和 } a_{1014}, \text{ C 错误;}$$

$$\text{对于 D 选项, 因为 } f'(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + 2026a_{2026} t^{2025} = 2026(t-1)^{2025}, \text{ 故 } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2026a_{2026} = f'(1) = 2026 \cdot (1-1)^{2025} = 0, \text{ D 正确. 故选 ABD.}$$

11. ABC 【解析】对 A: $P(B_1) = \frac{1}{3} \times$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}, \text{ 故 A}$$

正确;

$$\text{对 B: } P(A_1 | B_2) = \frac{P(A_1 B_2)}{P(B_2)} =$$

$$\frac{P(B_2 | A_1) \cdot P(A_1)}{P(B_2 | A_1) \cdot P(A_1) + P(B_2 | B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2 | C_1) \cdot P(C_1)} =$$

$$\frac{1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} =$$

$$\frac{4}{27} = \frac{12}{49}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对 C: 由题意可得 } P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1,$$

$$\text{则 } P(B_{n+1}) = P(A_n) \times 1 \times \frac{2}{3} + P(B_n) \times$$

$$\frac{5}{9} + P(C_n) \times \frac{2}{3} \times 1$$

$$= \frac{2}{3} P(A_n) + \frac{5}{9} P(B_n) + \frac{2}{3} P(C_n)$$

$$= \frac{2}{3} [P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)] - \frac{1}{9} P(B_n)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} P(B_n),$$

$$\text{由 } P(B_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} P(B_1) = \frac{49}{81},$$

$$\text{则 } P(B_3) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{49}{81} = \frac{437}{729},$$

$$P(B_4) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \times \frac{437}{729} = \frac{3937}{6561},$$

$$\text{则 } P(\overline{B_4}) = 1 - \frac{3937}{6561} = \frac{2624}{6561} < \frac{2624}{6560} =$$

$$\frac{2 \times 1312}{5 \times 1312} = \frac{2}{5}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对 D: } P(A_1 + B_2) = P(A_1) + P(B_2) -$$

$$P(A_1 B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{49}{81} - \frac{4}{81} = \frac{55}{81}, \text{ 故 D}$$

$$\text{正确. 故选 ABC.}$$

$$\text{12. -84 【解析】由二项式 } \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^n \text{ 的所有二项式系数之和等于 128, 得 } 2^n = 128, \text{ 即 } n = 7,$$

$$\text{所以 } \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7 \text{ 的通项为 } T_{r+1} = C_7^r \cdot$$

$$(2x^2)^{7-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r \cdot 2^{7-r} \cdot$$

$$C_7^r \cdot x^{14-3r}.$$

$$\text{令 } 14-3r = -1, \text{ 得 } r = 5.$$

$$\text{所以展开式中含 } \frac{1}{x} \text{ 项的系数是}$$

$$(-1)^5 \times 2^{7-5} \times C_7^5 = -4 \times 21 = -84.$$

$$\text{13. } \frac{65}{27} \text{ 【解析】} X \text{ 的所有可能取值为 1,}$$

$$2, 3, \text{ 总分配情况数为 } 3^4 = 81.$$

$$\text{当 } X=1 \text{ 时, 即 4 名学生全部分配到同一家医院, 有 } C_3^1 \text{ 种情况;}$$

$$\text{当 } X=2 \text{ 时, 先选 2 个医院, 有 } C_3^2 \text{ 种情况, 再把 4 人分配至这 2 个医院,}$$

排除全在其中 1 个医院的情况, 则有 $2^4 - 2$ 种情况;

当 $X=3$ 时, 即 3 个医院均有学生实习, 人数分配为 2, 1, 1: 选 1 个医院安排 2 名学生, 有 C_3^1 种情况, 再从 4 人中选 2 人分配至该医院, 有 C_4^2 种情况, 剩余 2 人分配至剩下 2 个医院, 有 2 种情况,

$$\text{所以 } P(X=1) = \frac{C_3^1}{81} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \cdot (2^4 - 2)}{81} = \frac{14}{27},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^2 \cdot 2}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9},$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{27} + 2 \times \frac{14}{27} + 3 \times \frac{4}{9} = \frac{65}{27}.$$

$$\text{14. } \frac{8}{9} \text{ 【解析】由题干数据, } \sum_{i=1}^{20} x_i =$$

$$60, \sum_{i=1}^{20} y_i = 1200 \text{ 可得 } \bar{x} = 3, \bar{y} = 60, \text{ 根据夹角公式的定义, } r = \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$$

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}, \text{ 而 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \text{ 根据 } \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{20} y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=1}^{20} \bar{x} \cdot \bar{y} =$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - 20 \bar{x} \cdot \bar{y} - 20 \bar{x} \cdot \bar{y} + 20 \bar{x} \cdot \bar{y} =$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i y_i - 20 \bar{x} \cdot \bar{y} = 4400 - 20 \times 3 \times$$

$$60 = 800, \text{ 于是 } r = \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$$

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{800}{900} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{15. 【解】(1) 第 1 步: 安排甲、乙 2 人, 有 } A_2^2 \text{ 种方法;}$$

$$\text{第 2 步: 安排余下的 4 人, 有 } A_4^4 \text{ 种方法. 所以共有 } A_2^2 A_4^4 = 48 \text{ 种方法.}$$

$$(2) \text{ 第 1 步: 先排余下的 3 人, 有 } A_3^3 \text{ 种方法;}$$

$$\text{第 2 步: 插空, 将甲、乙 2 位同学看成一个元素, 与丙分别插到 4 个空位中的 2 个空位, 有 } A_2^2 \text{ 种方法;}$$

$$\text{第 3 步: 将甲、乙 2 位同学内部再全排列, 有 } A_2^2 \text{ 种方法.}$$

$$\text{所以共有 } A_3^3 A_2^2 A_2^2 = 6 \times 12 \times 2 = 144 \text{ 种方法.}$$

$$(3) \text{ 第 1 步: 从 6 个位置中任取 3 个位置, 有 } C_6^3 \text{ 种方法,}$$

$$\text{第 2 步: 把甲、乙、丙这 3 人安排到这 3 个位置中去, 因为这 3 个人顺序一定, 所以只有 1 种方法;}$$

$$\text{第 3 步: 将剩下的 3 个人安排到剩下的 3 个位置, 共有 } A_3^3 \text{ 种方法.}$$

$$\text{所以共有 } C_6^3 A_3^3 = 20 \times 6 = 120 \text{ 种方法.}$$

- 16. 【解】**(1) 选条件①: 因为第 4 项和第 2 项的二项式系数之比为 12 : 1, 所以 $C_n^2 : C_n^4 = 12 : 1$, 即 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} : n = 12 : 1$, 即 $n^2 - 3n - 70 = 0$, 解得 $n = -7$ (舍去) 或 $n = 10$. 所以展开式中所有二项式系数的和为 $2^{10} = 1\,024$. 选条件②: 因为只有第 6 项的二项式系数最大, 所以 n 为偶数, 且 $\frac{n}{2} = 5$, 解得 $n = 10$. 所以展开式中所有二项式系数的和为 $2^{10} = 1\,024$. 选条件③: 因为其前三项的二项式系数的和等于 56, 所以 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 56$, 即 $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 56$, 即 $n^2 + n - 110 = 0$, 解得 $n = -11$ (舍去) 或 $n = 10$. 所以展开式中所有二项式系数的和为 $2^{10} = 1\,024$.

(2) 由 (1) 知, 二项式为 $\left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, 其通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r (2x^2)^{10-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r =$

$C_{10}^r \cdot 2^{10-r} \cdot x^{20-\frac{5}{2}r}$, $r=0, 1, 2, \dots, 10$, 可知第 $r+1$ 项的系数为 $C_{10}^r \cdot 2^{10-r}$, 令 $\begin{cases} C_{10}^r \cdot 2^{10-r} \geq C_{10}^{r+1} \cdot 2^{9-r}, \\ C_{10}^r \cdot 2^{10-r} \geq C_{10}^{r-1} \cdot 2^{11-r}, \end{cases}$ 解得 $\frac{8}{3} \leq r \leq \frac{11}{3}$, 又 $r \in \mathbf{N}$, 则 $r = 3$,

所以第 4 项的系数最大, 最大项为 $T_4 = C_{10}^3 \cdot 2^7 \cdot x^{\frac{25}{2}} = 15\,360x^{\frac{25}{2}}$.

- 17. 【解】**(1) 由题意得, $\bar{x} = \frac{0.3+0.5+1.0+1.3+1.5+2.0}{6} = \frac{6.6}{6} = 1.1$, $\bar{y} = \frac{6.4+6.6+6.8+7.0+7.2+8}{6} = \frac{42}{6} = 7$, 则 $\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6\bar{x}\bar{y} = 47.92 - 6 \times 1.1 \times 7 = 47.92 - 46.2 = 1.72$, $\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2 = 9.28 - 6 \times 1.1^2 = 2.02$, $\sum_{i=1}^6 y_i^2 - 6\bar{y}^2 = 295.60 - 6 \times 7^2 = 295.60 - 6 \times 49 = 295.60 - 294 = 1.6$, 则 $r = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^6 y_i^2 - 6\bar{y}^2}} = \frac{1.72}{\sqrt{2.02 \times 1.6}} = \frac{1.72}{\sqrt{3.232}} \approx \frac{1.72}{1.80} \approx$

0.96, 因为 $|r| \in [0.75, 1]$, 所以日均运动时长 x 与睡眠质量评分 y 有较强的线性相关关系. (2) 已知在运动达标的学生中, 睡眠一般的人数占 $\frac{1}{4}$,

设运动达标的总人数为 n_1 , 则 $\frac{8}{n_1} = \frac{1}{4}$, 解得 $n_1 = 32$,

由此可得, 运动达标且睡眠良好的人数为 $32 - 8 = 24$,

运动不达标的总人数为 $50 - 32 = 18$, 运动不达标且睡眠一般的人数为 $18 - 6 = 12$,

则列联表如下:

	睡眠良好	睡眠一般	合计
运动达标	24	8	32
运动不达标	6	12	18
合计	30	20	50

零假设为 H_0 : 日均运动时长与睡眠质量无关,

$$\chi^2 = \frac{50 \times (24 \times 12 - 8 \times 6)^2}{32 \times 18 \times 30 \times 20} \approx 8.333 > 7.879,$$

依据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立,

即认为日均运动时长与睡眠质量有关, 该推断犯错误的概率不超过 0.005.

- 18. 【解】**(1) 样本相关系数的绝对值越大, 相关性越强, 因此相关性从强到弱的排序为②①③.

(2) 由题意得, Y 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$P(Y=0) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}, P(Y=1) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} =$$

$$\frac{4}{7}, P(Y=2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7},$$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} =$$

$$\frac{8}{7}, E(Y^2) = 0^2 \times \frac{1}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times$$

$$\frac{2}{7} = \frac{12}{7},$$

$$\text{所以 } D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{12}{7} -$$

黑板: 常用转化公式, 熟记可提升解题速度

$$\left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}.$$

(3) 由已知 $X \sim N(9, 0.2^2)$, $\mu = 9$, $\sigma = 0.2$, $\mu - 2\sigma = 8.6$,

$P(8.6 \leq X \leq 9.4) = 0.954\,5$, 则 $P(X <$

$$8.6) = \frac{1}{2} [1 - P(8.6 \leq X \leq 9.4)] =$$

$$\frac{1}{2} \times (1 - 0.954\,5) = 0.022\,75,$$

$$\text{所以 } P(X \geq 8.6) = 1 - P(X < 8.6) = 0.977\,25.$$

记“从生产的零件中随机取出 10 个, 至多有 1 个零件直径小于 8.6 nm”为事件 A ,

$$\text{则 } P(A) = 0.977\,25^{10} + C_{10}^1 \times 0.022\,75 \times 0.977\,25^9 \approx 0.979\,4.$$

- 19. (1) (i) 【解】** $P(X=4) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} =$

$$\frac{8}{81}, P(X>6) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}.$$

(ii) 【证明】方法一: 由题意知, $P(X>k)$ 即前 k 辆车都没有接单的的概率,

$$\text{所以 } P(X>k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

所以对任意的正整数 s, t , $P(X>s+t |$

$$X>s) = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{s+t}}{\left(\frac{2}{3}\right)^s} = \left(\frac{2}{3}\right)^t =$$

$$P(X>t).$$

方法二: 由题意知, $P(X=k) = \frac{1}{3} \times$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, P(X>k) = 1 - P(X \leq k) = 1 -$$

$$\frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \right] = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

所以对任意的正整数 s, t ,

$$P(X>s+t | X>s) = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} =$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{s+t}}{\left(\frac{2}{3}\right)^s} = \left(\frac{2}{3}\right)^t = P(X>t).$$

(2) 【解】由 (1) 知, $P(Y>4) = P(X-1>4 | X>1) = P(X>5 | X>1) = P(X>4)$.

悟: 由 $X=1+Y$, 再巧妙应用前面的结论, 简化过程

平台需要支付该用户的优惠券金额 ξ 的所有可能取值为 0, 3,

$$\text{则 } P(\xi=3) = P(Y>4) = P(X>4) =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81},$$

$$\text{所以 } E(\xi) = 3 \times \frac{16}{81} + 0 \times P(\xi=0) = \frac{16}{27},$$

即平台需要赠送的优惠券金额 ξ 的期望为 $\frac{16}{27}$ 元.