题型强化 · 多选

多选小卷

多选小卷 1

9. **ABC** 【解析】本题考查等差、等比数列的判断，等比数列基本量的计算.

由题意可知$\begin{cases}a_1+a_4=a_1+a_1q^3=a_1(1+q)(1-q+q^2)=18,\\a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=a_1q(1+q)=12,\end{cases}$

$\therefore \dfrac{1-q+q^2}{q}=\dfrac{3}{2}$，整理得 $2q^2-5q+2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac{1}{2}$，

$\because q>1,\therefore q=2$，**A 正确**；

由 A 的分析知 $a_1=2,\therefore a_n=2\times2^{n-1}=2^n,\therefore S_n+2=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}+2=2^{n+1}$，又 $S_n+2\neq0,\therefore \dfrac{S_{n+1}+2}{S_n+2}=2,\therefore$ 数列$\{S_n+2\}$是等比数列，**B 正确**；

$S_8=\dfrac{2\times(1-2^8)}{1-2}=2^9-2=512-2=510$，**C 正确**；

$\lg a_n=\lg 2^n=n\lg 2,\therefore \lg a_{n+1}-\lg a_n=(n+1)\lg 2-n\lg 2=\lg 2$，

$\therefore$ 数列$\{\lg a_n\}$是公差为 $\lg 2$ 的等差数列，**D 错误**.

10. **ABC** 卡住就看突破点 17 找思路、做练习

【解析】本题考查利用导数研究函数的最值和单调性.

对于 A，由 $h(x)=e^x-x$，得 $h'(x)=e^x-1$. 当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在$(-\infty,0)$上单调递减；当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $h(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，故 **A 正确**.

对于 B，由 $h(x)=h(-x)$，可得 $e^x-x=e^{-x}+x$，即 $e^x-e^{-x}=2x$，令 $\varphi(x)=e^x-e^{-x}-2x$，

则 $\varphi'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant0$ 且不恒为 0，故 $\varphi(x)$在 **R** 上单调递增（关键点），且 $\varphi(0)=0$，所以方程 $h(x)=h(-x)$ 有且仅有一个实根，故 **B 正确**.

对于 C，对任意 $a>0$，令 $m(x)=h(x+a)-h(x)=e^{x+a}-(x+a)-(e^x-x)=e^x(e^a-1)-a(x\in\mathbf{R})$，则 $m'(x)=e^x(e^a-1)>0$，所以 $m(x)$ 为增函数，即关于 x 的函数 $h(x+a)-h(x)$ 为增函数，故 **C 正确**.

对于 D，$h(x+1)-h(x)=e^x(e-1)-1$，当 $x\to-\infty$ 时，$e^x(e-1)-1\to-1$，故不可能对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $h(x+1)-h(x)>1$，故 **D 错误**. 故选 ABC.

11. **AD** 卡住就看突破点 11 找思路、做练习

【解析】本题考查空间动态问题.

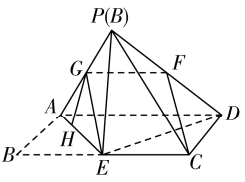
对于 A，易知 E 是 BC 中点，$BE=CE=2,CD=2,\angle DCE=\dfrac{\pi}{2}$，

在 Rt△ECD 中，$ED=\sqrt{EC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，同理 $AE=2\sqrt{2}$，又 $AD=4$，所以 $AE^2+ED^2=AD^2$，所以 $AE\perp ED$. 因为平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAE\cap$ 平面 $ABCD=AE$，$ED\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $DE\perp$ 平面 PAE，又 $PA\subset$ 平面 PAE，所以 $PA\perp DE$，故 **A 正确**.

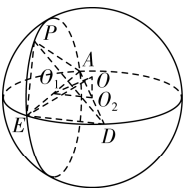
对于 B，梯形 $AECD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(2+4)\times2=6$，$AE=2\sqrt{2}$，在 Rt△$APE$ 中，斜边 AE 上的高 $h=\sqrt{2}$，当平面 $PAE\perp$ 平面 $AECD$ 时，四棱锥 $P-AECD$ 的体积最大，此时高为 $\sqrt{2}$，四棱锥 $P-AECD$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}\times6\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，故 **B 错误**.

对于 C，如图①，取 PA 的中点 G，连接 GF，FC，GE，则 $GF\parallel EC$，所以四边形 $ECFG$ 是平行四边形，所以点 F 的轨迹与点 G 的轨迹形状完全相同，过点 G 作 AE 的垂线，垂足为 H，$HG=\frac{1}{2}h=\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 G 的轨迹是以 H 为圆心，半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的半圆，从而 PD 的中点 F 形成的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，故 **C 错误**.

关键点



图①



图②

对于 D，如图②，△PAE 的外接圆 O_1 的半径为 $\sqrt{2}$，O_1 是线段 AE 的中点，△ADE 的外接圆 O_2 的半径为 2，O_2 为线段 AD 的中点，AE 是圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦，连接 O_1O_2，则 $O_1O_2=\frac{1}{2}ED=\sqrt{2}$，设三棱锥 $P-AED$ 的外接球球心为 O，半径为 R，连接 OO_1，OE，OO_2，则 $R=OE=\sqrt{O_1E^2+O_1O^2}=\sqrt{O_1E^2+O_1O_2^2+OO_2^2}=\sqrt{4+OO_2^2}$.

关键点

因为 $OO_2\geqslant0$，所以 $R\geqslant2$，所以 $R_{\min}=2$，所以三棱锥 $P-AED$ 的外接球表面积的最小值为 $4\pi\times2^2=16\pi$，故 **D 正确**. 故选 AD.

多选小卷 2

9. BC 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性和零点.

$f(x)=x(x-3)(x-a)$，则 $f'(x)=3x^2-2(a+3)x+3a$，因为函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0,0)$ 处的切线的斜率为 0，

所以 $f'(0)=3a=0$，解得 $a=0$，所以 $f(x)=x^2(x-3)$，则 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

对于 A，由 $f(x)=x^2(x-3)=0$，得 $x=0$ 或 $x=3$，**A 错误**；

对于 B，区间 $(a-2,a)$，即是 $(-2,0)$，因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上

单调递增，所以$f(x)$在区间$(a-2,a)$上单调递增，**B 正确**；

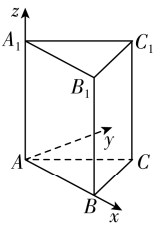
对于 C，当$x\in(0,1)$时，$x^2\in(0,1)$，$2x\in(0,2)$，$x^2-2x=x(x-2)<0$，则$x^2<2x$，所以$0<x^2<2x<2$，因为$f(x)$在$(0,2)$上单调递减，所以$f(x^2)>f(2x)$，**C 正确**；

对于 D，$f(x+4)-f(x)=(x+4)^2(x+4-3)-x^2(x-3)=12x^2+24x+16$，$\Delta=24^2-4\times12\times16=-192<0$，所以$12x^2+24x+16>0$恒成立，即$f(x+4)-f(x)>0$对所有$x\in\mathbf{R}$恒成立，**D 错误**. 故选 BC.

10. ACD　卡住就看突破点 11 找思路、做练习

【解析】本题考查空间向量的坐标运算.

在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，以A为坐标原点，AB，AA_1所在直线分别为x，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



由于$AB=AA_1=1$，则$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$A_1(0,0,1)$，$C_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，

由$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$，得$P$点坐标为$P\left(x+\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}y}{2},z\right)$，$x,y,z\in[0,1]$.

对于 A，当$x=y=z=\frac{1}{2}$时，代入得$P\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right)$，则$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9+3+4}{16}}=1$，故 **A 正确**；

对于 B，当$x+y+z=1$时，取特殊值$x=1$，$y=z=0$，满足$x+y+z=1$，此时$P(1,0,0)$，即点B，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}$，$AP$与$BB_1$相交于点$B$，不是异面直线，故 **B 错误**；

对于 C，$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，因为$BC\perp$平面$APA_1$，$AP\subset$平面$APA_1$，所以$BC\perp AP$，所以$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AP}$，则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{y}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}y}{2}=-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=0$，整理得$x=y$，故 **C 正确**；

对于 D，若点P在平面BA_1C_1内，则存在$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，使得$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA_1}+\mu\overrightarrow{BC_1}$，故$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BA_1}+\mu\overrightarrow{BC_1}$（$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$），又$\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，所以

$$\begin{cases}1-\lambda-\frac{1}{2}\mu=x+\frac{y}{2},\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\mu=\frac{\sqrt{3}}{2}y,\\ \lambda+\mu=z,\end{cases}$$ 整理得$$\begin{cases}x=1-\lambda-\mu,\\ y=\mu,\\ z=\lambda+\mu,\end{cases}$$ 所以$x+z=1$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

15 s 速解　北京大学——郑威

（特值法）对于 D，因为$AC/\!/A_1C_1$，$A_1C_1\subset$平面BA_1C_1，$AC\not\subset$平面BA_1C_1，所以$AC/\!/$平面BA_1C_1. 取$P'\in A_1B$且$P'P=y\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AP'}=x\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA_1}$，又$A_1$，$P'$，$B$三点共线，故$x+z=1$，故 **D 正确**.

11. AC　卡住就看突破点 13 找思路、做练习

【解析】本题考查抛物线的性质、直线与抛物线的位置关系.

对于 A，由 $F(1,0)$ 得 $\frac{p}{2}=1$，解得 $p=2$，**A 正确**.

对于 B，分析：从向量倍数关系得到 A,B 两点横、纵坐标的关系，再结合抛物线方程求出 A,B 两点坐标，算出直线的方向向量进行判断. 由 A 知抛物线方程为 $y^2=4x$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 得 $(1-x_1,-y_1)=2(x_2-1,y_2)$，即 $x_1=3-2x_2$，$y_1=-2y_2$. 将 $A(x_1,y_1)$ 代入抛物线方程，得 $4y_2^2=4(3-2x_2)$，结合 $y_2^2=4x_2$，解得 $x_2=\frac{1}{2}$，$y_2=\pm\sqrt{2}$，$x_1=2$，$y_1=\mp2\sqrt{2}$，直线 l 的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{3}{2},\pm3\sqrt{2}\right)$，与 $(1,2)$ 不共线，**B 错误**.

对于 C，分析：将直线方程和抛物线方程联立，得到一元二次方程根与系数关系，再由垂直条件转化为向量数量积为 0，求出直线 l 中的参数 t，确定直线过的定点.

易知直线 l 与 y 轴不垂直，不妨设直线 l 的方程为 $x=my+t$，联立 $\begin{cases}x=my+t,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4t=0$，$\Delta>0$，故 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4t$.

由 $OA\perp OB$ 得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 由 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$，$x_2=\frac{y_2^2}{4}$，得 $\frac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2=0$，代入 $y_1y_2=-4t$，得 $t^2-4t=0$，解得 $t=4$（$t=0$ 时直线过原点，舍去），故直线 l 过定点 $(4,0)$，**C 正确**.

对于 D，分析：利用弦长公式表示出 $|AB|$，把直线参数整理出来，再利用中点坐标公式写出 M 点横坐标，换元后构造函数，借助对勾函数单调性求出 M 点横坐标最小值即可得出结果. 由选项 C 的分析知 $|AB|=4\sqrt{1+m^2}\sqrt{m^2+t}=3$，故 $t=\frac{9}{16(1+m^2)}-m^2$. $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=2m^2+t=m^2+\frac{9}{16(1+m^2)}$，令 $u=1+m^2\geqslant1$，则 $x_M=u-1+\frac{9}{16u}$. 设 $f(u)=u+\frac{9}{16u}-1$（$u\geqslant1$），根据对勾函数的性质可知，$f(u)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(u)_{\min}=f(1)=\frac{9}{16}$，即 M 到 y 轴距离的最小值为 $\frac{9}{16}$，**D 错误**. 故选 AC.

多选小卷 3

9. ABD　【解析】本题考查回归分析.

对于 A，由题干表格中的数据得，当平均气温 t 从 0 到 12 时，n 从 17 增加到 42，所以随着平均气温 t 的升高，凉茶的销售数量 n 总体呈上升趋势，所以 t 和 n 正相关，故 **A 正确**；

对于 B，$\bar{t}=\frac{3+0+5+7+9+12}{6}=6$，$\bar{n}=\frac{23+17+27+29+36+42}{6}=29$，即数据样本点的中心为 $(6,29)$，因为经验回归直线过样本点的中心，所以点 $(6,29)$ 在经验回归直线上，故 **B 正确**；

对于 C，因为平均气温 t 和销售数量 n 总体上正相关，所以 $\hat{b}>$

0，故 **C 错误**；

对于 D，由表格中的数据得 $\sum_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})(n_i-\bar{n})=(3-6)\times(23-29)+(0-6)\times(17-29)+(5-6)\times(27-29)+(7-6)\times(29-29)+(9-6)\times(36-29)+(12-6)\times(42-29)=18+72+2+0+21+78=191$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

10. BCD 卡住就看突破点 14 找思路、做练习

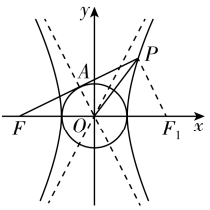
【解析】本题考查圆与双曲线的综合问题.

对于 B，由题意可知 $|OA|=a$，$|OF|=c$，$AF\perp OA$，可得 $|AF|=\sqrt{c^2-a^2}=b$，则直线 OA 的斜率 $k=\pm\frac{|AF|}{|OA|}=\pm\frac{b}{a}$，可知直线 OA 即为双曲线 C 的其中一条渐近线，所以点 A 在 C 的一条渐近线上，故 **B 正确**；

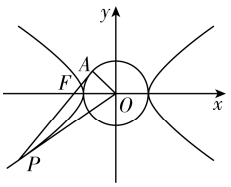
对于 A，若 $a=b$，则直线 l 的斜率为 $\mp\frac{a}{b}=\mp1$，且渐近线的斜率为 $\pm\frac{b}{a}=\pm1$，可知直线 l 与双曲线的一条渐近线平行，此时 l 与 C 有且仅有一个交点，故 **A 错误**；

对于 C，如图①，设双曲线的另一个焦点为 F_1，连接 PF_1，若 $|FA|=|AP|$，则点 A 为 FP 的中点，又 O 为 FF_1 的中点，则 $|PF_1|=2|OA|=2a$，$PF\perp PF_1$，可得 $|PF|=2a+|PF_1|=4a$，由勾股定理可得 $|PF_1|^2+|PF|^2=|FF_1|^2$，即 $4a^2+16a^2=4c^2$，可得 $\frac{c^2}{a^2}=5$，所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，故 **C 正确**；

对于 D，如图②，若 $\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{AF}$，则 $|FP|=3|AF|=3b$，$|AP|=|AF|+|FP|=4b$，所以 $S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}|AP|\cdot|OA|=\frac{1}{2}\times4b\times a=2ab$，故 **D 正确**. 故选 BCD.



图①



图②

11. ACD 卡住就看突破点 10 找思路、做练习

【解析】本题考查三角恒等变换的综合应用.

对于 A，因为 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，所以 $\sin(A+B)-\sin A\cos B=\cos A\sin B$，由于 A 为钝角，则 B 为锐角，故 $\cos A<0<\sin B$，因此 $\cos A\sin B<0$，即 $\sin(A+B)<\sin A\cos B$，故 **A 正确**.

对于 B，由 $B+C=\pi-A$，则 $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$，故 $\tan\frac{B+C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$，所以 $\tan\frac{B+C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ 为定值，故 **B 错误**.

对于 C，由 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan[\pi-(B+C)]+\tan B+\tan C$

$=-\tan(B+C)+\tan B+\tan C=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}+\tan B+\tan C$

$=(\tan B+\tan C)\left(1-\dfrac{1}{1-\tan B\tan C}\right)$

$=(\tan B+\tan C)\dfrac{\tan B\tan C}{\tan B\tan C-1}=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}\cdot\tan B\tan C$

$=-\tan(B+C)\tan B\tan C=\tan A\tan B\tan C$,

已知 A 为钝角，则 B,C 为锐角，故 $\tan A<0,\tan B>0,\tan C>0$，所以 $\tan A\tan B\tan C<0$，故 $\tan A+\tan B+\tan C<0$，故 **C 正确**.

对于 D，由 $2B+2C=2(\pi-A)$，则 $\cos(2B+2C)-\sin(2B+2C)=\cos(2\pi-2A)-\sin(2\pi-2A)=\cos 2A+\sin 2A$，

而 $\tan A=-2$ 且 A 为钝角，故 $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\cos A=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

所以$\cos 2A+\sin 2A=1-2\sin^2A+2\sin A\cos A=1-2\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+2\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=1-\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{7}{5}<0$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

多选小卷 4

9. AD 【解析】本题考查复数的运算及共轭复数.

对于 A，设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，可得 $z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$. 因为复数 z 满足 $z=1-\dfrac{1}{z}$，所以 $z^2=z-1$，即 $a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}-1$，可得 $\begin{cases}a^2-b^2=a-1,\\2ab=b.\end{cases}$ 由 $2ab=b$ 可得 $a=\dfrac{1}{2}$ 或 $b=0$，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；当 $b=0$ 时，方程 $a^2-a+1=0$ 无实数解. 当 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=1$；当 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=1$，故 **A 正确**.

对于 B，当 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$z^2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，又 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $z^2\neq\bar{z}$，故 **B 错误**.

对于 C，当 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $z+\bar{z}=1$，故 **C 错误**.

对于 D，当 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $z-\bar{z}=\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$|z-\bar{z}|=\sqrt{3}$；当 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$\bar{z}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $z-\bar{z}=-\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$|z-\bar{z}|=\sqrt{3}$，故 **D 正确**. 故选 AD.

15 s 速解　北京大学——郑威

对于 A，由 $z=1-\dfrac{1}{z}$，可得 $z^2-z+1=0$，设该方程的两个复数根分别为 $z_1=a+b\mathrm{i},z_2=a-b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\begin{cases}z_1+z_2=2a=1,\\z_1\cdot z_2=a^2+b^2=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 因此 $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=1$，故 **A 正确**.

对于 C，$z+\bar{z}=2a=1$，故 **C 错误**.

对于 D，$|z-\bar{z}|=|2b\mathrm{i}|=\sqrt{3}$，故 **D 正确**.

拓展结论　一元二次方程根的判别式小于 0 时根的情况

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，若判别式小于 0，则两根为 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,\mathrm{i}}{2a}$，且仍满足根与系数的关系 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$

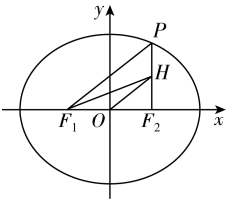
10. ACD　卡住就看突破点 14 找思路、做练习

【解析】本题考查椭圆概念的应用及焦点三角形.

对于 A，由三角形中位线性质得 $|OH|=\dfrac{1}{2}|PF_1|$，则 $|OH|+|HF_2|=\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)=\dfrac{1}{2}\times2a=a=2$，故 **A 正确**；

对于 B，当点 P 在第二、三象限时，$|PF_1|<2$，此时 $|OH|<1$，故 **B 错误**；

对于 C，设 $\angle F_1PF_2$ 为 θ，因为 $|OH|+|HF_2|+|OF_2|=3$，$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}=3\tan\dfrac{\theta}{2}$，



当点 P 在上顶点时，θ 最大，所以 $0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，所以 $0<\tan\dfrac{\theta}{2}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $0<S_{\triangle PF_1F_2}\leqslant\sqrt{3}$，所以由三角形相似可得 $0<S_{\triangle OHF_2}\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

设 $\triangle OHF_2$ 内切圆半径为 r，又 $S_{\triangle OHF_2}=\dfrac{1}{2}|OH|\cdot r+\dfrac{1}{2}|HF_2|\cdot r+\dfrac{1}{2}|OF_2|\cdot r=\dfrac{1}{2}r(|OH|+|HF_2|+|OF_2|)=\dfrac{3}{2}r$（提示：三角形内切圆问题常用的转化方法），

所以 $\triangle OHF_2$ 内切圆半径的最大值为 $\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{4}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，故 **C 正确**；

对于 D，设 $\triangle HF_1F_2$ 的外接圆半径为 R，则由正弦定理可得 $2R=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1HF_2}=\dfrac{2}{\sin\angle F_1HF_2}$，因为 $\sin\angle F_1HF_2$ 的最大值为 1，所以 R 的最小值为 1，故 **D 正确**. 故选 ACD.

11. ABC　卡住就看突破点 12 找思路、做练习

【解析】本题考查直线与圆的位置关系.

对于 A，依题意可知圆 C_1 为 $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$，圆 C_2 为 $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$，圆 C_3 为 $(x-3)^2+y^2=4$，这 3 个圆的半径均为 2，且 $|OC_1|=|OC_2|=|OC_3|=3$. 当 $r=4-\sqrt{10}$ 时，$|OC_1|>r+2$（关键点），则圆 O 与这 3 个圆都相离，所以 Ω 与圆 O 无公共点，故 **A 正确**；

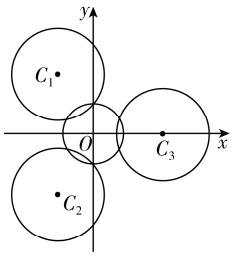
对于 B，如图①，当曲线 Ω 与圆 O 有 6 个公共点时，圆 O 与这 3 个圆都相交，则 $|r-2|<3<r+2$，解得 $1<r<5$，故 **B 正确**；

对于 C，设过原点的直线为直线 l，当 l 的斜率不存在时，直线 l 即为 y 轴，此时 l 与曲线 Ω 有公共点，当 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=k_1x$，若直线 l 与圆 C_1，C_2，C_3 都相交，则这 3 个圆的圆心到直线 l 的距离 $d_1=\dfrac{\left|-\frac{3}{2}k_1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1+k_1^2}}\leqslant2$，

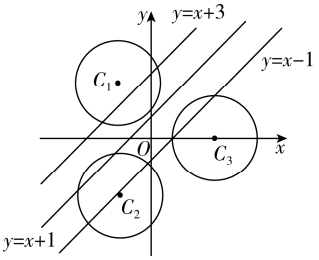
$d_2=\dfrac{\left|-\dfrac{3}{2}k_1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1+k_1^2}}\leqslant 2$，$d_3=\dfrac{|3k_1-0|}{\sqrt{1+k_1^2}}\leqslant 2$，分别解得 $k_1\leqslant\dfrac{9\sqrt{3}-8\sqrt{5}}{7}$ 或 $k_1\geqslant\dfrac{9\sqrt{3}+8\sqrt{5}}{7}$，$k_1\leqslant\dfrac{-9\sqrt{3}-8\sqrt{5}}{7}$ 或 $k_1\geqslant\dfrac{-9\sqrt{3}+8\sqrt{5}}{7}$，$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\leqslant k_1\leqslant\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $k_1\in\mathbf{R}$，则直线 l 与曲线 Ω 恒有公共点，

综上，不存在过原点且与曲线 Ω 无公共点的直线，故 **C 正确**；

对于 D，与直线 $y=x+1$ 平行且距离为 $\sqrt{2}$ 的直线方程为 $y=x-1$ 和 $y=x+3$，记直线 $y=x-1$ 为 l_1，直线 $y=x+3$ 为 l_2，则 $C_1\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 到直线 l_1 的距离为 $\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}>2$，到直线 l_2 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}}<2$，$C_2\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 到直线 l_1 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{2}}<2$，到直线 l_2 的距离为 $\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}>2$，$C_3(3,0)$ 到直线 l_1 的距离为 $\sqrt{2}<2$，到直线 l_2 的距离为 $3\sqrt{2}>2$，所以直线 l_1，l_2 与曲线 Ω 共有 6 个公共点，即曲线 Ω 上有 6 个点到直线 $y=x+1$ 的距离为 $\sqrt{2}$，如图②，故 **D 错误**. 故选 ABC.



图①



图②

多选小卷 5

9. ACD 【解析】本题考查正弦型函数的图象与性质、导数的几何意义.

由题意，将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象对应的函数解析式为 $y=\sin\left[\omega\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{12}\omega+\dfrac{\pi}{3}\right)$，若其为偶函数，则 $\dfrac{\pi}{12}\omega+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=12k+2$，$k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $\omega>0$，所以 ω 的最小值为 2，此时 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

对于 A，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 **A 正确**；

对于 B，函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，故 **B 错误**；

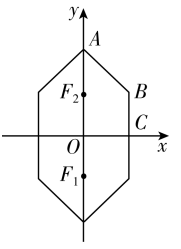
对于 C，当 $x\in\left[-\dfrac{5\pi}{12},0\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right]$，又 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{5\pi}{12},0\right]$ 上单调递增，故 **C 正确**；

对于 D，$f'(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$f'(0)=2\times\dfrac{1}{2}=1$，所以函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线斜率为 1，故 **D 正确**. 故选 ACD.

10. BCD 卡住就看突破点 15 找思路、做练习

【解析】本题考查新定义曲线.

设点 P 的坐标为 (x,y)，则 P,F_1 两点的“曼哈顿距离”$d_1=|x|+|y+c|$，P,F_2 两点的“曼哈顿距离”$d_2=|x|+|y-c|$，则 $d_1+d_2=2|x|+|y+c|+|y-c|$，易得“曼哈顿椭圆”关于坐标原点 $(0,0)$ 及坐标轴对称，可以先研究第一象限及 x 轴和 y 轴非负半轴上点的轨迹，即 $d_1+d_2=\begin{cases}2x+2y,x\geqslant 0,y\geqslant c,\\2x+2c,x\geqslant 0,0\leqslant y<c,\end{cases}$ 作曲线 $\begin{cases}2x+2y=2a,x\geqslant 0,y\geqslant c,\\2x+2c=2a,x\geqslant 0,0\leqslant y<c,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=a,x\geqslant 0,y\geqslant c,\\x+c=a,x\geqslant 0,0\leqslant y<c,\end{cases}$ 根据对称性，可作出如图所示的“曼哈顿椭圆”，则 $A(0,a)$，$C(a-c,0)$，$B(a-c,c)$.



对于 A，B，当点 P 与 C 重合时，$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{c^2+(a-c)^2}+2c\neq 2a+2c$，此时 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，最大值为 $\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|OC|=c(a-c)$，故 **A 错误，B 正确**；

对于 C，梯形 $OABC$ 的面积为 $\frac{|AO|+|BC|}{2}\times|OC|=\frac{a^2-c^2}{2}$，所以该“曼哈顿椭圆”的面积为 $2(a^2-c^2)$，故 **C 正确**；

对于 D，$|AB|+|BC|=\sqrt{2}(a-c)+c=\sqrt{2}a+(1-\sqrt{2})c$，所以该“曼哈顿椭圆”的周长为 $4[\sqrt{2}a+(1-\sqrt{2})c]=4\sqrt{2}a+(4-4\sqrt{2})c$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

11. BCD　卡住就看突破点 16 找思路、做练习

【解析】本题考查三次函数图象的对称性、极值点、零点.

对于 A，当 $a=1$ 时，$f(x)=x^3+bx^2+cx+1$，函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(1,\frac{2}{3}\right)$，则 $f(x+1)+f(1-x)=\frac{4}{3}$，即 $(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+1+(1-x)^3+b(1-x)^2+c(1-x)+1=\frac{4}{3}$，即 $(2b+6)x^2+2b+2c+\frac{8}{3}=0$ 恒成立，则 $\begin{cases}2b+6=0,\\2b+2c+\frac{8}{3}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\c=\frac{5}{3}\end{cases}$（快解：$f(x)=x^3+bx^2+cx+1$，若函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(1,\frac{2}{3}\right)$，则 $\begin{cases}-\frac{b}{3\times 1}=1,\\f(1)=1+b+c+1=\frac{2}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\c=\frac{5}{3}\end{cases}$），即 $f(x)=x^3-3x^2+\frac{5}{3}x+1$，故 $f(-1)=-1-3-\frac{5}{3}+1=-\frac{14}{3}$，故 **A 错误**.

对于 B，当 $b=0$ 时，$f(x)=ax^3+cx+1$，$f(x)+f(-x)=ax^3+cx+1+a\cdot(-x)^3+c\cdot(-x)+1=2$，故函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称（快解：三次函数 $f(x)$ 图象的对称中心的横坐标 $x=-\frac{0}{3a}=0$，纵坐标 $y=f(0)=1$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称），故 **B 正确**.

对于 C，当 $a=1$ 时，$f(x)=x^3+bx^2+cx+1$，令 $f'(x)=3x^2+2bx+c=0$，则 $\Delta=4b^2-12c>0$，$x_1+x_2=-\frac{2b}{3}$，$x_1x_2=\frac{c}{3}$，由 $x_2=2x_1$，且 $x_1<x_2$，得 $0<x_1<x_2$，故 $x_1+x_2=-\frac{2b}{3}>0$，$x_1x_2=\frac{c}{3}>0$，即有 $b<0$，

$c>0$，且 $3x_1=-\frac{2b}{3}$，$2x_1^2=\frac{c}{3}$，故 $x_1=-\frac{2b}{9}$，$x_1=\sqrt{\frac{c}{6}}$，即有 $-\frac{2b}{9}=\sqrt{\frac{c}{6}}$，则 $27c=8b^2$，故 **C 正确**.

对于 D，当 $b=1$ 时，$f(x)=ax^3+x^2+cx+1$，设三个零点分别为 $m-t$，m，$m+t$，$t\neq 0$，则 $ax^3+x^2+cx+1=a(x-m+t)(x-m)(x-m-t)$，即 $ax^3+x^2+cx+1=ax^3-3max^2+(3m^2-t^2)ax-ma(m^2-t^2)$，则 $\begin{cases}1=-3ma,\\ c=(3m^2-t^2)a,\\ 1=-ma(m^2-t^2),\end{cases}$ 由 $1=-3ma$ 得 $m=-\frac{1}{3a}$，则由 $1=-ma(m^2-t^2)$ 可得 $t^2=\frac{1}{9a^2}-3>0$，故 $-\frac{\sqrt{3}}{9}<a<\frac{\sqrt{3}}{9}$，又 $a>0$，故实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

拓展延伸　对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，若其对应的方程 $f(x)=0$ 有三个根，分别为 x_1，x_2，x_3，则 $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，将右侧展开并与左侧系数对应，可得 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a},\\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.\end{cases}$

多选小卷 6

9. ABD　【解析】本题考查古典概型求概率.

对于 A，甲同学选 A 这道菜的概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，故 **A 正确**；

对于 B，由 A 选项得甲选了 A 且乙不选 B 的概率为 $\frac{3}{5}\times\frac{C_4^3}{C_5^3}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$，故 **B 正确**；

对于 C，甲、乙两人所选的菜完全相同的概率为 $\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，故 **C 错误**；

对于 D，甲、乙两人选的菜恰有一道相同的概率为 $\frac{C_5^1C_4^2}{C_5^3\times C_5^3}=\frac{3}{10}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

10. ABC　卡住就看突破点 17 找思路、做练习

【解析】本题考查函数的零点、极值、单调性.

选项 A，令 $f(x)=0$，即 $(x^2-x)\ln x=0$，因为 $x>0$，所以 $x-1=0$ 或 $\ln x=0$，解得 $x=1$，所以 $f(x)$ 的零点只有 $x=1$，**A 正确**.

选项 B，$f'(x)=(2x-1)\ln x+x-1$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=2\ln x+3-\frac{1}{x}$，$g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'\left(\frac{1}{e}\right)=1-e<0$，$g'(1)=2>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上先减后增. 当 $x\to 0^+$ 时，$f'(x)\to+\infty$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}<0$，$f'(1)=0$，$f'(2)=3\ln 2+1>0$，由零点存在定理，$f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上有一个零点 x_0，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上有一个零点 $x=1$，因此 $f(x)$ 有两个极值点，**B 正确**.

选项 C，由 B 选项分析可知，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in$

$(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，即$f(x)$在$x=1$处取得极小值，**C 正确**.

选项 D，由选项 C 分析可知，$f(x)$在$(0,1)$上先增后减，**D 错误**. 故选 ABC.

11. ACD 卡住就看突破点 12 找思路、做练习

【解析】本题考查圆的方程，点到直线距离，非常规表达式化简求最值.

分析：含有平方和、绝对值的代数式求最值问题，往往需要结合圆的方程、点到直线距离公式等转化为求距离的最值问题，利用几何性质求解.

方程$x^2+y^2=4$表示圆心为$O(0,0)$，半径$r=2$的圆.

对于 A，$\sqrt{(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$表示圆上一点$(x,y)$到点$A\left(2,\frac{3}{2}\right)$的距离，$|AO|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$，所以$\sqrt{(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$的最小值是$|AO|-r=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$，故 **A 正确**；

关键点

对于 B，圆上一点(x,y)到直线$3x+4y-12=0$的距离为$d=\frac{|3x+4y-12|}{5}$，$|3x+4y-12|=5d$，所以求$|3x+4y-12|$的最小值，即求$d_{\min}$，$d_{\min}$即为$O(0,0)$到直线$3x+4y-12=0$的距离减半径长，所以$O(0,0)$到直线$3x+4y-12=0$的距离$d_1=\frac{|-12|}{5}=\frac{12}{5}$，所以$d_{\min}=d_1-r=\frac{12}{5}-2=\frac{2}{5}$，所以$|3x+4y-12|$的最小值为$5d_{\min}=2$，故 **B 错误**；

关键点

对于 C，因为$x^2+y^2=4$，所以$\sqrt{5-2x}+\sqrt{13-6y}=\sqrt{x^2+y^2+1-2x}+\sqrt{x^2+y^2+9-6y}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$，表示圆上一点$P(x,y)$到点$B(1,0)$，$C(0,3)$距离之和，所以$|PC|+|PB|\geqslant|CB|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，当$P$，$C$，$B$三点共线且点$P$在$C$，$B$之间时取等号，故$\sqrt{5-2x}+\sqrt{13-6y}$的最小值是$\sqrt{10}$，故 **C 正确**；

关键点

对于 D，因为$x^2+y^2=4$，所以$2\sqrt{13-6y}-\sqrt{20-8x}=2\sqrt{x^2+y^2+9-6y}-\sqrt{4(x^2+y^2)+4-8x}=2\sqrt{x^2+y^2+9-6y}-2\sqrt{x^2+y^2+1-2x}=2\left[\sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right]$，表示圆上一点$Q(x,y)$到点$C(0,3)$，$B(1,0)$距离之差的 2 倍，所以$2(|QC|-|QB|)\leqslant2|BC|=2\sqrt{1^2+3^2}=2\sqrt{10}$，当$Q$，$C$，$B$三点共线且点$B$在$C$，$Q$之间时取等号，故$2\sqrt{13-6y}-\sqrt{20-8x}$的最大值是$2\sqrt{10}$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

关键点

多选重难突破

突破点 10　解三角形问题（抓边角关系/用恒等变换）

1. ACD 【解析】对于 A，分析：根据等比中项、等差中项得出边角关系，再进行化简. 由a，b，c成等比数列得，$b^2=ac$，由$\sin C$，$\sin A$，$\sin(B-A)$成等差数列得，$2\sin A=\sin C+\sin(B-A)=\sin(A+B)+\sin(B-A)=\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin B\cos A-\cos B\sin A=2\sin B\cos A$（另解：由和差化积公式得$\sin(A+B)+\sin(B-A)=2\sin\frac{(A+B)+(B-A)}{2}\cos\frac{(A+B)-(B-A)}{2}=$

$2\sin B\cos A$），所以 $\sin A=\sin B\cos A$，由正弦定理得，$a=b\cos A$，故 **A 正确**；

对于 C，分析：已知 $b^2=ac$，$a=b\cos A$，有二次项和余弦值，因此使用余弦定理进行化简. 由 A 选项知 $a=b\cos A$，则由余弦定理得 $a=b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$，则 $2ac=b^2+c^2-a^2$，又 $b^2=ac$，所以 $2b^2=b^2+c^2-a^2$，得 $b^2+a^2=c^2$，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，故 **C 正确**；

对于 B，分析：由 C 选项分析可知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，那么 $a=b$ 的条件是 $A=B=\dfrac{\pi}{4}$，根据已知边角关系化简求值.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{a}{c}$，由 $b^2+a^2=c^2$ 可得 $ac+a^2=c^2$，得 $\dfrac{a}{c}+\dfrac{a^2}{c^2}=1$，即 $\sin A+\sin^2A=1$，解得 $\sin A=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\sin A=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$（舍），显然 $A\neq\dfrac{\pi}{4}$，所以 $a\neq b$，故 **B 错误**；

对于 D，分析：要求 B 的正弦值的平方，利用直角三角形中角度关系及 A 的正弦值的平方求解. $\sin^2B=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\cos^2A=1-\sin^2A=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

2. **ABD**　【解析】设点 A 到直线 BC 的距离为 h，则 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}BD\times h}{\frac{1}{2}CD\times h}=\dfrac{BD}{CD}=2$，**A 选项正确**.

在 $\triangle ACD$ 中，$\angle DAC=45°$，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}$，可得 $AC=\dfrac{CD\sin\angle ADC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{\sin\angle ADC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\sin\angle ADC$.

在 $\triangle BAD$ 中，$\angle BAD=90°$，则 $AB=BD\cdot\sin\angle BDA=2\sin\angle BDA$.

因为 $\angle BDA+\angle ADC=180°$，所以 $\sin\angle BDA=\sin\angle ADC$，故 $AB=\sqrt{2}AC$，**B 选项正确**.

因为 $\angle BAC=135°$，所以 $B+C=45°$，所以 $\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=1$，所以 $\tan B+\tan C=1-\tan B\tan C<1$，**C 选项错误**.

在 $\triangle ABC$ 中，$BC=3$，$\angle BAC=135°$，由余弦定理得 $9=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=5AC^2$，所以 $AC=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}AC^2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9}{10}$，**D 选项正确**.

故选 ABD.

3. **ABD**　【解析】对于 A，由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=1$，得 $bc\sin A=2$，由 $\dfrac{\cos B\cos C}{bc}=\dfrac{1}{5}$，得 $5\cos B\cos C=bc$，所以 $5\sin A\cos B\cos C=bc\sin A=2$，故 **A 正确**.

对于 D，由 $\dfrac{\sin A}{bc}+\dfrac{\sin B}{ac}+\dfrac{\sin C}{ab}=1$，得 $a\sin A+b\sin B+c\sin C=abc$，由正弦定理可得 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=bc\sin A=2$，则 $\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{1-\cos 2B}{2}+\sin^2C=2$（提示：$\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$），$1-\cos 2A+1-\cos 2B+2(1-\cos^2C)=4$，得 $\cos 2A+\cos 2B+2\cos^2C=$

0，则$\cos[(A+B)+(A-B)]+\cos[(A+B)-(A-B)]+2\cos^2 C=0$，可得$2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C=0$，从而有$2\cos(\pi-C)\cdot\cos(A-B)+2\cos^2 C=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C=0$，即$2\cos C\cdot[\cos C-\cos(A-B)]=0$.

关键点

因为$\dfrac{\cos B\cos C}{bc}=\dfrac{1}{5}\neq 0$，所以$\cos C\neq 0$，$\cos B\neq 0$，则$\cos C=\cos(A-B)$，所以$C=A-B$或$C=B-A$. 当$C=B-A$时，$B=A+C$，即$B=\dfrac{\pi}{2}$(舍)(提示：此时$\cos B=0$不符合题目条件). 当$C=A-B$时，$A=B+C$，即$A=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\sin A=1$，$bc=2$，故**D 正确**.

对于B，由D选项可知$A=\dfrac{\pi}{2}$，在Rt$\triangle ABC$中，$\cos B\cos C=\dfrac{c}{a}\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{bc}{a^2}$，则$\dfrac{\cos B\cos C}{bc}=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{5}$，所以$a^2=5$，故**B 正确**.

对于C，由$b^2+c^2=5$，$bc=2$得$b+c=\sqrt{b^2+c^2+2bc}=3$，故**C 错误**. 故选ABD.

知识拓展　三角函数和差化积公式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

4. **ACD**　【解析】对于A，分析：题目所给为分式，则通分进行化简. 因为$\dfrac{\cos C}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{2a}{b}$，所以$\dfrac{\cos C\sin B+\sin C\cos B}{\cos B\sin B}=\dfrac{\sin(B+C)}{\cos B\sin B}=\dfrac{\sin A}{\cos B\sin B}=\dfrac{2a}{b}=\dfrac{2\sin A}{\sin B}$，因为$A,B\in(0,\pi)$，所以$\sin A>0$，$\sin B>0$，可得$\cos B=\dfrac{1}{2}$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$，故**A 正确**；

对于B，分析：要求中线长的最值，则考虑使用向量，将$\overrightarrow{BD}$用$\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$来表示，从而结合已知条件利用基本不等式求最值. 设R为$\triangle ABC$外接圆的半径，则$\sin A\sin C=\dfrac{a}{2R}\times\dfrac{c}{2R}=\dfrac{9}{2b^2}=\dfrac{9}{2(2R\sin B)^2}=\dfrac{9}{2\times(2R)^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$，化简得$ac=6$，因为$D$是边$AC$的中点，所以$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，且$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos\angle ABC=\dfrac{1}{2}ac=3$，可得$|\overrightarrow{BD}|^2=\dfrac{(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2}{4}=\dfrac{a^2+c^2+ac}{4}\geqslant\dfrac{3ac}{4}=\dfrac{9}{2}$，当且仅当$a=c=\sqrt{6}$时取等号，所以$|\overrightarrow{BD}|\geqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故**B 错误**；

对于C，分析：已知B的大小，结合三角形内角和关系进行消元，从而分析单个角的三角函数的最值. 因为$\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\dfrac{1}{2}-\cos(A+B)=\cos A-\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}=\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，令$f(A)=\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，因为$0<A<\dfrac{2\pi}{3}$，所以$\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以$f(A)_{\max}=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，故**C 正确**；

对于 D，分析：根据向量数量积的几何意义结合三角形外心性质列方程组求解. 因为 $ac=6,c=2$，则 $a=3$，又 $\overrightarrow{BO}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，所以

$$\begin{cases}\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{BA}^2+\mu\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos\angle ABO=|\overrightarrow{BA}|\cdot\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|=2,\\ \overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\angle CBO=|\overrightarrow{BC}|\cdot\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=\dfrac{9}{2},\end{cases}$$

关键点

即 $\begin{cases}4\lambda+3\mu=2,\\ 3\lambda+9\mu=\dfrac{9}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{6},\\ \mu=\dfrac{4}{9},\end{cases}$ 故 **D 正确**. 故选 ACD.

5. BCD 【解析】对于 A，由 $ab(\sin A+\sin B)=3S$，得 $ab(\sin A+\sin B)=3\times\dfrac{1}{2}ab\sin C$，即 $\sin A+\sin B=\dfrac{3}{2}\sin C$①，则由正弦定理，得 $a+b=\dfrac{3}{2}c<2c$，故 **A 错误**；

对于 B，由 $\sin 2A\sin B+\sin A\sin 2B+2\sin^2C=2(\sin^2A+\sin^2B)$，得 $2\sin A\sin B\cos A+2\sin A\sin B\cos B+2\sin^2C=2(\sin^2A+\sin^2B)$，则由正弦定理，得 $ab\cos A+ab\cos B+c^2=a^2+b^2$，即 $ab\cos A+ab\cos B=a^2+b^2-c^2$，由余弦定理，得 $ab\cos A+ab\cos B=2ab\cos C$，即 $\cos A+\cos B=2\cos C$②，①×②，得 $\sin A\cos A+\sin B\cos A+\sin A\cos B+\sin B\cos B=3\sin C\cos C$，即 $\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin(A+B)=\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C=3\sin C\cos C$，$\sin A\cos A+\sin B\cos B-\sin C=2\sin C\cos C+\sin C\cos C-\sin C=(\cos C-1)\sin C+2\sin C\cos C$（提示：拆分出 $2\sin C\cos C$ 为后面与 $2c\cos C$ 比较大小做准备），因为 $0<C<\pi$，所以 $\cos C<1$，所以 $\cos C-1<0$，所以 $(\cos C-1)\sin C<0$，所以 $\sin A\cos A+\sin B\cos B<2\sin C\cos C$，则由正弦定理，得 $a\cos A+b\cos B<2c\cos C$，故 **B 正确**；

关键点

对于 C，由 A 选项得 $a+b=\dfrac{3}{2}c$，可设 $a=kc(k>0)$，$b=tc(t>0)$，则 $k+t=\dfrac{3}{2}$，由 B 选项分析知 $\cos A+\cos B=2\cos C$，则 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即 $\dfrac{t^2c^2+c^2-k^2c^2}{2tc^2}+\dfrac{k^2c^2+c^2-t^2c^2}{2kc^2}=2\times\dfrac{k^2c^2+t^2c^2-c^2}{2ktc^2}$，所以 $(k^3+t^3)-kt(k+t)-(k+t)+2(k^2+t^2)-2=0$，所以 $(k+t)\cdot[(k+t)^2-3kt]-kt(k+t)-(k+t)+2[(k+t)^2-2kt]-2=0$（提示：利用立方和公式 $a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$），所以 $kt=\dfrac{7}{16}$，所以 $\dfrac{ab}{c^2}=kt=\dfrac{7}{16}$，故 **C 正确**；

对于 D，由 C 选项知 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{k^2c^2+t^2c^2-c^2}{2ktc^2}=\dfrac{k^2+t^2-1}{2kt}=\dfrac{(k+t)^2-2kt-1}{2kt}=\dfrac{\frac{9}{4}-\frac{7}{8}-1}{\frac{7}{8}}=\dfrac{3}{7}$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\dfrac{9}{49}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$，所以 $\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

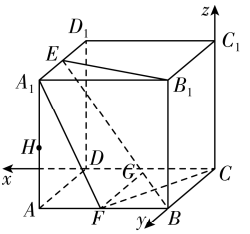
突破点 11　空间动态问题（几何法/建系法）

1. ABD 【解析】以 C 为坐标原点，分别以 CD,CB,CC_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.

对于 A，因为 $AA_1\parallel BB_1$，$AA_1\not\subset$ 平面 BB_1E，$BB_1\subset$ 平面 BB_1E，所以 $AA_1\parallel$ 平面 BB_1E，所以 AA_1 上任意一点到平面 BB_1E 的距离等于点 A 到平面 BB_1E 的距离，又 $\triangle BB_1E$ 的面积为定

关键点

值，所以三棱锥 $H-BB_1E$ 的体积为定值，故 **A 正确**；



对于 B，已知 E,F 分别是棱 A_1D_1，AB 的中点，所以 $F(2,4,0)$，$B(0,4,0)$，$E(4,2,4)$，$C(0,0,0)$，所以 $\overrightarrow{CF}=(2,4,0)$，$\overrightarrow{BE}=(4,-2,4)$，所以 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=0$，所以 $CF\perp BE$，故 **B 正确**；

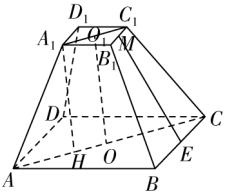
对于 C，分析：几何法不易直接判定的线面位置关系，可用建系法转化为直线的方向向量与平面法向量位置关系的判定.

因为 $B_1(0,4,4)$，所以 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{B_1E}=(4,-2,0)$，设平面 BB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{B_1E}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4z=0,\\ 4x-2y=0,\end{cases}$ 所以平面 BB_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,0)$，又点 $A_1(4,4,4)$，所以 $\overrightarrow{A_1F}=(-2,0,-4)$，则 $\overrightarrow{A_1F}\cdot\boldsymbol{n}=-2$，即 $\overrightarrow{A_1F}$ 与平面 BB_1E 的法向量不垂直，所以 A_1F 与平面 BB_1E 不平行，故 **C 错误**；

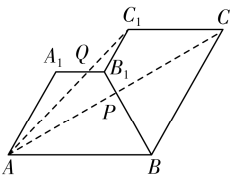
对于 D，过点 F 作 $FG\perp BE$ 于点 G，$\overrightarrow{BF}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(4,-2,4)$，所以 $\cos\angle FBE=\dfrac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{2}{3}$，得 $\sin\angle FBE=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $FG=BF\sin\angle FBG=2\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

2. ABD 【解析】对于 A，由题可知，四边形 $ABCD$，$A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，所以 $S_{正方形ABCD}=36$，$S_{正方形A_1B_1C_1D_1}=4$，如图①，分别取 BC,B_1C_1 的中点 E,M，连接 ME，则 ME 为侧面等腰梯形 BCC_1B_1 的高，$ME=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，所以侧面 BCC_1B_1 的面积为 $(2+6)\times2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=8\sqrt{3}$，故正四棱台的表面积为 $36+4+8\sqrt{3}\times4=40+32\sqrt{3}$，故 **A 正确**.

对于 B，如图①，连接 AC,A_1C_1，设 AC,A_1C_1 的中点分别为 O,O_1，连接 OO_1，过点 A_1 作 $A_1H\perp AC$，则正四棱台的高为 OO_1，$A_1O_1=\sqrt{2}$，$AO=3\sqrt{2}$，则 $AH=2\sqrt{2}$，在梯形 A_1O_1OA 中，$OO_1=A_1H=\sqrt{16-8}=2\sqrt{2}$，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times(4+36+\sqrt{4\times36})=\dfrac{104\sqrt{2}}{3}$，故 **B 正确**.



图①



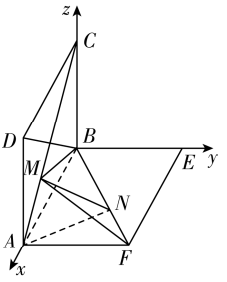
图②

对于 C，将侧面 ABB_1A_1，BCC_1B_1 展开且使两个侧面处于同一平面，连接 AC_1 与 A_1B_1 交于点 Q，如图②所示，易知 $\angle A_1=\angle A_1B_1C_1=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\triangle AA_1Q\backsim\triangle C_1B_1Q$，所以 $A_1Q=\dfrac{2}{3}A_1B_1=\dfrac{4}{3}$，由余弦定理得 $\cos A_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2-AQ^2}{2\times4\times\frac{4}{3}}$，解得 $AQ=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$，则 $C_1Q=\dfrac{1}{2}AQ=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$，所以 $AC_1=AQ+QC_1=2\sqrt{13}$，因为 P 为棱 BB_1 上的动点（含端点），所以点 A,P,C_1 不能共线，所以 $AP+PC_1>AC_1=2\sqrt{13}$，故 **C 错误**.

对于 D，如图②，连接 AC，与 BB_1 交于点 P，当 A,P,C 三点共线时，$AP+PC$ 最短，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{36+36-AC^2}{2\times6\times6}$，解得 $AC=6\sqrt{3}$，所以 $AP+PC$ 的最小值为 $6\sqrt{3}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

3. **AC** 【解析】分析：题干给出了两个正方形，且它们所在的平面互相垂直，所以建系处理.

因为正方形 $ABCD$，$ABEF$ 所在的平面互相垂直，交线为 AB，且 $CB\perp AB$，所以 $CB\perp$ 平面 $ABEF$，又 $BE\subset$ 平面 $ABEF$，所以 $CB\perp BE$，则 BA,BC,BE 两两垂直，以 B 为坐标原点，BA,BE,BC 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示.



因为正方形 $ABCD$，$ABEF$ 的边长都是 1，所以 $CA=BF$，又 CM 和 BN 的长度保持相等，所以 $\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{BN}{BF}=\lambda\ (\lambda\in[0,1])$，当 $\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{1}{3}$ 时，$M\left(\dfrac{1}{3},0,\dfrac{2}{3}\right)$，$N\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},0\right)$，$|\overrightarrow{MN}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，故 **A 正确**.

分析：求解三棱锥的体积，往往要考虑等体积法，分析 A,M,N,F 四点中，任意三点所在的三角形，哪个面积更容易求出，则作为底面.

当 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 时，$M\left(\dfrac{1}{4},0,\dfrac{3}{4}\right)$，$N\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},0\right)$，$S_{\triangle ANF}=S_{\triangle ABF}-S_{\triangle ABN}=\dfrac{1}{2}\times1\times1-\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$，

$V_{A-MNF}=V_{M-ANF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ANF}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{32}$，故 **B 错误**.

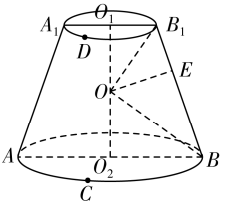
分析：先通过 MN 的长度最小求出 λ，进而求出 MN 的长，然后找到平面 MNA 与平面 MNB 的夹角或其补角，利用几何法求解.

当 $\dfrac{CM}{CA}=\lambda\ (\lambda\in[0,1])$ 时，$M(\lambda,0,1-\lambda)$，$N(\lambda,\lambda,0)$，$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2}=\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1}=\sqrt{2\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$，所以当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，MN 的长度最小，此时 $MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 M,N 分别是 AC，BF 的中点，则 $AM=AN=BM=BN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，设 MN 的中点为 O，连接 AO,BO（图略），所以 $AO\perp MN$，$BO\perp MN$，$AO=BO=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，又平面 $MNA\cap$ 平面 $MNB=MN$，所以 $\angle AOB$ 就是平面 MNA 与平面 MNB 的夹角或其补角，**关键点**，$|\cos\angle AOB|=\dfrac{\left|\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}-1\right|}{2\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{1}{3}$，所以平面 MNA 与平面 MNB 夹角的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故 **C 正确**.

分析：利用 MN 与 BD 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{5}$，求解 λ，若能求出则存在，反之不存在. 根据题意 $\overrightarrow{MN}=(0,\lambda,\lambda-1)$，$\lambda\in[0,1]$，$\overrightarrow{BD}=(1,0,1)$，当直线 MN 与 BD 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{5}$

时，$|\cos\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BD}\rangle|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2}\cdot\sqrt{2}}\right|=\dfrac{4}{5}$，整理得 $39\lambda^2-14\lambda+7=0$，$\Delta=196-1\,092=-896<0$，方程无解，故 **D 错误**. 故选 AC.

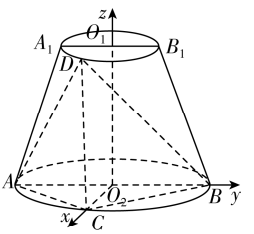
4. **AB** 【解析】取上底面圆 O_1 的直径为 A_1B_1，且 $A_1B_1/\!/AB$，连接 O_1O_2.



图①

对于 A，设 O 是 O_1O_2 的中点，连接 OB_1，OB，如图①. 易知 $O_1O_2=\sqrt{3^2-(2-1)^2}=2\sqrt{2}$，在 Rt$\triangle OO_1B_1$ 中，$OB_1=\sqrt{O_1B_1^2+OO_1^2}=\sqrt{3}$，同理，$OB=\sqrt{6}$，因为 $OB_1^2+OB^2=BB_1^2$，所以 $OB_1\perp OB$，过 O 作 $OE\perp BB_1$，垂足为 E，则 $\dfrac{1}{2}\cdot BB_1\cdot OE=\dfrac{1}{2}\cdot OB_1\cdot OB$，$OE=\dfrac{OB_1\cdot OB}{BB_1}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$，而 $OO_1=OO_2=\sqrt{2}$，所以该圆台存在内切球，且内切球半径为 $\sqrt{2}$，故 **A 正确**.

对于 B，连接 O_2C，由题知 $O_1O_2\perp$ 底面圆 O_2，因为点 C 在下底面圆 O_2 的圆周上，且 $AC=BC$，所以 $AC\perp BC$（提示：直径所对圆周角为直角），$AB\perp O_2C$，以 O_2 为坐标原点，建立如图②所示的空间直角坐标系. 则 $A(0,-2,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$A_1(0,-1,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(2,-2,0)$，设 $D(\cos\theta,\sin\theta,2\sqrt{2})$，$0\leqslant\theta<2\pi$，则 $\overrightarrow{AD}=(\cos\theta,\sin\theta+2,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BD}=(\cos\theta,\sin\theta-2,2\sqrt{2})$. 设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=x\cos\theta+y(\sin\theta+2)+2\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 故平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-1,1,\dfrac{\cos\theta-\sin\theta-2}{2\sqrt{2}}\right)$，



图②

所以点 B 到平面 ACD 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2\times(-1)-2\times1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta-2)^2}{(2\sqrt{2})^2}}}=\dfrac{4}{\sqrt{2+\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta-2)^2}{8}}}$.

令 $\dfrac{4}{\sqrt{2+\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta-2)^2}{8}}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$，整理得 $(\cos\theta-\sin\theta-2)^2=4$，又 $\cos\theta-\sin\theta-2=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\leqslant\sqrt{2}-2<0$，

所以 $\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-2=-2$，即 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，

因为 $0\leqslant\theta<2\pi$，所以 $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9\pi}{4}$，所以 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$，解得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$，即存在两个点 D，使点 B 到平面 ACD 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$，故 **B 正确**.

对于 C，结合 B 选项分析，设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=2x_1-2y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x_1\cos\theta+y_1(\sin\theta-2)+2\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$

故平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(1,1,\dfrac{2-(\cos\theta+\sin\theta)}{2\sqrt{2}}\right)$，

而 $\overrightarrow{AA_1}=(0,1,2\sqrt{2})$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=1+2-(\cos\theta+\sin\theta)=3-$

$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}]$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}\neq0$，所以不存在点 D，使过点 A 的母线与平面 BCD 平行，故 **C 错误**.

对于 D，由 B，C 选项可得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\left(1,1,\frac{2-(\cos\theta+\sin\theta)}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-1,1,\frac{\cos\theta-\sin\theta-2}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{2-(\cos\theta+\sin\theta)}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\theta-\sin\theta-2}{2\sqrt{2}}=\frac{(2-\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta-2)}{8}=\frac{-\cos^2\theta+\sin^2\theta-4+4\cos\theta}{8}=\frac{-2\cos^2\theta+4\cos\theta-3}{8}$，因为 $\cos\theta\in[-1,1]$，所以 $\frac{-2\cos^2\theta+4\cos\theta-3}{8}\leqslant\frac{-1}{8}<0$，所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$ 恒成立，即 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq0$，即不存在点 D，使得平面 $ACD\perp$ 平面 BCD，故 **D 错误**. 故选 AB.



30 s 速解　北京大学——杨晨博

对于 A，如图①，取上底面圆 O_1 的直径为 A_1B_1，且 $A_1B_1\parallel AB$，连接 O_1O_2，设 O_1O_2 的中点为 O，过 O 作 $OE\perp BB_1$ 于点 E，假设该圆台存在内切球，根据过圆外一点作圆的切线，切线长相等，可得 $r_1=O_1B_1=B_1E=1$，$r_2=O_2B=BE=2$，$l=B_1E+BE=3$，所以存在内切球，$O_1O_2=\sqrt{3^2-(2-1)^2}=2\sqrt{2}$，故内切球半径为 $\sqrt{2}$，故 **A 正确**.

对于 C，过点 A 的母线即为 AA_1，点 D 是上底面圆 O_1 圆周上的动点，所以过点 B，C，D 的平面必与直线 AA_1 相交，不存在点 D，使过点 A 的母线与平面 BCD 平行，故 **C 错误**.

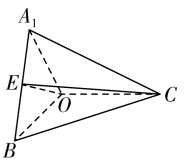
5. **ABD**　**【解析】**对于 A，如图①，取 A_1B 中点 E，连接 OE，EC，由于 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 是两个等腰三角形，且 $OA=OB=OC=2$，$\angle AOC=\angle BOC$，把 $\triangle AOC$ 沿着 OC 翻折到 $\triangle A_1OC$，所以 $OA_1=OB$，$CA_1=CB$，点 E 为 A_1B 中点，所以 $OE\perp A_1B$，$CE\perp A_1B$，又 $OE\cap CE=E$，OE，$CE\subset$ 平面 EOC，所以 $A_1B\perp$ 平面 EOC，又 $OC\subset$ 平面 EOC，所以 $A_1B\perp OC$，故 **A 正确**.

对于 B，如图②，过点 B 作 $BF\perp OC$ 于点 F，过点 A_1 作 $A_1M\perp BF$ 于点 M，连接 A_1F，由翻折性质可知 $\triangle A_1OF\cong\triangle BOF$，则 $A_1F\perp OC$，则 $\angle A_1FB$ 为二面角 A_1-OC-B 的平面角（提示：在二面角的棱上任取一点，过该点在两个面内分别作棱的垂线，这两条垂线形成的角，就是二面角的平面角），由 A 选项知 $A_1B\perp OC$，又 $BF\perp OC$，$A_1B\cap BF=B$，A_1B，$BF\subset$ 平面 A_1FB，所以 $OC\perp$ 平面 A_1FB，又 $A_1M\subset$ 平面 A_1BF，所以 $OC\perp A_1M$，又 $A_1M\perp BM$，$BM\cap OC=F$，BM，$OC\subset$ 平面 OCB，所以 $A_1M\perp$ 平面 OCB.

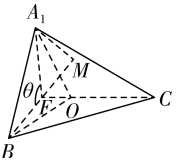
由题易知 $A_1F=\sqrt{3}$，$A_1M=A_1F\sin\theta=\sqrt{3}\sin\theta$，$V_{O-A_1BC}=V_{A_1-OBC}=\frac{1}{3}A_1M\cdot S_{\triangle OBC}=\sin\theta\ (0<\theta<\pi)$，所以四面体 $O-A_1BC$ 体积的最大值为 1，故 **B 正确**.

对于 C，分别取 A_1C，BO 的中点 N，G，连接 PN，NQ，GQ，PG，如图③，根据中位线的性质可知 $PG\parallel A_1B$，$NQ\parallel A_1B$，且 $PG=\frac{1}{2}A_1B$，$NQ=\frac{1}{2}A_1B$，所以 $PG\parallel NQ$ 且 $PG=NQ$，四边形 $PNQG$ 为平行四边形，所以过直线 PQ 且与 A_1B 平行的平面截四面体的截面为平行四边形 $PNQG$. 当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，结合 B 选项可知 $A_1B=\sqrt{3}$，$PG=NQ=\frac{1}{2}A_1B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$PN=GQ=\frac{1}{2}OC=1$，由 $A_1B\perp OC$，$A_1B\parallel NQ$，$PN\parallel OC$ 可得，$PN\perp NQ$，平行四边形 $PNQG$ 为矩形，故所求截面面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 **C 错误**.

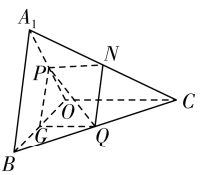
对于 D，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，平面 $OA_1C\perp$ 平面 OBC，如图④，过点 B 作 $BF\perp CO$ 于点 F，连接 A_1F，结合 B 选项可知 $A_1F\perp$ 平面 OBC，$BF\perp$ 平面 A_1OC，取 $\triangle OBC$ 的外心 H，取 $\triangle OA_1C$ 的外心 N，则 $\triangle OBC$ 与 $\triangle OA_1C$ 的外接圆半径 $r=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\frac{1}{2}=2$（提示：在 $\triangle OBC$ 中，$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$，$OC=OB=2$，则 $\angle OCB=\angle OBC=\frac{\pi}{6}$），过点 H 作 $l_1\perp$ 平面 BOC，过点 N 作 $l_2\perp$ 平面 A_1OC，$l_1\cap l_2=O_1$，O_1 即为四面体 $O-A_1BC$ 外接球球心. 作 $HI\perp CF$ 于点 I，$IH=\sqrt{r^2-IC^2}=\sqrt{3}$（提示：因为 H 为 $\triangle BOC$ 的外心，$HI\perp OC$，所以 I 为 OC 中点），连接 NI，O_1I，由于 $\theta=\frac{\pi}{2}$，所以可知四边形 O_1HIN 为矩形，又 $\triangle OBC\backsimeq\triangle OA_1C$，所以 $\triangle OBC$ 与 $\triangle OA_1C$ 的外心到公共边 OC 的距离相等，即 $HI=NI$，所以四边形 O_1HIN 为正方形，所以 $O_1H=IH=\sqrt{3}$，连接 O_1O，OH，则四面体 $O-A_1BC$ 的外接球半径 $R=O_1O=\sqrt{OH^2+O_1H^2}=\sqrt{r^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，故四面体 $O-A_1BC$ 外接球的表面积 $S_1=4\pi R^2=28\pi$，故 **D 正确**. 故选 ABD.



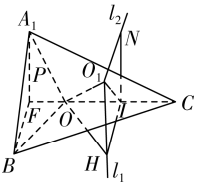
图①



图②

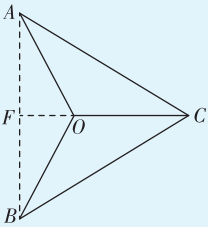


图③

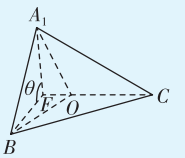


图④

一题多解　对于 A，如图⑤，连接 AB，延长 CO 交 AB 于 F，由已知，$\triangle AOC\backsimeq\triangle BOC$，所以 $\triangle AOF\backsimeq\triangle BOF$，$\angle AFO=\angle BFO=\frac{\pi}{2}$，翻折后，如图⑥，$A_1F\perp FC$，$BF\perp FC$，$A_1F\cap BF=F$，$A_1F$，$BF\subset$ 平面 A_1FB，所以 $FC\perp$ 平面 A_1FB，又 $A_1B\subset$ 平面 A_1FB，所以 $FC\perp A_1B$，即 $A_1B\perp OC$，故 **A 正确**.



图⑤



图⑥

对于 B，由 A 可知，平面 $BOC\cap$ 平面 $A_1OC=OC$，$A_1F\perp OC$，$BF\perp OC$，所以二面角 A_1-OC-B 的平面角 $\theta=\angle A_1FB$，由于 $A_1O=OC=2$，$\angle A_1OC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\angle A_1OF=\frac{\pi}{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OF$ 中，$A_1F=\sqrt{3}$，$OF=1$，同理可得 $BF=\sqrt{3}$，又由题可知 $OC=2$，$OC\perp$ 平面 A_1FB，则 $V_{O-A_1BC}=V_{C-A_1BF}-V_{O-A_1BF}=2V_{O-A_1BF}=2\times\frac{1}{3}\times OF\times S_{\triangle ABF}=2\times\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sin\theta=\sin\theta$，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$(V_{O-A_1BC})_{\max}=1$，故 **B 正确**.

突破点 12　直线与圆的最值（范围）问题（找临界）

1. **ABD**　【解析】对于 A，因为 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$，所以 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}$，即 $\overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{OA}$，故 **A 正确**；

对于 B，设 $Q(x,y)$，$P(x_0,y_0)$，已知 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$ 且 $\overrightarrow{OA}=(3,4)$，所以 $\begin{cases}x=x_0+3,\\y=y_0+4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=x-3,\\y_0=y-4,\end{cases}$ 又点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 上，得 $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=9$，所以 $(x-4)^2+(y-6)^2=9$，故点 Q 的轨迹为以 $(4,6)$ 为圆心，3 为半径的圆，故 **B 正确**；

对于 C，设 $Q(4+3\cos\theta,6+3\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，所以 $\overrightarrow{OQ}=(4+3\cos\theta,6+3\sin\theta)$，又 $\overrightarrow{OB}=(2,0)$，所以 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}=8+6\cos\theta\in[2,14]$，故 **C 错误**；

对于 D，因为点 Q 的轨迹圆的圆心 $(4,6)$ 到直线 $l:3x+4y-12=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3\times4+4\times6-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{24}{5}$，所以点 Q 到直线 l：$3x+4y-12=0$ 的距离的最小值为 $d-3=\dfrac{24}{5}-3=\dfrac{9}{5}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

2. **AC**　【解析】圆 $O:x^2+y^2=4$ 的圆心 $O(0,0)$，半径 $r_1=2$，圆 $C:(x-4)^2+y^2=1$ 的圆心 $C(4,0)$，半径 $r_2=1$.

对于 A，依题意，$\begin{cases}\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=2,\\\dfrac{|4k+b|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{\sqrt{15}}{15},\\b=-\dfrac{8\sqrt{15}}{15}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-\dfrac{\sqrt{15}}{15},\\b=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=\dfrac{3\sqrt{7}}{7},\\b=-\dfrac{8\sqrt{7}}{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-\dfrac{3\sqrt{7}}{7},\\b=\dfrac{8\sqrt{7}}{7},\end{cases}$ 因此 (k,b) 有 4 组值，故 **A 正确**；

对于 B，若直线 $y=kx$ 与圆 C 相切，则有 $C(4,0)$ 到直线 $y=kx$ 的距离 $d=\dfrac{|4k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k^2=\dfrac{1}{15}$，又由 A 分析知 $k^2=\dfrac{1}{15}$ 或 $k^2=\dfrac{9}{7}$，因此当 $k^2=\dfrac{9}{7}$ 时，直线 $y=kx$ 与圆 C 不相切（易错：不要忽略 $k^2=\dfrac{9}{7}$ 的情况），故 **B 错误**；

对于 C，由 A 可知，$|b|=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$ 或 $|b|=\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$，可得 $|b|>2$，则直线 $y=b$ 与圆 O 和圆 C 都没有公共点，故 **C 正确**；

对于 D，因为圆 O 和圆 C 的圆心都在 x 轴上，$|OC|=4>2+1=3$，所以两圆外离，这两个圆上距离最小的点分别为 $(2,0)$，$(3,0)$，因此与两圆都相切的圆中，最小的圆的半径为 $\dfrac{1}{2}$，面积为 $\dfrac{\pi}{4}$（关键点），故 **D 错误**. 故选 AC.

3. **BCD**　【解析】对于 A，两圆方程相减可得公共弦所在直线的方程为 $y=2x$，故 **A 错误**；

对于 B，$y=k(x-3)$ 过定点 $(3,0)$，而 $(3,0)$ 在圆 $C:x^2+y^2-4x=0$ 的内部，所以直线 $y=k(x-3)$ 与圆 C 共有两个交点，故 **B 正确**；

对于 C，分析：题目条件不足以正向推导，因此从反向出发，先假设结论成立，推出方程，进行验证. 设 $M(x,y)$，若 $|MA|=2|MB|$，则 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，化简可得 $x^2+y^2-4x=0$，所以满足条件的点 M 的轨迹就是圆 C，故 **C 正确**；

对于 D，分析：通过等差中项得到 $2b=a+c$，确定直线 l 过定点，由 $|PQ|$ 最小，得到圆心和定点的连线与直线 l 垂直. 因为 b 是 a,c 的等差中项，所以 $2b=a+c$，所以 $l:ax+2by+c=0$ 可化为 $ax+(a+c)y+c=0$，即 $a(x+y)+c(y+1)=0$，可令 $\begin{cases}x+y=0,\\y+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$ 则直线 l 过定点 $N(1,-1)$，将圆 C 方程整理可得 $(x-2)^2+y^2=4$，则圆心为 $C(2,0)$，当 CN 与直线 l 垂直时，$|PQ|$ 最小，此时 $k_{CN}\times k_l=-1$，即 $\frac{0+1}{2-1}\times k_l=-1$，得 $k_l=-1$，结合 $ax+(a+c)y+c=0$ 得 $k_l=-\frac{a}{a+c}=-1$，解得 $c=0$，因此直线 l 的方程为 $x+y=0$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

关键点

4. **BC**　【解析】对于 A，假设直线 l 过定点 (x_0,y_0)，则 $(x_0-1)\cdot\cos\theta+y_0\sin\theta=2$ 对任意 θ 恒成立，当 $\theta=0$ 时，得 $x_0-1=2$，解得 $x_0=3$，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，得 $y_0=2$，将 $(3,2)$ 代入方程，得 $2\cos\theta+2\sin\theta=2$，即 $\cos\theta+\sin\theta=1$，此式不恒成立，故假设不成立，直线 l 不过定点，故 **A 错误**.

对于 B，圆 $x^2+y^2-2x-3=0$，即 $(x-1)^2+y^2=4$，圆心坐标为 $(1,0)$，半径 $r=2$，该圆圆心到直线 $l:x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-2=0$ 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2=r$，所以直线 l 与圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相切，故 **B 正确**.

对于 C，圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=16$ 的圆心为 $C(2,1)$，半径 $r_C=4$，圆心 C 到直线 $l:x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-2=0$ 的距离 $d_C=\frac{|\cos\theta+\sin\theta-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=|\cos\theta+\sin\theta-2|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2\right|\leqslant 2+\sqrt{2}$，当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 时等号成立，故 **C 正确**.

对于 D，可知 $|AB|=2\sqrt{r_C^2-d_C^2}=2\sqrt{16-d_C^2}$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|d_C=\sqrt{16d_C^2-d_C^4}$.

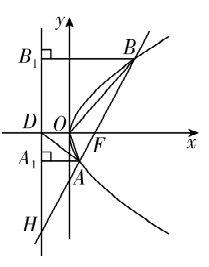
令 $d_C^2=t$，由 C 选项可得 $t\in[6-4\sqrt{2},6+4\sqrt{2}]$，因为函数 $y=-t^2+16t$ 在 $[6-4\sqrt{2},8]$ 上单调递增，在 $[8,6+4\sqrt{2}]$ 上单调递减，所以 $y_{\max}=-8^2+16\times8=64$，故 $S_{\max}=8$，所以 $\triangle ABC$ 的面积不恒小于 8，故 **D 错误**. 故选 BC.

15 s 速解　北京大学——杨晨博

对于 A 选项，由 $l:(x-1)\cos\theta+y\sin\theta-2=0$，可得 $x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-2=0$，若直线 l 过定点，则需满足 $\begin{cases}\cos\theta=0,\\\sin\theta=0,\\-\cos\theta-2=0,\end{cases}$ 可知 θ 无解，所以直线 l 不过定点.

突破点 13　直线与抛物线的位置关系（直曲联立/焦半径）

1. **ABD**　【解析】依题意得 $F(2,0)$，易知直线 l 的斜率不为 0，设其方程为 $x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}x=my+2,\\y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-8my-16=0$，则 $\Delta>0$，$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$.



对于 A，由 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|y_1|}{|y_2|}=\frac{1}{4}$ 及 $y_1y_2=$

-16，解得 $\begin{cases}y_1=2,\\y_2=-8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y_1=-2,\\y_2=8,\end{cases}$ 则 $A\left(\frac{1}{2},2\right)$，$B(8,-8)$ 或 $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$，$B(8,8)$，则直线 l 的斜率为 $\pm\frac{4}{3}$，故 **A 正确**；

对于 B，$|AF|+4|BF|=x_1+2+4(x_2+2)=x_1+4x_2+10=\frac{y_1^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}+10=\frac{32}{y_2^2}+\frac{y_2^2}{2}+10\geqslant 18$，当且仅当 $y_2^2=8$ 时等号成立，故 **B 正确**；

对于 C，因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{y_1^2y_2^2}{64}+y_1y_2=-12<0$，所以 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}<0$，故 $\angle AOB>90°$，故 **C 错误**；

对于 D，抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程为 $x=-2$，所以 $D(-2,0)$，$F(2,0)$，$|AF|=x_1+2$，

$|AD|=\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+4x_1+4+8x_1}=\sqrt{x_1^2+12x_1+4}$，

因为 $x_1>0$，所以 $\frac{|AF|}{|AD|}=\frac{x_1+2}{\sqrt{x_1^2+12x_1+4}}=\sqrt{\frac{x_1^2+4x_1+4}{x_1^2+12x_1+4}}=\sqrt{1-\frac{8x_1}{x_1^2+12x_1+4}}=\sqrt{1-\frac{8}{x_1+\frac{4}{x_1}+12}}\geqslant\sqrt{1-\frac{8}{2\sqrt{x_1\cdot\frac{4}{x_1}}+12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $x_1=2$ 时取等号，此时 $|AF|=4$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

1 min 速解　北京大学——杨晨博

（焦半径的三角表示）设直线 AB 的倾斜角为 θ.

对于 A，当 A 在 x 轴上方时，$|AF|=\frac{p}{1-\cos\theta}=\frac{4}{1-\cos\theta}$，$|BF|=\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{4}{1+\cos\theta}$，若 $|BF|=4|AF|$，则 $1-\cos\theta=4(1+\cos\theta)$，解得 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，则直线 l 的斜率 $k=\tan\theta=-\frac{4}{3}$；当 A 在 x 轴下方时可以由对称性得 $k=\frac{4}{3}$，故 **A 正确**.

对于 B，由对称性，不妨设 A 在 x 轴上方，则 $|AF|+4|BF|=\frac{4}{1-\cos\theta}+\frac{16}{1+\cos\theta}$，利用“1”的代换及基本不等式可得 $|AF|+4|BF|=\frac{1}{2}(1-\cos\theta+1+\cos\theta)\cdot\left(\frac{4}{1-\cos\theta}+\frac{16}{1+\cos\theta}\right)=10+2\times\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+8\times\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\geqslant 10+2\times\sqrt{2\times 8}=18$，当且仅当 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 时等号成立，故 **B 正确**.

对于 C，以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切，则点 O 在圆内，则有 $\angle AOB>90°$，故 **C 错误**.

2. BCD　**【解析】**分析：根据导数的几何意义分别求过点 P 的两条切线方程，从而得到切点弦的方程，再逐项判断. 当 $y=2\sqrt{x}$ 时，$y'=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. 设抛物线焦点为 F，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，根据对称性，不妨设 A 在第一象限，则抛物线在点 A 处切线的斜率 $k=\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{2}{y_1}$，故切线 AP 的方程为 $y-y_1=\frac{2}{y_1}(x-x_1)$，整理可得 $yy_1-y_1^2=2(x-x_1)$，因为 $y_1^2=4x_1$，所以切线方程

可化为 $yy_1=2(x+x_1)$；同理可得抛物线在点 B 处的切线方程为 $yy_2=2(x+x_2)$. 因为点 $P(m,n)$ 在过点 A 的切线上，同时也在过点 B 的切线上，所以过抛物线外一点 $P(m,n)$ 所得两条切线的切点弦方程为 $ny=2(x+m)$.

对于 A，当 $m=-1$ 时，得到 $l_{AB}:ny=2x-2$，此时直线 AB 过焦点 $F(1,0)$，将直线 AB 的方程与抛物线方程联立可得 $y^2-2ny-4=0$，$\Delta>0$，所以 $y_1+y_2=2n$，$y_1y_2=-4$，故 $x_1x_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{16}=1$，此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=1-4=-3<0$，所以 $\angle AOB>90°$，故 $\triangle OAB$ 为钝角三角形，故 **A 错误**.

对于 B，当 $m=-1$ 时，由 A 选项分析可得，若 $n\neq0$，则 $k_{PF}\cdot k_{AB}=-\dfrac{n}{2}\times\dfrac{2}{n}=-1$，故 $PF\perp AB$，故点 P 在直线 AB 上的投影为点 F；若 $n=0$，易知此时点 P 在直线 AB 上的投影也为点 F，故 **B 正确**.

对于 C，$k_{AT}=\dfrac{y_1-4}{x_1-4}=\dfrac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4}=\dfrac{4}{y_1+4}$，故 $l_{AT}:4x-(y_1+4)y+4y_1=0$，令 $y=0$，则 $x_M=-y_1$，同理可得 $x_N=-y_2$，故 $|OM|\,|ON|=|x_Mx_N|=|y_1y_2|=4$，故 **C 正确**.

对于 D，当 $m=-4$ 时，设过 $P(-4,n)$ 作抛物线的切线方程为 $x=ty-tn-4$，与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4ty+4tn+16=0$，由 $\Delta=0$，整理得 $t^2-nt-4=0$，易知该方程有两个不同的解，设为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=n$，$t_1t_2=-4$，

不妨设 $l_{AP}:x=t_1y-t_1n-4$，令 $x=0$，则 $y_D=n+\dfrac{4}{t_1}$，同理可求 $y_Q=n+\dfrac{4}{t_2}$，故 $|OD|\,|OQ|=\left|\left(n+\dfrac{4}{t_1}\right)\left(n+\dfrac{4}{t_2}\right)\right|=\left|n^2+4n\cdot\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}+\dfrac{16}{t_1t_2}\right|=4$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

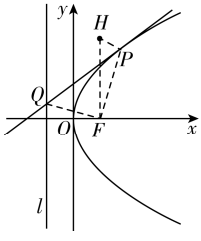
3. **ACD** 【解析】对于 A，点 $P(m,n)$ $(m\neq0)$ 到直线 $x-y+3=0$ 的距离 $d=\dfrac{|m-n+3|}{\sqrt{2}}$，又 $n^2=4m$，

所以 $d=\dfrac{|m-n+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|\frac{n^2}{4}-n+3\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|\frac{1}{4}(n-2)^2+2\right|}{\sqrt{2}}\geqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $n=2$ 时取等号，所以 $|m-n+3|_{\min}=2$，故 **A 正确**.

对于 B，$\dfrac{n}{m+2}=\dfrac{n-0}{m-(-2)}$ 表示过点 $P(m,n)$ $(m\neq0,m\neq-2)$ 和点 $D(-2,0)$ 的直线的斜率，当斜率最小时，直线 PD 与抛物线 C 相切，设切线方程为 $x=ty-2$，与抛物线 C 的方程联立，得 $y^2-4ty+8=0$，由 $\Delta=16t^2-32=0$，得 $t=\pm\sqrt{2}$，所以 $\left(\dfrac{n}{m+2}\right)_{\min}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 **B 错误**.

关键点

对于 C，$\sqrt{m^2+n^2-2m-6n+10}+|m|=\sqrt{(m-1)^2+(n-3)^2}+|m-0|$，其几何意义为点 P 到点 $H(1,3)$ 的距离与到 y 轴的距离之和，连接 HF，HP，PF，则 $|PH|+|m|=|PH|+|PF|-1\geqslant|FH|-1=2$，当且仅当 H,P,F 三点共线且 P 在点 H,F 之间时等号成立，故 **C 正确**.



对于 D，根据对称性，不妨设 P 在第一象限，当 $y=2\sqrt{x}$ 时，$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则抛物线 C 在点 P 处的切线方程为 $y-n=\dfrac{1}{\sqrt{m}}(x-m)$，由 $n^2=4m$ 整理得，$y=$

$\frac{2}{n}x+\frac{n}{2}$，令 $x=-1$，则 $y=\frac{n}{2}-\frac{2}{n}$，点 Q 坐标为 $\left(-1,\frac{n}{2}-\frac{2}{n}\right)$.

连接 FQ，$\overrightarrow{FQ}=\left(-2,\frac{n}{2}-\frac{2}{n}\right)$，$\overrightarrow{FP}=(m-1,n)$，则 $\overrightarrow{FQ}\cdot\overrightarrow{FP}=-2m+2+\frac{n^2}{2}-2=0$，即 $PF\perp QF$，

故点 F 在以 PQ 为直径的圆上，故 **D 正确**. 故选 ACD.

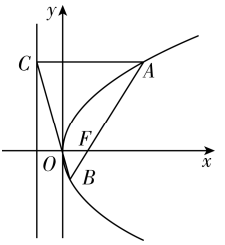
4. AC 【解析】分析：直线与抛物线相交问题，直接设出直线方程，然后与抛物线方程联立，利用一元二次方程根与系数的关系进行求解.

抛物线 $M:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$.

由题易知直线 AB 的斜率不为 0，设过点 $F(1,0)$ 的直线为 $x=my+1$（提示：这样设方程可以避免讨论斜率不存在的情况），

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $y^2-4my-4=0$，$\Delta=16m^2+16>0$，所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

对于 A，$|AB|=x_1+x_2+2=m(y_1+y_2)+4=4m^2+4\geqslant 4$，当且仅当 $m=0$ 时取等号，即 $|AB|$ 的最小值是 4，故 **A 正确**；



对于 B，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{1}{my_1+2}+\frac{1}{my_2+2}=\frac{m(y_1+y_2)+4}{m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4}=\frac{4m^2+4}{4m^2+4}=1$，故 **B 错误**；

对于 C，设 C 点坐标为 $(-1,y_3)$，则 $\frac{y_3}{-1}=\frac{y_2}{x_2}$，即 $\frac{y_3}{-1}=\frac{4}{y_2}$，即 $y_2y_3=-4$，因为 $y_1y_2=-4$，所以 $y_3=y_1$，故直线 AC 平行于 x 轴，故 **C 正确**；

对于 D，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC||y_2-y_1|=\frac{1}{2}|x_1+1||y_2-y_1|=\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{4}+1\right)\left(y_1+\frac{4}{y_1}\right)$，

设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)$，$x>0$，

则 $f'(x)=\frac{x^2+4}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{x^2}\right)$，

所以当 $x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9}$，即 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$，故 **D 错误**. 故选 AC.

5. BCD 【解析】对于 A，焦点 $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，焦点 F 到准线的距离为 $\frac{1}{2}$，故 **A 错误**.

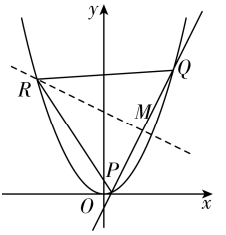
对于 B，设 $P(t,t^2)$，点 P 到直线的距离 $d=\frac{|t-t^2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|t^2-t+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|}{\sqrt{2}}$，故 $d_{\min}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$，故 **B 正确**.

对于 C，若 $\triangle POF$ 为等边三角形，则点 P 在线段 OF 的中垂线 $y=\frac{1}{8}$ 上，将 $y=\frac{1}{8}$ 代入抛物线方程得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，不妨设 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{4},$

$\left.\frac{1}{8}\right)$，则$|PO|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3}{8}\neq|OF|$，所以不存在点$P$使$\triangle POF$为等边三角形，故**C 正确**.

对于D，设直线PQ的方程为$y=2x+b$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x^2=y,\\y=2x+b,\end{cases}$可得$x^2-2x-b=0$，由$\Delta>0$得$b>-1$，所以$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-b$，则$y_1+y_2=2(x_1+x_2)+2b=4+2b$，所以线段$PQ$的中点$M(1,2+b)$，由弦长公式得$|PQ|=\sqrt{1+2^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{5}\times\sqrt{1+b}$，

作出直线RM，如图，在等边三角形PQR中，$RM\perp PQ$，则$k_{RM}=-\frac{1}{2}$，直线RM的方程为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}+b$，与抛物线方程联立得$2x^2+x-(5+2b)=0$，由等边三角形的性质知$|RM|=\frac{\sqrt{3}}{2}|PQ|$，设



$R(x_0,x_0^2)$，则$x_0^2=-\frac{1}{2}x_0+\frac{5}{2}+b$，整理得$x_0^2-(2+b)=-\frac{1}{2}(x_0-1)$，由两点间的距离公式得$|RM|=\sqrt{(x_0-1)^2+[x_0^2-(2+b)]^2}=\sqrt{(x_0-1)^2+\left[-\frac{1}{2}(x_0-1)\right]^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_0-1|$，故$\frac{\sqrt{5}}{2}|x_0-1|=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{1+b}$，即$(x_0-1)^2=12(1+b)$①，又$R$在直线$RM$上，也在抛物线上，所以$2x_0^2+x_0-(5+2b)=0$②，联立①②得$(x_0-1)^2=12\left(1+\frac{2x_0^2+x_0-5}{2}\right)$，展开整理得$11x_0^2+8x_0-19=0$，解得$x_0=1$(舍去)或$x_0=-\frac{19}{11}$，则$b=\frac{2x_0^2+x_0-5}{2}=-\frac{46}{121}$，故$|PQ|=2\sqrt{5}\times\sqrt{1-\frac{46}{121}}=2\sqrt{5}\times\frac{5\sqrt{3}}{11}=\frac{10\sqrt{15}}{11}$，故**D 正确**. 故选BCD.

6. **ABD** 【解析】对于A，设MN的中点为P，过点N作准线l的垂线，交准线l于点E，过点P作准线l的垂线，交准线l于点P'(图略)，由抛物线的定义可知$|MD|=|MF|$，$|NE|=|NF|$，所以$|PP'|=\frac{1}{2}(|MD|+|NE|)=\frac{1}{2}(|MF|+|NF|)=\frac{1}{2}|MN|$，所以以线段$MN$为直径的圆的圆心$P$到准线$l$的距离等于圆的半径，则以线段$MN$为直径的圆与抛物线$C$的准线$l$只有一个公共点，故**A 正确**.

对于B，当$p=2$时，抛物线$C:y^2=4x$，则$F(1,0)$，设直线MN的方程为$x=my+1$，联立$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$，则$\Delta=16m^2+16>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，故**B 正确**.

对于C，当$p=2$，直线MN的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$时，直线MN的方程为$x=\sqrt{3}y+1$，且$y_1+y_2=4\sqrt{3}$，则$x_1+x_2=\sqrt{3}y_1+1+\sqrt{3}y_2+1=\sqrt{3}(y_1+y_2)+2=14$，所以$|MN|=x_1+x_2+p=14+2=16$，故**C 错误**.

对于D，过点M作$MQ\perp x$轴，交x轴于点Q(图略)，则$Q(x_1,0)$，因为$\cos\angle DMF=\frac{4}{5}$，$D\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

所以$\cos\angle DMF=\cos\angle MFQ=\frac{|FQ|}{|MF|}=\frac{|FQ|}{|MD|}=\frac{x_1-\frac{p}{2}}{x_1+\frac{p}{2}}=\frac{4}{5}$，解得$x_1=\frac{9p}{2}$，又$y_1^2=2px_1=9p^2$，则$y_1=3p$或$y_1=-3p$，则$k_{FD}=\frac{3p}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}=-3$或$k_{FD}=\frac{-3p}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}=3$，故**D 正确**. 故选ABD.

1 min 速解　武汉大学——王梓秋

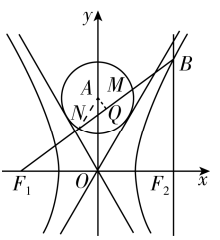
（利用三角恒等变换求直线斜率）对于 D，由抛物线的定义及三角形内角和定理知 $\angle MDF=\frac{\pi}{2}-\frac{\angle DMF}{2}$，于是 $\tan\angle MDF=\frac{1}{\tan\frac{\angle DMF}{2}}$. 由 $\cos\angle DMF=\frac{4}{5}$ 知 $\frac{1-\tan^2\frac{\angle DMF}{2}}{\tan^2\frac{\angle DMF}{2}+1}=\frac{4}{5}$ 且 $0<\angle DMF<\frac{\pi}{2}$，故 $\tan\frac{\angle DMF}{2}=\frac{1}{3}$，则 $\tan\angle MDF=\frac{1}{\tan\frac{\angle DMF}{2}}=3$，结合对称性可知，直线 FD 的斜率为 ±3，故 **D 正确**.

突破点 14　圆锥曲线与圆的综合问题（找几何关系）

1. **ABD**　【解析】对于 A，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$，圆 A 的圆心为 $A(0,2)$，半径 $r=1$，由题意得，圆心 A 到渐近线的距离 $d=\frac{|\pm2a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a}{c}=1$，所以 $c=2a$，则双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2a}{a}=2$，故 **A 正确**；

对于 B，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}a$，所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$，故 **B 正确**；

对于 C，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，因为 $BF_2\perp F_1F_2$，所以点 B 的横坐标为 c，代入双曲线方程得 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，根据对称性不妨取 $B\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，则 $|BF_2|=\frac{b^2}{a}$（另解：由题可知 $|BF_2|$ 为通径长的一半，所以 $|BF_2|=\frac{b^2}{a}$），$|F_1F_2|=2c$，所以 $\tan\angle BF_1F_2=\frac{|BF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{3a^2}{a\cdot4a}=\frac{3}{4}$，故 **C 错误**；



对于 D，若 $|F_1F_2|=8$，则 $c=4$，$a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$F_1(-4,0)$，$B(4,6)$，直线 BF_1 的方程为 $y=\frac{6-0}{4-(-4)}(x+4)=\frac{3}{4}(x+4)$，即 $3x-4y+12=0$，过 A 作 $AQ\perp BF_1$ 于 Q，连接 AN，则圆心 A 到直线 BF_1 的距离即为 $|AQ|=\frac{|-8+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{4}{5}$，由垂径定理可得，$|MN|=2\sqrt{|AN|^2-|AQ|^2}=2\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{6}{5}$，故 **D 正确**.

故选 ABD.

2. **BCD** 【解析】对于 A，分析：已知椭圆任意两条相互垂直的切线的交点都在蒙日圆上，且椭圆与边长为 $5\sqrt{2}$ 的正方形的四条边均相切，所以该正方形四个顶点都在蒙日圆上，由此求出蒙日圆直径，进而解出椭圆方程的未知量 b，求得离心率. 由题意知，正方形的对角线的长度等于蒙日圆的直径，所以 $2\sqrt{a^2+b^2}=5\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，解得 $b=3$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，故 **A 错误**.

关键点

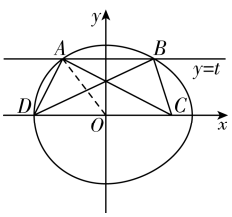
对于 B，分析：根据蒙日圆定义，该矩形各顶点在蒙日圆上，可知相邻两边平方和为定值（蒙日圆直径平方），然后利用基本不等式求解最值. 设矩形的边长分别为 x,y，则 $x^2+y^2=100$，由基本不等式得 $2xy\leqslant 100$，可得 $xy\leqslant 50$，当且仅当 $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ x=y,\end{cases}$ 即 $x=y=5\sqrt{2}$ 时取等号，所以矩形面积的最大值为 50，故 **B 正确**.

对于 C，分析：由题意知，A 在蒙日圆外，即求过圆外一定点和圆上动点的直线斜率的范围. 由题意知，蒙日圆方程为 $x^2+y^2=25$，直线 AM 的斜率存在，设直线 AM 的方程为 $y=k(x+6)$，由 $\frac{|6k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 5$，解得 $-\frac{5\sqrt{11}}{11}\leqslant k\leqslant\frac{5\sqrt{11}}{11}$，故 **C 正确**.

对于 D，分析：由题易知两直线斜率相等，且已知 l_1 与蒙日圆相离. 若蒙日圆上任意一点到两平行直线距离之和为定值，不受点的位置影响，说明这两条直线分别在蒙日圆的两侧，且不与圆相交. 由题可知 l_1,l_2 平行或重合，蒙日圆 $x^2+y^2=25$ 与直线 l_1 相离，若点 P 到直线 l_1,l_2 的距离之和与点 P 的位置无关，则直线 l_2 与 l_1 分别位于蒙日圆的两侧，l_2 与蒙日圆相切或相离，蒙日圆圆心到直线 l_2 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$，则 $\frac{|m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\geqslant 5$ 且 $m<0$，解得 $m\leqslant -5\sqrt{5}$，所以 m 的取值范围是 $(-\infty,-5\sqrt{5}]$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

关键点

3. **ACD** 【解析】对于 A，因为曲线 Γ 是由半圆 $x^2+y^2=1(x\leqslant 0)$ 和半椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1(x>0)$ 组成的，所以曲线 Γ 关于 x 轴对称，不妨研究当 $0\leqslant t<1$ 时的情况. 在完整椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 中，$a=\sqrt{2},b=1,c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2-1}=1$，所以 $C(1,0),D(-1,0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两个焦点，于是有 $|BC|+|BD|=2a=2\sqrt{2}$，故 **A 正确**.



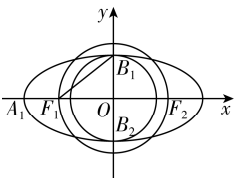
对于 B，连接 AO，显然 $|CD|=2,|OC|=|OD|=|OA|=1$，所以 $\triangle ADC$ 是直角三角形，且 $AD\perp AC$，所以 $\frac{|AC|+|AD|}{2}\leqslant$

$\sqrt{\frac{|AC|^2+|AD|^2}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}|CD|^2}=\sqrt{\frac{1}{2}\times 4}=\sqrt{2}$，当且仅当 $|AD|=|AC|$ 时，等号成立，即 $|AC|+|AD|\leqslant 2\sqrt{2}$，此时 $A(0,1)$，显然 A,B 重合，不符合题意，故等号取不到，即 $|AC|+|AD|<2\sqrt{2}$，故 **B 错误**.

对于 C，当 $-1\leqslant x\leqslant 0, y\geqslant 0$ 时，由 $x^2+y^2=1$，得 $y=\sqrt{1-x^2}$，令 $\sqrt{1-x^2}=t, t\in[0,1]$，则 $x=-\sqrt{1-t^2}$，所以 A 的坐标为 $(-\sqrt{1-t^2},t)$，当 $0<x\leqslant\sqrt{2}, y\geqslant 0$ 时，由 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$，令 $\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}=t, t\in[0,1)$，则 $x=\sqrt{2(1-t^2)}$，所以 B 的坐标为 $(\sqrt{2(1-t^2)},t)$. 假设四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $|AB|=|CD|=2$，即 $\sqrt{2(1-t^2)}-(-\sqrt{1-t^2})=(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{1-t^2}=2$，解得 $t=\sqrt{8\sqrt{2}-11}$ 或 $t=-\sqrt{8\sqrt{2}-11}$（负值舍去），所以存在 $t\in\mathbf{R}$，使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 **C 正确**.

对于 D，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+1)\sqrt{1-t^2}\cdot t=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot\sqrt{(1-t^2)t^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot\frac{(1-t^2)+t^2}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$，当且仅当 $1-t^2=t^2$，即 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，故 **D 正确**. 故选 ACD.

4. ACD 【解析】由椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，可得 $a=2,b=1$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.



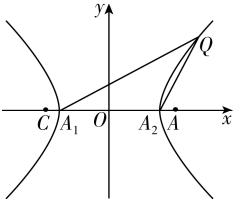
对于 A，因为 $c>b$，所以以线段 F_1F_2 为直径的圆与椭圆有 4 个交点，如图，所以 **A 正确**.

对于 B，以线段 B_1B_2 为直径的圆与椭圆仅有 B_1,B_2 两个交点，所以 **B 错误**.

对于 C，假设 P,Q,F_1,B_1 四点共圆，则设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，将 $B_1(0,1)$，$F_1(-\sqrt{3},0)$ 代入得 $\begin{cases}E+F+1=0,\\-\sqrt{3}D+F+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}E=2-\sqrt{3}D,\\F=\sqrt{3}D-3,\end{cases}$ 此时 $D^2+E^2-4F>0$ 恒成立，圆的方程整理为 $x^2+y^2+Dx+(2-\sqrt{3}D)y+\sqrt{3}D-3=0$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,-y_0)$，将 P,Q 两点的坐标代入圆的方程得 $\begin{cases}x_0^2+y_0^2+Dx_0+(2-\sqrt{3}D)y_0+\sqrt{3}D-3=0,\\x_0^2+y_0^2-Dx_0-(2-\sqrt{3}D)y_0+\sqrt{3}D-3=0,\end{cases}$ 两式相加，可得 $x_0^2+y_0^2=3-\sqrt{3}D$①，两式相减，可得 $Dx_0+(2-\sqrt{3}D)y_0=0$，即 $x_0^2=\frac{(2-\sqrt{3}D)^2}{D^2}y_0^2$②，又因为点 P 在椭圆上，所以满足 $x_0^2+4y_0^2=4$③，①③联立可得 $y_0^2=\frac{1+\sqrt{3}D}{3}$④，$x_0^2=\frac{4(2-\sqrt{3}D)}{3}$⑤，将④⑤代入②可得 $\frac{4(2-\sqrt{3}D)}{3}=\frac{(2-\sqrt{3}D)^2}{D^2}\times\frac{1+\sqrt{3}D}{3}$，即 $(2-\sqrt{3}D)(7D^2-\sqrt{3}D-2)=0$，此时方程有解，故假设成立，所以 **C 正确**.

对于 D，假设 P,Q,A_1,B_1 四点共圆，由题意知，直线 PQ 的斜率存在且不为 0，设直线 PQ 的斜率为 $k(k\neq0)$，则直线 PQ 的方程为 $y=kx$，因为 P,Q 关于原点对称，所以线段 PQ 中垂线的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$，由 $A_1(-2,0)$，$B_1(0,1)$，可得线段 A_1B_1 中垂线的方程为 $y=-2x-\frac{3}{2}$，联立 $\begin{cases}y=-2x-\frac{3}{2},\\ y=-\frac{1}{k}x,\end{cases}$ 可得 $x=\frac{3k}{2(1-2k)}\left(k\neq\frac{1}{2}\right)$，$y=\frac{3}{2(2k-1)}$，即圆心 O' 的坐标为 $\left(\frac{3k}{2(1-2k)},\frac{3}{2(2k-1)}\right)$，联立 $\begin{cases}y=kx,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 可得 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{4k^2+1}}$，因为 P,Q 关于原点对称，不妨设 $x_P=\frac{2}{\sqrt{4k^2+1}}$，则 $y_P=\frac{2k}{\sqrt{4k^2+1}}$，由 $O'B_1=O'P$，得 $\left[\frac{3k}{2(1-2k)}-0\right]^2+\left[\frac{3}{2(2k-1)}-1\right]^2=\left[\frac{3k}{2(1-2k)}-\frac{2}{\sqrt{4k^2+1}}\right]^2+\left[\frac{3}{2(2k-1)}-\frac{2k}{\sqrt{4k^2+1}}\right]^2$，整理得 $\frac{4-2k}{1-2k}=\frac{4k^2+4}{4k^2+1}$，即 $2k^2+k=0$，可得 $k=-\frac{1}{2}$，所以当直线 PQ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$ 时，P,Q,A_1,B_1 四点共圆，所以 **D 正确**. 故选 ACD.

5. **ACD** 【解析】对于 A，由圆 C 的方程 $(x+5)^2+y^2=64$，可得 $C(-5,0)$，半径 $r=8$，由 l 为线段 AP 的垂直平分线，可得 $|QP|=|QA|$，又 P 为圆 C 上的任意一点，故 $|PC|=8$，又 $|AC|=10$，则 $||QA|-|QC||=8<|AC|$，故点 Q 的轨迹为以 A,C 为焦点的双曲线，且 $c=5,2a=8$，则 $b^2=c^2-a^2=25-16=9$，即点 Q 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，故 $|QA|_{\min}=c-a=1$，故 **A 正确**.



对于 B，设 A_1 在 A_2 左侧，由点 Q 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，得 $A_1(-4,0)$，$A_2(4,0)$，

设 $Q(x_1,y_1)$，$y_1\neq0$，则有 $\frac{x_1^2}{16}-\frac{y_1^2}{9}=1$，故 $y_1^2=9\left(\frac{x_1^2}{16}-1\right)$，则 $k_{QA_1}\cdot k_{QA_2}=\frac{y_1}{x_1+4}\cdot\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{y_1^2}{x_1^2-16}=\frac{9\left(\frac{x_1^2}{16}-1\right)}{x_1^2-16}=\frac{9}{16}$，故 **B 错误**.

对于 C，$\cos(\angle QA_1A_2+\angle QA_2A_1)=\cos(\pi-\angle A_1QA_2)=-\cos\angle A_1QA_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos\angle QA_1A_2\cdot\cos\angle QA_2A_1-\sin\angle QA_1A_2\cdot\sin\angle QA_2A_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，由 B 的分析知 $k_{QA_1}\cdot k_{QA_2}=\frac{9}{16}$，

又 $k_{QA_1}=\tan\angle QA_1A_2$，$k_{QA_2}=\tan(\pi-\angle QA_2A_1)=-\tan\angle QA_2A_1$，故 $\tan\angle QA_1A_2\cdot\tan\angle QA_2A_1=-\frac{9}{16}$，即 $\cos\angle QA_1A_2\cdot$

$\cos\angle QA_2A_1=-\frac{16}{9}\sin\angle QA_1A_2\cdot\sin\angle QA_2A_1$，

则$-\frac{16}{9}\sin\angle QA_1A_2\cdot\sin\angle QA_2A_1-\sin\angle QA_1A_2\cdot\sin\angle QA_2A_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\sin\angle QA_1A_2\cdot\sin\angle QA_2A_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{9}{25}=\frac{9\sqrt{2}}{50}$，故 **C 正确**.

对于 D，取点 C 关于 l 对称点 C'，则$|C'A|=|CP|=8$，故点 C' 的轨迹方程为$(x-5)^2+y^2=64$.

易知 $M(x_0,y_0)$ 为 CC' 的中点，则有$\begin{cases}x_0=\frac{-5+x_C'}{2},\\ y_0=\frac{y_C'}{2},\end{cases}$即$\begin{cases}x_C'=2x_0+5,\\ y_C'=2y_0,\end{cases}$即有$(2x_0+5-5)^2+(2y_0)^2=64$，化简得 $x_0^2+y_0^2=16$，所以动点 M 的轨迹是圆，故 **D 正确**. 故选 ACD.



15 s 速解　武汉大学——王梓秋

对于 B，由二级结论可直接得到$k_{QA_1}\cdot k_{QA_2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{16}$. 故 **B 错误**.

学霸点拨：当双曲线的焦点在 x 轴上时，A,B 是双曲线上关于原点对称的两个点，P 是双曲线上一点，当 PA,PB 的斜率都存在时，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$（$a$ 为实半轴长，b 为虚半轴长，e 为离心率）.

6. **ACD**　【解析】对于 A，由题意知$|OF|=c=\sqrt{6}$，$|OA|=b$，即$c^2+b^2=a^2=|AF|^2=12$，$a=|AF|=2\sqrt{3}$，则椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 **A 正确**.

对于 B，由于点 D 为椭圆上一点，左焦点为 F，所以$|DF|_{\min}=a-c=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$，故 **B 错误**.

对于 C，设 $D(m,n)$，所以圆 D 的方程为$(x-m)^2+(y-n)^2=4$，因为直线 OM,ON 的斜率都存在，且分别为 k_1,k_2，所以直线 $OM:y=k_1x$，直线 $ON:y=k_2x$，

又直线 OM,ON 与圆 D 均相切，所以有$\frac{|k_1m-n|}{\sqrt{1+k_1^2}}=2,\frac{|k_2m-n|}{\sqrt{1+k_2^2}}=2$，由$\frac{|k_1m-n|}{\sqrt{1+k_1^2}}=2$ 整理得$(m^2-4)k_1^2-2mnk_1+n^2-4=0$①，同理得$(m^2-4)k_2^2-2mnk_2+n^2-4=0$②，由①②可知，$k_1,k_2$ 为方程$(m^2-4)k^2-2mnk+n^2-4=0$ 的两个不同实根，其中 $m^2\neq4$.

又 D 在椭圆上，满足 $n^2=6\left(1-\frac{m^2}{12}\right)$，所以 $k_1k_2=\frac{n^2-4}{m^2-4}=\frac{6\left(1-\frac{m^2}{12}\right)-4}{m^2-4}=\frac{2-\frac{m^2}{2}}{m^2-4}=\frac{-\frac{1}{2}(m^2-4)}{m^2-4}=-\frac{1}{2}$，故 **C 正确**.

对于 D，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 C 知 $k_1k_2=\frac{y_1-0}{x_1-0}\cdot\frac{y_2-0}{x_2-0}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$，则 $y_1^2y_2^2=\frac{1}{4}x_1^2x_2^2$，又 $y_1^2=6\left(1-\frac{x_1^2}{12}\right)$，$y_2^2=6\left(1-\frac{x_2^2}{12}\right)$，所以 $y_1^2y_2^2=36\left(1-\frac{x_1^2}{12}\right)\left(1-\frac{x_2^2}{12}\right)=\frac{1}{4}x_1^2x_2^2$，整理得 $x_1^2+x_2^2=12$，所以 $y_1^2+y_2^2=6\left(1-\frac{x_1^2}{12}\right)+6\left(1-\frac{x_2^2}{12}\right)=12-6\left(\frac{x_1^2}{12}+\frac{x_2^2}{12}\right)=12-6=6$，

关键点

所以 $|OM|^2+|ON|^2=(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)=18$，则 $|OM||ON|\leqslant\frac{|OM|^2+|ON|^2}{2}=\frac{18}{2}=9$，当且仅当 $|OM|=|ON|$ 时等号成立，所以 $|OM||ON|$ 的最大值为 9，故 **D 正确**. 故选 ACD.

突破点 15　新定义曲线问题（对标常规曲线模型）

1. **AC**　【解析】对于 A，当 $x<0,y<0$ 时，曲线方程为 $-x^2=9+9y^2$，即 $x^2+9y^2=-9$，该方程无实数根，所以点 P 不可能在第三象限，故 **A 正确**.

对于 B，若点 P 在直线 $x+3y=0$ 上，则 $x=-3y$，与曲线 W 的方程联立得 $-3y|-3y|=9-9y|y|$，整理得 $9y|y|-9y|y|=9$，该方程无实数根，故 **B 错误**.

对于 C，当 $x>0,y>0$ 时，曲线 W 的方程可化为 $x^2=9-9y^2$，整理得 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，则 $a^2=9,b^2=1$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}$，则点 $A(-2\sqrt{2},0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 的左焦点，设右焦点为 F，由椭圆的定义可得 $|PA|+|PF|=2a=6$，则 $|PA|=6-|PF|$，所以 $|PA|+|PB|=6-|PF|+|PB|\geqslant 6-|BF|=6-\frac{1}{4}=\frac{23}{4}$，当且仅当 P,B,F 三点共线时取等号，故 **C 正确**.

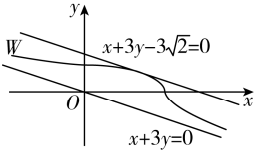
关键点

对于 D，将 $x=0$ 代入曲线 W 的方程，解得 $y=1$，将 $y=0$ 代入代入曲线 W 的方程，解得 $x=3$，

当 $x>0,y>0$ 时，曲线 W 的方程可化为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，

当 $x<0,y>0$ 时，曲线 W 的方程可化为 $y^2-\frac{x^2}{9}=1$，

当 $x>0,y<0$ 时，曲线 W 的方程可化为 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$，作出曲线 W 的大致图象如图所示，



由双曲线的几何性质可知直线 $x+3y=0$ 是曲线 W 的渐近线.

当 $x>0,y>0$ 时，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1,\\ x+3y+m=0,\end{cases}$ 得 $2y^2+\frac{2my}{3}+\frac{m^2}{9}-1=0$，

由判别式 $\Delta=\left(\frac{2m}{3}\right)^2-4\times2\times\left(\frac{m^2}{9}-1\right)>0$，解得 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$，

由 $x+3y=-m>0$，可得 $m<0$，所以 $-3\sqrt{2}<m<0$.

结合图象可知，若要直线 $x+3y+m=0$ 与曲线 W 有两个交点，则 m 的取值范围为 $(-3\sqrt{2},0)$，故 **D 错误**. 故选 AC.

2. **ACD** 【解析】对于 A，将 Γ 方程中的 x,y 互换可知 Γ 的方程不变，所以曲线 Γ 关于直线 $y=x$ 对称，故 **A 正确**.

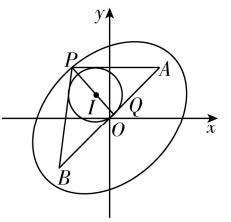
对于 B，设 $P(x,y)$，由 $3x^2+3y^2-2xy-8=0$，得 $3x^2+3y^2-8=2xy\leqslant x^2+y^2$，当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，则 $x^2+y^2\leqslant 4$，从而 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2$，故 **B 错误**.

关键点

对于 C，$(|PA|+|PB|)^2=\left[\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\right]^2=2(x^2+y^2)+4+2\sqrt{(x^2+y^2+2)^2-4(x+y)^2}=2(x^2+y^2)+4+2\sqrt{(x^2+y^2)^2-12(x^2+y^2)+36}=2(x^2+y^2)+4+2|(x^2+y^2)-6|=16=2(x^2+y^2)+4+2(6-x^2-y^2)=16$（提示：$x^2+y^2\leqslant 4$），则 $|PA|+|PB|=4$，是定值，故 **C 正确**.

对于 D，$|AB|=2\sqrt{2}<4=|PA|+|PB|$，则 Γ 是以 A,B 为焦点，4 为长轴长，$2\sqrt{2}$ 为焦距的椭圆.

因为 I 是 $\triangle PAB$ 的内心，Q 在 AB 上，所以 $\dfrac{|PA|}{|AQ|}=\dfrac{|PI|}{|IQ|}=\dfrac{|PB|}{|BQ|}$（提示：角平分线的性质），则 $\dfrac{|PI|}{|IQ|}=\dfrac{|PA|+|PB|}{|AQ|+|BQ|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，则 $|PI|=\sqrt{2}|QI|$，故 **D 正确**. 故选 ACD.



3. **ACD** 【解析】分析：根据三点共线可得直线 P_1P_2 过原点，联立直线与曲线的方程，设 $x_1>0,x_2<0$，解得 $x_1=\dfrac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$，$x_2=\dfrac{-\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$，即可根据弦长公式判断 A，B；根据三角函数的性质判断 C；利用换元法，结合判别式，判断 D.

依题意，心形线 C 的方程为 $x^2+y^2+y=\sqrt{x^2+y^2}$，过原点 $O(0,0)$，由 $\overrightarrow{OP_1}//\overrightarrow{OP_2}$，可知 O,P_1,P_2 三点共线，又 $x_1x_2\neq 0$，故 P_1P_2 斜率存在，可设直线 P_1P_2 的方程为 $y=tx$，联立 $\begin{cases}x^2+y^2+y=\sqrt{x^2+y^2},\\ y=tx,\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+t^2)x^2-\sqrt{1+t^2}|x|+tx=0$.

不妨设 $x_1>0,x_2<0$，则 $x_1=\dfrac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$，$x_2=\dfrac{-\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$，

$\therefore |P_1P_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{1+t^2}}{1+t^2}=2$，故 **A 正确**.

$|OP_1|\cdot|OP_2|=\sqrt{1+t^2}\cdot\left|\dfrac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}\right|\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot\left|\dfrac{-\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}\right|=\dfrac{1}{1+t^2}$，当 $t\neq 0$ 时，$|OP_1|\cdot|OP_2|\neq 1$，故 **B 错误**.

设点 $P(x,y)$ 在心形线 C 上，$\angle POx=\alpha$，角 α 以 x 轴的非负半轴为始边，则心形线 C 的方程转化为 $|OP|^2+|OP|\sin\alpha=|OP|$，即 $|OP|\cdot(|OP|+\sin\alpha-1)=0$，$\therefore |OP|=1-\sin\alpha\leqslant 2$，又 $x_1x_2\neq 0$，$\therefore |OP_1|+|OP_2|<4$，故 **C 正确**.

关键点

由 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2$，可知 $-2\leqslant y\leqslant 2$. 令 $m=\sqrt{x^2+y^2}$（$m\geqslant 0$），则心形线 C 的方程可化为 $m^2-m+y=0$，$\Delta=1-4y\geqslant 0$，$\therefore -2\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}$，当 $y=0$ 时，$m^2-m=0$，$\therefore m=0$ 或 $m=1$，可得 $x=\pm 1$ 或 $x=0$；当 $y=-1$ 时，方程无整数解；当 $y=-2$ 时，$m^2-m-2=0$，$\therefore m=2$（负值舍去），故 $x=0$. $\therefore C$ 上有 4 个整点 $(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,0)$，$(0,-2)$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

4. **AC** 【解析】对于 A，分析：根据题干定义列出曲线满足的方程，代入点 $(-m,-n)$，即可判断. 由题意，$|PF_1|\cdot|PF_2|=2$，则 $\sqrt{(m+\sqrt{2})^2+n^2}\cdot\sqrt{(m-\sqrt{2})^2+n^2}=2$，即 $[(m+\sqrt{2})^2+n^2][(m-\sqrt{2})^2+n^2]=4$，即 $(m^2+n^2+2)^2-8m^2=4$，将 $(-m,-n)$ 代入有 $[(-m)^2+(-n)^2+2]^2-8(-m)^2=4$ 成立，所以曲线 C 关于原点 O 成中心对称，**A 正确**；

对于 B，分析：由 $(m^2+n^2+2)^2-8m^2=4$，得 $n^2=\sqrt{8m^2+4}-m^2-2$，通过求 n^2 的最大值，从而解出 n 的取值范围. 由 $(m^2+n^2+2)^2-8m^2=4$，得 $n^2=\sqrt{8m^2+4}-m^2-2$，设 $\sqrt{8m^2+4}=t$，则 $t\geqslant 2$，所以 $n^2=t-\frac{1}{8}t^2-\frac{3}{2}=\frac{-t^2+8t-12}{8}=\frac{-(t-4)^2+4}{8}$，则当 $t=4$ 时，n^2 有最大值 $\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant n\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，**B 错误**；

对于 C，由 B 的分析可知，当 $n=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$S_{\triangle PF_1F_2}$ 有最大值，最大值为 $\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}\leqslant 1$，**C 正确**；

对于 D，分析：由 $|PF_1|+|PF_2|\geqslant 2\sqrt{|PF_1||PF_2|}=2\sqrt{2}$，可得当 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=4\sqrt{2}$ 时，$\triangle PF_1F_2$ 周长最小，但此时不能构成三角形，即无法取到最小值. $|PF_1|+|PF_2|\geqslant 2\sqrt{|PF_1||PF_2|}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=\sqrt{2}$ 时等号成立，$\triangle PF_1F_2$ 周长的最小值为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，而此时 $P(0,0)$，不能构成三角形，即无法取到最小值，**D 错误**. 故选 AC.

突破点 16　三次函数问题（抓图象的对称性）

1. **BCD** 【解析】对于 A，令 $f(x)=(x-1)^2(x+2)=0$，得 $x=1$ 或 $x=-2$，所以函数 $f(x)$ 有两个零点，故 **A 错误**.

对于 B，由 $f(x)=(x-1)^2(x+2)=x^3-3x+2$，得 $f'(x)=3x^2-3$. 令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故 **B 正确**.

对于 C，因为 $f(x)=x^3-3x+2$，$f(-x)=-x^3+3x+2$，得 $f(x)+f(-x)=4$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 中心对称，即函数 $f(x)$ 的图象具有对称中心，故 **C 正确**.

对于 D，函数 $f(x)$ 的图象在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率为 $k=f'(x_0)=3x_0^2-3$，得 $x_0^2=\dfrac{k+3}{3}$.

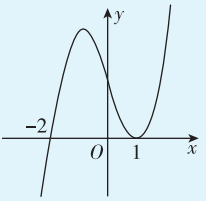
当 $k<-3$ 时，$x_0^2=\dfrac{k+3}{3}<0$，无实数解，此时函数 $f(x)$ 不存在斜率为 k 的切线；

当 $k=-3$ 时，$x_0^2=\dfrac{k+3}{3}=0$，得 $x_0=0$，此时函数 $f(x)$ 只有一条斜率为 k 的切线；

当 $k>-3$ 时，$x_0^2=\dfrac{k+3}{3}>0$，得 $x_0=\pm\sqrt{\dfrac{k+3}{3}}$，此时函数 $f(x)$ 有两条斜率为 k 的不同的切线，即曲线 $y=f(x)$ 上存在无数多对互相平行的切线，故 **D 正确**. 故选 BCD.

30 s 速解　武汉大学——王梓秋

对于 B，由数轴穿根法作出 $f(x)$ 的大致图象，由图可知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故 **B 正确**.



对于 C，三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq0)$ 的图象是中心对称图形，其对称中心的坐标为 $\left(-\dfrac{b}{3a},f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$，故可直接判断 **C 正确**.

2. **BD**　**【解析】**对于 A，当 $a=-1$ 时，$f(x)=x^3-x^2-x-1$，求导得 $f'(x)=3x^2-2x-1$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=1$，令 $f'(x)>0$，得 $x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $-\dfrac{1}{3}<x<1$，于是 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $x=-\dfrac{1}{3}$ 处取得极大值，$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-1<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，因此 $f(x)$ 只有一个零点，**A 错误**；

对于 B，$f'(x)=3x^2-2x+a$，当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$\Delta=4-12a\leqslant0$，则 $f'(x)\geqslant0$ 且不恒为 0 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，$f(x)$ 无极值点，**B 正确**；

对于 C，要使 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减，则 $f'(x)=3x^2-2x+a\leqslant0$ 恒成立，而不等式 $3x^2-2x+a\leqslant0$ 的解集不可能为 **R**，**C 错误**；

对于 D，由 $f\left(\frac{2}{3}-x\right)+f(x)=\left(\frac{2}{3}-x\right)^3-\left(\frac{2}{3}-x\right)^2+a\left(\frac{2}{3}-x\right)-1+x^3-x^2+ax-1=\frac{2}{3}a-\frac{58}{27}$，得 $f(x)$ 图象的对称中心的坐标为 $\left(\frac{1}{3},\frac{a}{3}-\frac{29}{27}\right)$，**D 正确**. 故选 BD.

15 s 速解　武汉大学——王梓秋

对于 D，由三次函数的性质可知 $f(x)$ 的图象的对称中心坐标为 $\left(\frac{1}{3},\frac{a}{3}-\frac{29}{27}\right)$，故 **D 正确**.

3. AD　【解析】对于 A，分析：利用导数判断函数 $f(x)$ 的单调性，从而判断极大值是否出现在原点位置. 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=6x^2-12ax=6x(x-2a)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2a$，由 $f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>2a$；由 $f'(x)<0$，得 $0<x<2a$，故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(2a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,2a)$ 上单调递减，$f(x)_{极大值}=f(0)$，因此 $x_1=0$，故 **A 正确**.

对于 B，分析：由 A 分析可知 $f(x)$ 的极大值和极小值均小于 0，结合自变量趋向正无穷时函数值的变化趋势，判断出函数 $f(x)$ 的零点仅有一个. 由 A 分析知，当 $a>0$ 时，$f(x)_{极小值}=f(2a)=-8a^3-1<0$，$f(x)_{极大值}=f(0)=-1<0$，又当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以函数 $f(x)$ 只有一个零点，故 **B 错误**.

对于 C，分析：先推断出当 $a<0$ 时 $f(x)$ 的单调区间，从而根据单调性比较大小. 当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<2a$ 或 $x>0$；由 $f'(x)<0$，得 $2a<x<0$，

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2a)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(2a,0)$ 上单调递减，由 $2a<\frac{3a}{2}<\frac{a}{2}<0$，得 $f\left(\frac{a}{2}\right)<f\left(\frac{3a}{2}\right)$，故 **C 错误**.

对于 D，分析：已知函数值相等，展开表达式，化简判断即可. 当 $a<0$ 时，$x_1=2a$，由 $f(x_1)=f(m)$，得 $2m^3-6am^2-1=-8a^3-1$，整理得 $m^3-3am^2+4a^3=0$，则 $(m-2a)^2(m+a)=0$，而 $m\neq x_1$，因此 $m=-a$，故 **D 正确**. 故选 AD.

4. ABD　【解析】由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax+b$，可得 $f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$.

对于 A，令 $f'(x)=(x-1)(x-a)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=a$，因为 $a>1$，所以当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，当 $1<x<a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减，当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，故 **A 正确**.

对于 B，因为 $f'(x)=x^2-(a+1)x+a$，其图象的对称轴方程为 $x=\frac{a+1}{2}$，又 $f'(x_1)=f'(x_2)$，且 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1+x_2=a+1$，故 **B 正确**.

对于 C，当 $a=3$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+b$，则 $f(4-x)=$

$\frac{1}{3}(4-x)^3-2(4-x)^2+3(4-x)+b=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+\frac{4}{3}+b$，

所以 $f(x)+f(4-x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+b\right)+\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+\frac{4}{3}+b\right)=\frac{4}{3}+2b$，

由 $f(x)+f(4-x)=0$，即 $\frac{4}{3}+2b=0$，可得 $b=-\frac{2}{3}$，故 **C 错误**.

对于 D，当 $a>1$ 时，$f(x)_{极大值}=f(1)$，$f(x)_{极小值}=f(a)$，且 $f(1)>f(a)$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以 $\forall a>1$，$\exists b\in\mathbf{R}$，使 $f(1)>0$ 且 $f(a)<0$，所以 $f(x)$ 有 3 个零点，故 **D 正确**. 故选 ABD.



15 s 速解　武汉大学——王梓秋

对于 C，由三次函数的性质可知 $f(x)$ 图象的对称中心坐标为 $(2,f(2))$，即 $\left(2,b+\frac{2}{3}\right)$，所以 $f(x)+f(4-x)=2b+\frac{4}{3}$，当且仅当 $b=-\frac{2}{3}$ 时，$f(x)+f(4-x)=0$，与 $\forall b\in\mathbf{R}$ 矛盾，故 **C 错误**.

5. **ABD**　【解析】对于 A，由 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，得 $f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+b-\frac{a^2}{3}$，所以 $f'(x)$ 的极小值点为 $-\frac{a}{3}$，没有极大值点.

$f'(x_0)=f'\left(-\frac{a}{3}\right)=b-\frac{a^2}{3}$，又 $f(x_0)=f\left(-\frac{a}{3}\right)=0$，所以 $f\left(-\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+1=0$，又 $a>0$，故 $b=\frac{2a^2}{9}+\frac{3}{a}$，故 **A 正确**；

对于 B，因为 $f(x)$ 有极值，所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 有两个相异实根，故 $\Delta>0$，则 $4a^2-12b=4a^2-\frac{8a^2}{3}-\frac{36}{a}=\frac{4a^2}{3}-\frac{36}{a}>0$，且 $a>0$，解得 $a>3$，故 **B 正确**；

关键点

对于 C，由 A，B 选项的分析知 $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{2a\sqrt{a}}{9}+\frac{3}{a\sqrt{a}}$，令 $t=a\sqrt{a}$，$t>3\sqrt{3}$，设 $g(t)=\frac{2t}{9}+\frac{3}{t}$ $(t>3\sqrt{3})$，则 $g'(t)=\frac{2}{9}-\frac{3}{t^2}=\frac{2t^2-27}{9t^2}$，当 $t\in\left(3\sqrt{3},+\infty\right)$ 时，$g'(t)>0$，从而 $g(t)$ 在 $\left(3\sqrt{3},+\infty\right)$ 上单调递增，故 $g(t)>g(3\sqrt{3})=\sqrt{3}$，即 $\frac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{3}$，则 $\frac{b^2}{a}>3$，故 **C 错误**；

对于 D，由 A，B 选项可知 $f'(x_0)=f'\left(-\frac{a}{3}\right)=b-\frac{a^2}{3}=\frac{2a^2}{9}+\frac{3}{a}-\frac{a^2}{3}=\frac{3}{a}-\frac{a^2}{9}=\frac{27-a^3}{9a}<0$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

6. **ABD**　【解析】由 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，得 $f'(x)=3x^2+2bx+c$. 因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，在 $[0,2]$ 上单调递减，$x\in\mathbf{R}$，所以方程 $f'(x)=0$ 有两个解，

其中一个根为 0，即 $f'(0)=0$，解得 $c=0$，另一根大于等于 2，由 $3x+2b=0$ 得 $x=-\frac{2b}{3}$，令 $-\frac{2b}{3}\geqslant 2$，则 $b\leqslant -3$. 易知 $f(x)=x^3+bx^2+d$，又方程 $f(x)=0$ 有 3 个不等实根，它们分别为 m，n，2，所以 $f(x)=(x-2)(x-m)(x-n)=x^3-(m+n+2)x^2+(2m+2n+mn)x-2mn$. 又因为 $f(0)=d\neq 0$，所以 m，$n\neq 0$.

由 $2m+2n+mn=0$ 得 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}$ 为定值（提示：等式两边同时除以 mn），故 **A，B 正确**.

易知 $\begin{cases}-b=m+n+2,\\ d=-2mn,\end{cases}$ 由 $f(2)=0$ 得 $8+4b+d=0$，则 $d=-8-4b$. 当 $b=-3$ 时，$d=-8+12=4$，此时 $f(x)=x^3-3x^2+4=(x-2)^2(x+1)$，所以 $f(x)=0$ 只有 2 个根，与 $f(x)=0$ 有 3 个不等实根矛盾，所以 $b<-3$.

因为 $f(1)=1+b+d=1+b-8-4b=-3b-7$，$b<-3$，所以 $f(1)>2$，故 **C 错误**.

因为 $(m-n)^2=(m+n)^2-4mn=(-b-2)^2+2d=(-b-2)^2+2(-8-4b)=(b-2)^2-16$，因为 $b<-3$，所以 $(b-2)^2-16>(-3-2)^2-16=9$，所以 $|m-n|>3$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

突破点 17　逐项分析函数的单调性、极值、最值（求导/画草图）

1. **AC**　【解析】对于 A，$f'(x)=2ax+\frac{2}{x}$，$x>0$，当 $a=0$ 时，$f(x)=2\ln x$，有唯一零点，当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)\to -\infty$，当 $x\to +\infty$ 时，$f(x)\to +\infty$，由零点存在定理可得 $f(x)$ 有唯一的零点，综上，$a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 有唯一的零点，故 **A 正确**；

对于 B，C，当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，可得 $x=\sqrt{-\frac{1}{a}}$，易得函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{1}{a}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\sqrt{-\frac{1}{a}},+\infty\right)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 存在极大值，不存在极小值，故 **B 错误**，**C 正确**；

对于 D，因为 $f(x)<0$ 恒成立，所以 $a<0$，可得当 $x=\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 时，函数取得极大值，此时 $f\left(\sqrt{-\frac{1}{a}}\right)=-1-\ln(-a)$，所以 $-1-\ln(-a)<0$，则 $a<-\frac{1}{e}$，故 **D 错误**. 故选 AC.

2. **BC**　【解析】分析：先根据图象关于 y 轴对称得 $f(x)$ 为偶函数，可判断 A；求出 $x>0$ 时的解析式，再借助导数分析单调性与极值点，可判断 B，C；将方程根的问题转化为两个函数图象的交点问题，可判断 D. 对于 A，因为 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，所以 $f(x)=f(-x)$，即 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(-e)=f(e)$，而 $f(-e)=(-e+1)\ln\frac{1}{e}=e-1$，因此 $f(e)+f(-e)=$

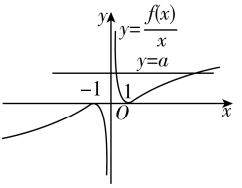
$2f(-e)=2(e-1)\neq 2$，故 **A 错误**.

对于 B，当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)=f(-x)=(-x+1)\ln\dfrac{1}{x}=(x-1)\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+(x-1)\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$，令 $g(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 易知 $g(1)=0$，因此当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增. 综上，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$，故 **B 正确**.

对于 C，根据选项 B 中的单调性可知 $x=-1$ 和 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的极小值点，因此 $f(x)$ 有 2 个极小值点，故 **C 正确**.

对于 D，易知 $x\neq 0$，则方程 $f(x)-ax=0$ 等价于 $a=\dfrac{f(x)}{x}$，当 $x>0$ 时，$f(x)=(x-1)\ln x$，令 $k(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(x-1)\ln x}{x}(x>0)$，$k'(x)=\dfrac{x+\ln x-1}{x^2}$，令 $m(x)=x+\ln x-1(x>0)$，易知 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $m(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$m(x)<0$，即 $k'(x)<0$，$k(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$m(x)>0$，即 $k'(x)>0$，$k(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 又 $k(1)=0$，当 $x\to 0^+$ 时，$k(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$k(x)\to+\infty$. 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $k(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 是奇函数，



则 $k(x)$ 的图象关于原点对称，作出函数 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 和 $y=a$ 的大致图象如图所示，由图可知，函数 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 和 $y=a$ 的图象始终有 2 个交点，因此，不存在 $a\in\mathbf{R}$ 使得方程 $f(x)-ax=0$ 恰有 1 个实根，故 **D 错误**. 故选 BC.

3. BD 【解析】对于 A，由题知 $\cos x>0$，则 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 **A 错误**.

对于 B，由 A 选项知 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，又 $f(-x)=\ln[\cos(-x)]-|-x|=\ln(\cos x)-|x|=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数，故 **B 正确**.

对于 C，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\ln(\cos x)-|x|=\ln(\cos x)-x$，$f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}-1=-\tan x-1<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递

减，故 **C 错误**.

对于 D，$f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$，

当 $k=0$ 时，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

设 $g(x)=f(x)+\pi=\ln(\cos x)-|x|+\pi$，则 $g(-x)=$ 关键点

$\ln[\cos(-x)]-|-x|+\pi=\ln(\cos x)-|x|+\pi=g(x)$，故 $g(x)$ 是

偶函数，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)=\ln(\cos x)-x+\pi$，$g'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}-$

$1=-\tan x-1<0$，则 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$g(0)=$

$\ln(\cos 0)-0+\pi=\pi>0$，当 $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 时，$g(x)\to-\infty$，故存在

$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $g(x_0)=0$，即此时 $g(x)$ 有 1 个零点，根据

偶函数的性质可知当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时 $g(x)$ 也有 1 个零点. 当

$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$\cos x\in(0,1]$，$\ln(\cos x)\leqslant 0$，$-x+\pi<-\frac{3\pi}{2}+\pi=-\frac{\pi}{2}<$ 关键点

0，则 $g(x)<0$，无零点. 根据偶函数的性质，当 $k\neq 0$ 时，$g(x)$

无零点，所以 $y=f(x)+\pi$ 有且仅有 2 个零点，故 **D 正确**. 故

选 BD.

4. **BCD** 【解析】对于 A，设 $S(x)=f(x)+g(x)=x^3-x^2-2x$，则

$S'(x)=3x^2-2x-2$，若 $f(x)$，$g(x)$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则

$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 $f'(x)+g'(x)=$ 关键点

$S'(x)\geqslant 0$ 恒成立，但 $S'(x)=3x^2-2x-2$ 为二次函数，对应一

元二次方程的判别式 $\Delta=28>0$，故存在 x 使 $S'(x)<0$，矛盾，

故 **A 错误**.

对于 B，取 $f(x)=-3x$，则 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，于是 $g(x)=$

x^3-x^2+x，$g'(x)=3x^2-2x+1$，对应一元二次方程的判别式 $\Delta_1=$

$-8<0$，则 $g'(x)>0$ 恒成立，$g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上增函数，满足条件，故

B 正确.

对于 C，取 $f(x)=2(x^3-x^2-2x)$，$g(x)=-(x^3-x^2-2x)$，可知在

同一区间上，$f(x)$，$g(x)$ 单调性相反. 对于 $f(x)=2(x^3-x^2-2x)$，

求导得 $f'(x)=2(3x^2-2x-2)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$. 当 $x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增，此时 $g(x)$ 单调递减；当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，

$f(x)$ 单调递减，此时 $g(x)$ 单调递增；当 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增，此时 $g(x)$ 单调递减，故 x_2 为 $f(x)$ 的极小值

点，同时是 $g(x)$ 的极大值点，故 **C 正确**.

对于 D，取 $f(x)=x^4$，显然 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在最小值 0；此时

$g(x)=-x^4+x^3-x^2-2x$ 是定义域为 $\mathbf{R}$，最高次项系数为负的四

次函数，必存在最大值，符合条件，故 **D 正确**. 故选 BCD.

5. **ABD** 【解析】对于 A，由 $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}f(x)+\frac{x-1}{x+1}e^{\frac{1}{2}x}f'(x)=e^{\frac{x^2}{4}}$，令

$x=1$，可得$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}f(1)+\frac{0}{2}\times e^{\frac{1}{2}}f'(1)=e^{\frac{1}{4}}$，解得$f(1)=2e^{-\frac{1}{4}}$，故**A 正确**.

对于 B，因为$g(x)=(x-1)e^{\frac{1}{2^x}}f(x)$，

所以$g'(x)=(x-1)'\cdot[e^{\frac{1}{2^x}}f(x)]+(x-1)[e^{\frac{1}{2^x}}f(x)]'$

$=e^{\frac{1}{2^x}}f(x)+(x-1)\left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2^x}}f(x)+e^{\frac{1}{2^x}}f'(x)\right]$

$=e^{\frac{1}{2^x}}\left[f(x)+\frac{x-1}{2}f(x)+(x-1)f'(x)\right]$

$=e^{\frac{1}{2^x}}\left[\frac{x+1}{2}f(x)+(x-1)f'(x)\right]$

$=(x+1)e^{\frac{1}{2^x}}\left[\frac{1}{2}f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)\right]=(x+1)e^{\frac{x^2}{4}}$，故 **B 正确**.

对于 C，D，由$g(x)=(x-1)e^{\frac{1}{2^x}}f(x)$，可得$f(x)=\frac{g(x)}{(x-1)e^{\frac{1}{2^x}}}$

关键点

$(x\neq1)$，$g'(x)=(x+1)e^{\frac{x^2}{4}}$.

当$x\in(0,1)$或$x\in(1,+\infty)$时，

$$f'(x)=\frac{g'(x)(x-1)e^{\frac{1}{2^x}}-g(x)\left[\frac{1}{2}(x-1)+1\right]e^{\frac{1}{2^x}}}{(x-1)^2e^x}$$

$$=\frac{(x+1)e^{\frac{x^2}{4}}(x-1)-\frac{1}{2}g(x)(x+1)}{(x-1)^2e^{\frac{1}{2^x}}}$$

$$=\frac{(x+1)\left[(x-1)e^{\frac{x^2}{4}}-\frac{1}{2}g(x)\right]}{(x-1)^2e^{\frac{1}{2^x}}}.$$

设$h(x)=(x-1)e^{\frac{x^2}{4}}-\frac{1}{2}g(x)$，$x>0$，

则$h'(x)=\left[\frac{x}{2}(x-1)+1\right]e^{\frac{x^2}{4}}-\frac{1}{2}g'(x)=\left[\frac{x}{2}(x-1)+1\right]e^{\frac{x^2}{4}}-\frac{1}{2}(x+1)e^{\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}(x-1)^2e^{\frac{x^2}{4}}\geqslant0$，且仅有$h'(1)=0$，

所以$h(x)$单调递增，又$h(1)=0-\frac{1}{2}g(1)=0$，所以当$0<x<1$时，$h(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减；当$x>1$时，$h(x)>0$，即$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，又$f(x)$，$f'(x)$均连续且$f'(1)=0$，故$f(x)$在$x=1$处取得极小值，无极大值，故 **C 错误**，**D 正确**. 故选 ABD.