题型强化 · 填空

填空小卷

填空小卷 1

12. 82　【解析】本题考查数列公共项的应用.

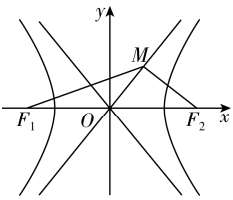
设 $a_k=b_m, m\in\mathbf{N}^*, k\in\mathbf{N}^*$，则 $9k-8=3^m+1, k=3^{m-2}+1$，所以 $m\geqslant 2$，当 $m=6$ 时，$\{c_n\}$ 取第 5 项，此时 $k=82$.

13. $\sqrt{7}$　卡住就看突破点 22 找思路、做练习

【解析】本题考查双曲线的离心率和渐近线.

分析：已知双曲线的离心率，结合垂直关系列出双曲线基本量之间的关系，从而求解比值.

不妨设 $F_2(c,0)$，由双曲线的对称性，不妨取双曲线的一条渐近线 $bx-ay=0$，作出符合题意的图形，如图，



则 $|MF_2|=\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=b$，$|OM|=\sqrt{|OF_2|^2-|MF_2|^2}=a$，

又离心率 $e=\dfrac{c}{a}=2$，所以 $c=2a$，即 $c^2=4a^2$，$b^2=4a^2-a^2=3a^2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle MOF_2$ 中，$\cos\angle MF_2O=\dfrac{b}{c}$. 在 $\triangle MF_1F_2$ 中，$|MF_1|^2=|MF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|MF_2|\cdot|F_1F_2|\cos\angle MF_2F_1=b^2+4c^2-2b\cdot 2c\cdot\dfrac{b}{c}=7a^2$，所以 $\dfrac{|MF_1|}{|OM|}=\dfrac{\sqrt{7a^2}}{a}=\sqrt{7}$.

14. 47　$\dfrac{1}{6}$　卡住就看突破点 20 找思路、做练习

【解析】本题考查排列组合与古典概型的计算.

$m=|a-b|$ 最小等价于 a,b 在数轴上的距离最近，则 a,b 百

关键点

位上的数字相差为 1，且百位数大的数，后两位组成的两位数尽量小，百位数小的数，后两位组成的两位数尽量大，则可能的情况（a,b 不分前后顺序）为 $(387,456)$，$(487,536)$，$(587,634)$，$(685,734)$，$(765,834)$，对应的 m 依次为 69，49，47，49，69，故 m 的最小值为 47.

将 3，4，5，6，7，8 随机排成一行，有 A_6^6 种情况，若要 $m<100$，则 a,b 百位上的数字相差为 1，有 10 种情况（易错：m 是两个数差的绝对值，注意有 $a>b$ 和 $a<b$ 两种情况），十位选出的两个数字，百位数大的对应的十位数小，百位数小的对应的十位数大，有 C_4^2 种情况，剩下的两个数字排在个位，有 A_2^2 种情况. 综上，$m<100$ 的概率为 $\dfrac{10\times C_4^2\times A_2^2}{A_6^6}=\dfrac{120}{720}=\dfrac{1}{6}$.

填空小卷 2

12. $\sqrt{7}$　【解析】本题考查半角公式.

由 $2\cos 2\alpha-\cos\alpha=1$，得 $4\cos^2\alpha-\cos\alpha-3=0$，解得 $\cos\alpha=1$ 或 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

又 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}$，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sqrt{7}$.

13. $\frac{3}{8}$　卡住就看突破点 20 找思路、做练习

【解析】本题考查对数的运算、古典概型.

因为 $a,b\in\{2,3,4,9\}$，所以 a 有 4 种选法，b 也有 4 种选法，总的样本点有 $4\times4=16$（个）.

若 $\log_a b$ 为整数，则当 $a=2$ 时，得 $b=2$ 或 4，则 $\log_a b=1$ 或 2，有 2 个样本点；当 $a=3$ 时，得 $b=3$ 或 9，则 $\log_a b=1$ 或 2，有 2 个样本点；当 $a=4$ 时，得 $b=4$，则 $\log_a b=1$，有 1 个样本点；当 $a=9$ 时，得 $b=9$，则 $\log_a b=1$，有 1 个样本点. 所以满足 $\log_a b$ 为整数的样本点有 6 个，所以 $\log_a b$ 为整数的概率为 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

14. 1　卡住就看突破点 24 找思路、做练习

【解析】本题考查公切线问题.

分析：从直线同时与两个函数的图象相切入手，得到两个函数图象在切点处的导数值都等于直线 l 的斜率，再结合切点在切线上，建立等量关系进行求解.

设直线 l 与 $f(x)=e^x$ 的图象相切于点 $A(x_1,e^{x_1})$，直线 l 与 $g(x)=\sqrt{x+\frac{3}{4}}$ 的图象相切于点 $B\left(x_2,\sqrt{x_2+\frac{3}{4}}\right)$. 求导得 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{3}{4}}}\left(x>-\frac{3}{4}\right)$，则 $f'(x_1)=e^{x_1}$，$g'(x_2)=\frac{1}{2\sqrt{x_2+\frac{3}{4}}}$，则 $\begin{cases}a=e^{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2+\frac{3}{4}}},\\ e^{x_1}=ax_1+b,\\ \sqrt{x_2+\frac{3}{4}}=ax_2+b,\end{cases}$ 则 $b=e^{x_1}-x_1e^{x_1}=\sqrt{x_2+\frac{3}{4}}-\frac{x_2}{2\sqrt{x_2+\frac{3}{4}}}$，令 $t=\sqrt{x_2+\frac{3}{4}}>0$，则 $x_2=t^2-\frac{3}{4}$，$e^{x_1}=\frac{1}{2t}$，$x_1=-\ln(2t)$，得 $b=\frac{1}{2t}[1+\ln(2t)]=\frac{t}{2}+\frac{3}{8t}$（提示：将所得等式进行变量代换消去切点横坐标，从而将参数 b 写成单一变量的表达式），整理可得 $\ln(2t)-t^2+\frac{1}{4}=0$.

设 $h(t)=\ln(2t)-t^2+\frac{1}{4}$，$t>0$，$h'(t)=\frac{1}{t}-2t$，当 $t\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$h'(t)>0$，所以 $h(t)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递增；当 $t\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(t)<0$，所以 $h(t)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递减. 故 $h(t)_{\max}=h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{4}>0$，而 $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln3-\frac{1}{2}>0$，$h\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{5}{4}-\frac{e^2}{4}<0$，所以 $\exists t_0\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{e}{2}\right)$ 使得

$h(t_0)=0$，由对勾函数的单调性可知 $b=\frac{t}{2}+\frac{3}{8t}$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{e}{2}\right)$ 上单调递增，此时 $b=\frac{t}{2}+\frac{3}{8t}<\frac{e}{4}+\frac{3}{4e}<1$. 又当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$h\left(\frac{1}{2}\right)=0$，此时 $b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$. 综上，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$b_{max}=1$.

填空小卷 3

12. 2 【解析】本题考查三角恒等变换求值问题.

$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=\sin^2\alpha\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha\sin^2\alpha=2$.

13. 3π　卡住就看突破点 19 找思路、做练习

【解析】本题考查三棱锥外接球的表面积.

分析：利用面面垂直的性质定理分析，可将三棱锥补形为正方体，结合正方体的外接球及球的表面积公式求解即可.

已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β，交线为 l，$AC\perp l$，且 $AC\subset\alpha$，所以 $AC\perp$ 平面 β，同理，$BD\perp$ 平面 α.

因为 $AB=AC=BD=1$，所以可将三棱锥 $C-ABD$ 补成一个棱长为 1 的正方体，则三棱锥 $C-ABD$ 的外接球与正方体的外接球相同.

正方体的体对角线的长度为 $\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$，即正方体的外接球的直径 $2R=\sqrt{3}$，故 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以三棱锥 $C-ABD$ 外接球的表面积 $S=4\pi R^2=3\pi$.

14. 3　卡住就看突破点 23 找思路、做练习

【解析】本题考查直线与双曲线的位置关系、双曲线的中点弦.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，可得 $\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$，$\frac{x_2^2}{4}-y_2^2=1$，两式相减，可得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}$（提示：由题知是双曲线的弦中点问题，可考虑使用点差法）.

因为 $k_{AB}=-\frac{3}{4}$，可得 $\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{3}{4}$，所以 $x_1+x_2=-3(y_1+y_2)$.

设 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，所以 $x_0=-3y_0$.

由点 $M(x_0,y_0)$ 在 $l:3x+4y-5=0$ 上，可得 $3x_0+4y_0-5=0$，则 $3\cdot(-3y_0)+4y_0-5=0$，即 $-5y_0=5$，解得 $y_0=-1$，所以 $x_0=3$，即 $M(3,-1)$. 又因为 $M(3,-1)$ 在直线 $m:x+ty=0$ 上，所以 $3-t=0$，解得 $t=3$.

填空小卷 4

12. 0 【解析】本题考查函数的极值点问题.

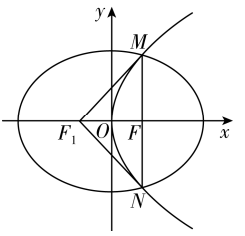
依题意，$f'(x)=x^2-4$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=-2$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $-2<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. 所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，在 $x=2$ 处取得极小值，所以函

数 $f(x)$ 的所有极值点之和为 $-2+2=0$.

13. $\sqrt{2}-1$　卡住就看突破点 22 找思路、做练习

【解析】本题考查椭圆和抛物线的定义及几何性质.

不妨令 M 在第一象限. 如图，因为 $\triangle F_1MN$ 是等腰直角三角形，且由对称性易知 F 为 MN 中点，所以 $\triangle MFF_1$ 为等腰直角三角形.



设 $|FF_1|=x=2c$，则 $|MF_1|+|MF|=(\sqrt{2}+1)x=2a$，则 E_1 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

14. 6　卡住就看突破点 19 找思路、做练习

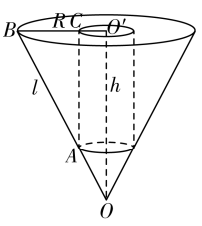
【解析】本题考查多面体内接球问题.

分析：求出满足条件的小球的半径，再由平行于底面的截面图可求出相邻两个小球球心与底面圆圆心投影连线的夹角，即可得解.

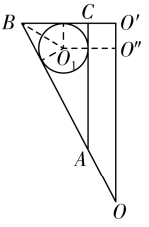
如图①，设圆锥底面半径为 R，高为 h，母线长为 l，则 $R^2=l^2-h^2=(4+2\sqrt{3})^2-(3+2\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，解得 $R=2+\sqrt{3}$.

由小球与圆柱侧面、圆锥侧面、圆锥底面相切，作轴截面如图②所示，易知 $\triangle ABC\backsim\triangle OBO'$，则 $\dfrac{CO'}{BO'}=\dfrac{OA}{OB}$，所以 $OA=\dfrac{1\times(4+2\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=2$，即 $AB=OB-OA=2+2\sqrt{3}$，则 $\angle BAC=30°$，设圆 O_1 的半径为 r_1，则 $BC=\sqrt{3}r_1+r_1=1+\sqrt{3}$，解得 $r_1=1$，即小球的半径为 1.

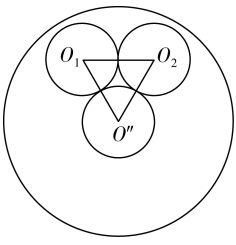
作过球 O_1 的球心且与圆锥底面平行的截面图，如图③，易知 $\triangle O''O_1O_2$ 为等边三角形，所以 $\angle O_1O''O_2=60°$，由 $\dfrac{360°}{60°}=6$ 可知，这样的小球最多能放入 6 个.



图①



图②



图③

填空小卷 5

12. $\sqrt{2}$　**【解析】**本题考查圆锥的轴截面、侧面积、底面积.

设圆锥的底面半径为 r，则其母线长 $l=\sqrt{2}r$，该圆锥的底面积为 πr^2，侧面积为 $\pi rl=\sqrt{2}\pi r^2$，所以其侧面积与底面积的比值为 $\dfrac{\sqrt{2}\pi r^2}{\pi r^2}=\sqrt{2}$.

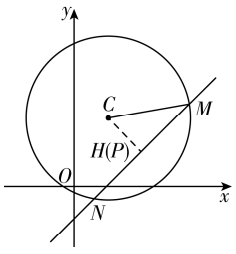
13. 8　卡住就看突破点 21 找思路、做练习

【解析】本题考查求解圆内动弦问题、向量数量积的最小值.

圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=6$ 的圆心为 $C(1,2)$，半径 $r=\sqrt{6}$.

直线方程 $mx-y-2m+1=0$ 可化为 $m(x-2)-(y-1)=0$，可知直线恒过定点 $P(2,1)$.

连接 CP，由于 $|CP|=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}<r$，故点 P 在圆内，直线与圆恒相交于两点 M，N. 如图，设弦 MN 的中点为 H，连接 CH，则 $CH\perp MN$，从而 $\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{HC}$.



$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HN})\cdot(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC})=2\overrightarrow{MH}\cdot(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC})=2|\overrightarrow{MH}|^2+2\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{HC}=2|\overrightarrow{MH}|^2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MN}|^2$.

过圆内定点 P 的弦中，当弦与 CP 垂直时弦长 $|\overrightarrow{MN}|$ 最短，此时圆心到直线 MN 的距离 $d=|CP|=\sqrt{2}$，最短弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{6-2}=4$. 故 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}\times4^2=8$.

14. $\sqrt{2}$　卡住就看突破点 24 找思路、做练习

【解析】本题考查利用导数研究函数图象的切线问题.

由题可知 $\frac{1}{a^3}e^{a^2-b}+2a^2=e^{-3\ln a}e^{a^2-b}+2a^2=e^{a^2-b-3\ln a}+2a^2=6\ln a+2b+1$，所以 $e^{a^2-b-3\ln a}+2(a^2-b-3\ln a)-1=0$.

令 $f(x)=e^x+2x-1$，可得 $f'(x)=e^x+2>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又因为 $f(0)=0$，所以 $a^2-3\ln a=b$，

则 $\sqrt{(a-c)^2+(b+c)^2}=\sqrt{(a-c)^2+(a^2-3\ln a+c)^2}$，表示函数 $g(x)=x^2-3\ln x$，$x>0$ 图象上的点到直线 $y=-x$ 上一点的距离，则其最小值为 $g(x)$ 的图象与直线 $y=-x$ 平行的切线到直线 $y=-x$ 的距离.

设 $g(x)$ 的图象与直线 $y=-x$ 平行的直线相切时，切点为 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0>0$，由 $g'(x)=2x-\frac{3}{x}$，可得 $g'(x_0)=2x_0-\frac{3}{x_0}$，令 $2x_0-\frac{3}{x_0}=-1$，解得 $x_0=1$（负值舍去），可得 $y_0=1$，即切点为 $P(1,1)$，则切点 $P(1,1)$ 到直线 $y=-x$ 的距离 $d=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，即 $\sqrt{(a-c)^2+(b+c)^2}$ 的最小值是 $\sqrt{2}$.

填空小卷 6

12. 20　**【解析】**本题考查二项展开式中指定项的系数.

由于 $(x^3+3x^2+3x+1)^2=[(x+1)^3]^2=(x+1)^6$，而 $(x+1)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}$，令 $6-r=3$，得 $r=3$，则 $(x^3+3x^2+3x+1)^2$ 的展开式中 x^3 的系数为 $C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$.

13. $3x+4y-7=0$　卡住就看突破点 23 找思路、做练习

【解析】本题考查由弦中点求弦所在直线的方程.

由题意知，直线 AB 的斜率存在且不为 0，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$.

因为点 A,B 在椭圆上，所以 $\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{6}=1$，$\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{6}=1$，

两式相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{8}=-\frac{y_1^2-y_2^2}{6}$，即 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}$，整理得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=$

关键点

$-\frac{3}{4}$，所以直线 AB 的斜率为 $-\frac{3}{4}$，则直线 AB 的方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x+4y-7=0$.

14. 6　16　卡住就看突破点 18 找思路、做练习

【解析】本题考查等差数列与等比数列的综合应用.

当 $20\leqslant 2m$，即 $m\geqslant 10$ 时，$a_{20}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{32}$，不符合题意.

当 $20>2m$，即 $m<10$ 时，$20-2m$ 为偶数，所以 $a_{20}=a_{20-2m}$.

当 $20-2m>2m$，$m\geqslant 3$，且 $m\in\mathbf{N}^*$ 时，$m=3$ 或 $m=4$. 当 $m=3$ 时，$a_{20}=a_{20-6}=a_{14}=a_{14-6}=a_8=a_{8-6}=a_2=32\times\frac{1}{2}=16$，不符合题意.

当 $m=4$ 时，$a_{20}=a_{20-8}=a_{12}=a_{12-8}=a_4=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=8$，不符合题意.

故 $20-2m\leqslant 2m$，又 $20-2m$ 为偶数，所以 $a_{20}=a_{20-2m}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20-2m}{2}}=2$，解得 $m=6$.

综上，当 $a_{20}=2$ 时，$m=6$.

当 $n>2m$ 时，$a_n=a_{n-2m}$，则数列 $\{a_n\}$ 是周期为 $2m$ 的数列，所以求 m 的最小值时，只需考虑 $n\leqslant 2m$ 即可.

当 $n\leqslant 2m$ 时，奇数项构成首项 $a_1=12$，公差为 -2 的等差数列，偶数项构成首项为 $a_2=16$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

当 $n=2k$，$k\leqslant m$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，

$$S_n=S_{2k}=12k+\frac{k(k-1)}{2}\times(-2)+\frac{16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]}{1-\frac{1}{2}}=-k^2+13k-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}+32,$$

$$S_{2k-1}=S_{2k}-32\times\left(\frac{1}{2}\right)^k=-k^2+13k-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-6}+32,$$

因为当 $k=15$ 时，$S_{30}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}>0$，$S_{29}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^9>0$，当 $k=16$ 时，$S_{32}=-16-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}<0$，$S_{31}=-16-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}<0$，

所以若存在 n，使得 $S_n<0$，则 $m\geqslant 16$，故 m 的最小值为 16.

填空重难突破

突破点 18　子数列问题（抓规律）

1. -8　114　【解析】由题可知，$a_{2k+1}=2a_{2k}+1$，$a_{2k}=a_{2k-1}-3$，则 $a_{2k+1}=2(a_{2k-1}-3)+1=2a_{2k-1}-5\Rightarrow a_{2k+1}-5=2(a_{2k-1}-5)$，又 $a_1-5=-4\neq 0$，所以 $\{a_{2k-1}-5\}$ 是以 2 为公比，-4 为首项的等比数列，即 $a_{2k-1}-5=-4\cdot 2^{k-1}\Rightarrow a_{2k-1}=-4\cdot 2^{k-1}+5$，则 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=\frac{-4(1-2^{10})}{1-2}+5\times 10=54-2^{12}$.

由 $a_{2k}=a_{2k-1}-3$，$a_{2k-1}=2a_{2k-2}+1$（$k\geqslant 2$），得当 $k\geqslant 2$ 时，$a_{2k}=a_{2k-1}-3=2a_{2k-2}+1-3=2a_{2k-2}-2$，则 $a_{2k}-2=2(a_{2k-2}-2)$，又 $a_2-2=-4\neq 0$，所以 $\{a_{2k}-2\}$ 是以 2 为公比，-4 为首项的等比数列，即 $a_{2k}-2=-4\cdot 2^{k-1}\Rightarrow a_{2k}=-4\cdot 2^{k-1}+2$，则 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=\frac{-4(1-2^{10})}{1-2}+2\times 10=24-2^{12}$.

所以 $S_{20}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})=54-2^{12}+24-2^{12}=-8$　114.

2. $(n-1)\cdot 2^{n+2}+4$　【解析】分析：根据题意得出数列 $\{a_n\}$ 以及

数列$\{b_n\}$的通项公式，从而得到数列$\{a_nb_n\}$的通项公式，最后利用错位相减法求T_n.

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+n$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=1^2+1=2$；

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-[(n-1)^2+(n-1)]=2n$，当$n=1$时也满足上式，

因此数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n$.

数列$\{a_n\}$是正偶数数列：$2,4,6,8,10,12,14,16,\cdots$，数列$\{2^{n-1}\}$为$1,2,4,8,16,\cdots$，因此数列$\{a_n\}$和数列$\{2^{n-1}\}$的公共项为$2,4,8,16,\cdots$，即数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^n$.

数列$\{a_nb_n\}$的通项公式为$a_nb_n=2n\cdot 2^n=n\cdot 2^{n+1}$，

则$T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$，$2T_n=2^3+2\times 2^4+3\times 2^5+\cdots+n\cdot 2^{n+2}$，

两式相减得$-T_n=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-n\cdot 2^{n+2}=\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+2}=(1-n)\cdot 2^{n+2}-4$，故$T_n=(n-1)\cdot 2^{n+2}+4$.

3. 2　【解析】分析：根据给定条件，给k从1开始赋值，结合等差数列性质依次计算确定k的最小值.

由题意，$k\in\mathbf{N}^*$，当$k=1$时，数列a_1,a_2,a_3,a_4,a_5成等差数列，则$2a_3=a_1+a_5$，

由$a_1\geqslant 1$，$\dfrac{1}{5}\leqslant a_5\leqslant\dfrac{1}{4}$，得$a_1+a_5\geqslant\dfrac{6}{5}$，则$a_3\geqslant\dfrac{3}{5}$与$\dfrac{1}{3}\leqslant a_3\leqslant\dfrac{1}{2}$矛盾，因此$k\in\mathbf{N}^*$，$k\geqslant 2$.

当$k=2$时，数列a_2,a_3,a_4,a_5,a_6成等差数列，

且$\dfrac{1}{6}\leqslant a_6\leqslant\dfrac{1}{5}\leqslant a_5\leqslant\dfrac{1}{4}\leqslant a_4\leqslant\dfrac{1}{3}\leqslant a_3\leqslant\dfrac{1}{2}\leqslant a_2\leqslant 1$，则$2a_4=a_2+a_6$，

而$\dfrac{1}{2}\leqslant 2a_4\leqslant\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}\leqslant a_2+a_6\leqslant\dfrac{6}{5}$，因此$2a_4=\dfrac{2}{3}$，即$a_4=\dfrac{1}{3}$，

此时$a_2=\dfrac{1}{2}$，$a_6=\dfrac{1}{6}$，公差$d=\dfrac{a_4-a_2}{4-2}=-\dfrac{1}{12}$，

$a_3=a_2+d=\dfrac{5}{12}\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$，$a_5=a_2+3d=\dfrac{1}{4}\in\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4}\right]$，符合题意，所以$k$的最小值为2.

4. 1 013　【解析】分析：由题意得到数列$\{P_n\}$，$\{S_n\}$的递推公式，求出数列$\{P_n\}$，$\{S_n\}$的通项，由对数的运算性质求解即可.

由题意，$P_1=3$，$P_{n+1}=P_n+(P_n-1)=2P_n-1$，所以$P_{n+1}-1=2(P_n-1)$（提示：对于$a_{n+1}=pa_n+q(pq\neq 0,p\neq 1)$型，构造等比数列），又$P_1-1=2\neq 0$，所以数列$\{P_n-1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，所以$P_n-1=2^n$，$P_n=2^n+1$，所以$P_{2\,026}=2^{2\,026}+1$.

由题意，$S_1=4\,048$，$S_{n+1}=S_n-2$，即数列$\{S_n\}$是以4 048为首项，-2为公差的等差数列，所以$S_n=4\,048+(n-1)\cdot(-2)=-2n+4\,050$，$S_{2\,025}=0$，所以$P_{2\,026}+S_{2\,025}=2^{2\,026}+1$，$\log_4(P_{2\,026}+S_{2\,025}-1)=\log_4 2^{2\,026}=\log_4 4^{1\,013}=1\,013$.

5. 2 026　【解析】题目中1次变换是随机剔除两项a_i,a_j，添加一项$a_i+a_j+a_ia_j$，

观察这个变换的特点，构造一个乘积式：$(1+a_i)(1+a_j)=1+a_i+a_j+a_ia_j$，这正好是1+新添加的项.　关键点

定义一个新变换，在数列$\{a_n+1\}$中随机剔除两项a_i+1,a_j+1（其中$1\leqslant i<j\leqslant n,i,j\in\mathbf{N}^*$），然后再添加一项$1+a_i+a_j+a_ia_j$，叫做数列$\{a_n+1\}$的1次新变换，则数列中所有项的乘积在新变换前后是不变的.

原数列是$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{2\,025},\dfrac{1}{2\,026}$，共2 026项，

对应新数列$1+1,1+\dfrac{1}{2},1+\dfrac{1}{3},\cdots,1+\dfrac{1}{2\,025},1+\dfrac{1}{2\,026}$的初始

乘积为 $\prod_{k=1}^{2\,026}\left(1+\frac{1}{k}\right)$（提示：$\prod_{i=1}^{n}b_i=b_1b_2\cdots b_n$）$=\prod_{k=1}^{2\,026}\frac{k+1}{k}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2\,027}{2\,026}=2\,027$，

每 1 次新变换会让数列的项数减少 1，初始有 2 026 项，经过 2 025 次新变换后，数列只剩一项，根据不变量，该项为 2 027，故原数列剩下的一项为 $2\,027-1=2\,026$.

6. 24　【解析】因为 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为正数数列，所以 $S_n>0$，故 $\frac{S_n}{S_{n+1}}>\frac{100}{101}$ 即为 $\frac{S_n}{S_n+c_{n+1}}>\frac{100}{101}$，故 $S_n>100c_{n+1}$.

当 $n=2k$ 时，$S_{2k}=(c_1+c_3+\cdots+c_{2k-1})+(c_2+c_4+\cdots+c_{2k})=\frac{(a_1+a_k)k}{2}+\frac{b_1(1-2^k)}{1-2}=k^2+2^k-1$，此时 $c_{n+1}=c_{2k+1}=2k+1$，故考虑满足 $k^2+2^k-1>100(2k+1)$ 的正整数解，

此不等式即为 $k^2+2^k-200k-101>0$，设 $g(k)=k^2+2^k-200k-101$，则 $g(k+1)-g(k)=2k+2^k-199$.

因为 $\{2k\}$，$\{2^k\}$ 均为递增数列，故 $\{2k+2^k-199\}$ 为递增数列.

设 $t(k)=2k+2^k-199$，则 $t(8)=16+256-199=73>0$，$t(7)=14+128-199=-57<0$，

故 $g(1)>g(2)>\cdots>g(8)$，$g(8)<g(9)<g(10)<\cdots$，但 $g(1)=-298<0$，$g(11)=121+2^{11}-2\,200-101=-132<0$，

$g(12)=144+2^{12}-2\,400-101=144+4\,096-2\,400-101=1\,739>0$，故此时 k 的最小值为 12，即 n 的最小值为 24.

当 $n=1$ 时，$S_1=c_1=a_1=1$，$100c_2=100b_1=100$，不满足 $S_1>100c_2$，故 $n=1$ 不符合题意.

当 $n=2k-1(k\geqslant 2)$ 时，$c_{n+1}=c_{2k}=2^{k-1}$，$S_{2k-1}=(c_1+c_3+\cdots+c_{2k-1})+(c_2+c_4+\cdots+c_{2k-2})=S_{2k}-c_{2k}=k^2+2^{k-1}-1$，故考虑满足 $k^2+2^{k-1}-1>100\times 2^{k-1}(k\geqslant 2)$ 的正整数解，

此不等式即为 $k^2-99\times 2^{k-1}-1>0(k\geqslant 2)$，

当 $k\geqslant 2$ 时，$2^k=(1+1)^k=C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^k\geqslant 1+k+\frac{k(k-1)}{2}=1+\frac{k^2+k}{2}$，

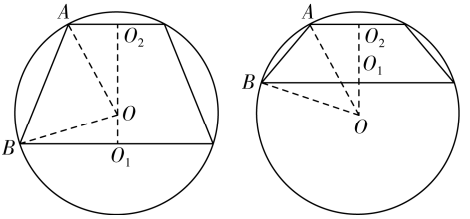
故当 $k\geqslant 2$ 时，$k^2-99\times 2^{k-1}-1\leqslant k^2-\frac{99}{2}\left(1+\frac{k^2+k}{2}\right)-1=\frac{-95k^2-99k-202}{4}<0$，故无解.

综上，所求最小正整数 n 为 24.

突破点 19　几何体与球的切、接问题（定球心/找截面）

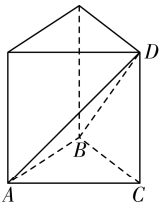
1. $\frac{65\pi}{4}$　【解析】设圆台的上、下底面圆心分别为 O_2，O_1，圆台外接球的球心为 O，圆台的一条母线为 AB，作出圆台的轴截面与对应大圆，如图，连接 OA，OB，OO_1，OO_2，易知 $O_2A=1$，$O_1B=2$，$O_1O_2=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(2-1)^2}=2$.

设 $OO_1=x$，若 O 在圆台内，则 $OO_2=2-x$，则 $OO_1^2+O_1B^2=OB^2=OA^2=OO_2^2+O_2A^2$（关键点），故 $x^2+2^2=(2-x)^2+1^2$，解得 $x=\frac{1}{4}$，又圆台的外接球唯一，故 O 一定在圆台内，则球的半径 $OB=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{4}$，所以该球的表面积为 $4\pi\cdot OB^2=\frac{65\pi}{4}$.



2. $\frac{112\pi}{3}$ 【解析】分析：根据题意将四面体 $A-BCD$ 补形为底面是等边三角形的直三棱柱，得到四面体外接球与直棱柱外接球相同，求出直三棱柱的外接球半径，再根据球的表面积公式求解即可.

因为平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，$BC\perp CD$，$CD\subset$ 平面 BCD，所以 $CD\perp$ 平面 ABC，又 $AB=BC=AC=CD=4$，所以可将四面体 $A-BCD$ 补形为底面是等边三角形的直三棱柱，如图所示，则四面体 $A-BCD$ 的外接球即为直三棱柱的外接球.



关键点

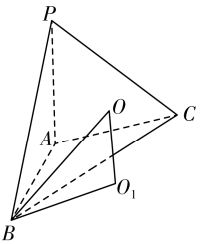
因为底面三角形 ABC 的外接圆半径为 $\frac{2}{3}\times\sqrt{4^2-2^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以直三棱柱的外接球的半径 $r=\sqrt{2^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{28}{3}}$，则球 O 的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\times\left(\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^2=\frac{112\pi}{3}$.

关键点

3. 52π 【解析】分析：由正、余弦定理求出底面三角形 ABC 的外接圆半径，利用球心、底面外接圆圆心、三棱锥顶点构成的直角三角形列式求出外接球的半径的平方，进而可得外接球表面积.

如图，因为 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，$AB=AC=2\sqrt{3}$，所以 $BC=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=6$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1，半径为 r_1，三棱锥外接球的球心为 O，半径为 r_2，连接 OO_1，OB，O_1B.



在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $2r_1=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$，解得 $r_1=2\sqrt{3}$. 因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$OO_1\perp$ 平面 ABC，且球心 O 到点 P，A 的距离相等，所以球心 O 到底面 ABC 的距离 $d=OO_1=\frac{1}{2}PA=1$. 又

关键点

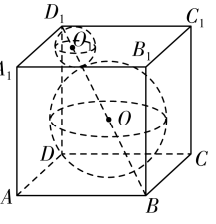
$BO_1\subset$ 平面 ABC，则 $OO_1\perp BO_1$，所以 $BO^2=BO_1^2+O_1O^2$，即 $r_2^2=r_1^2+d^2=(2\sqrt{3})^2+1^2=13$，故该三棱锥外接球的表面积为 $4\pi r_2^2=52\pi$.

4. $(28-16\sqrt{3})\pi$ 【解析】因为一个半径为 1 的实心球 O 放置于一个正方体盒子内，且与该正方体盒子内切，则该正方体盒子的棱长为 2.

设正方体盒子为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，在该正方体盒子内再放入一个球 O_1，当球 O_1 与正方体盒子的三个面相切且与球 O 相切时，球 O_1 的半径取得最大值，此时其表面积最大.

关键点

设球 O_1 半径的最大值为 r，连接 BD_1，易知 O，O_1 均在 BD_1 上，$OO_1=1+r$，$O_1D_1=\sqrt{3}r$（提示：球 O_1 与正方体的三个面相切，则可以以 O_1，D_1 为新的顶点构造正方体，得到 O_1D_1 的长度等于新正方体的体对角线的长度），又



$OO_1+O_1D_1=\frac{BD_1}{2}$，即 $1+r+\sqrt{3}r=\sqrt{3}$，所以 $r=2-\sqrt{3}$，所以球 O_1

的表面积的最大值为 $4\pi\cdot(2-\sqrt{3})^2=(28-16\sqrt{3})\pi$.

5. $3\sqrt{3}-3$ 【解析】分析：8 个小球的球心恰为正方体的 8 个顶点，要使小球半径最大，就必须满足相邻小球彼此相切，且 8 个小球与球状容器内壁相切，则正方体的棱长就是 2 个小球的半径和，据此列方程求解.

球状容器半径 $R=6$，8 个小球半径相同，设半径的最大值为 r，设正方体的棱长为 a，则正方体的体对角线长度为 $\sqrt{3}a$，要使小球半径最大，8 个小球既要与球状容器内壁相切，也要使得相邻的小球之间相互外切. 关键点

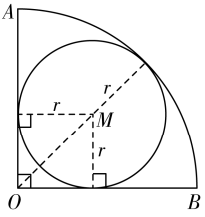
由相邻小球相互外切可得正方体的棱长 $a=2r$，正方体中心到任意一个顶点（小球球心）的距离是体对角线的一半，即 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$，由小球与球状容器内壁相切可得 $6=\frac{\sqrt{3}a}{2}+r$，则 $6=\frac{\sqrt{3}\cdot 2r}{2}+r=(\sqrt{3}+1)r$，解得 $r=3\sqrt{3}-3$，所以小球半径最大值为 $3\sqrt{3}-3$.

6. $2\sqrt{3}$ 【解析】分析：设四分之一球的半径为 R，最大正方体棱长为 a，求出 a 与 R 的关系，若正四面体可以在储物盒内以任意角度旋转，则其外接球必须能放入储物盒中，因此要先求该四分之一球的内切球半径 r. 使用截面法，转化为四分之一圆的内切圆问题，求出 r，再利用正四面体外接球半径公式求最大棱长.

设四分之一球的半径为 R，最大正方体棱长为 a，则 $a=2+\sqrt{2}$，最大正方体放入时，正方体的一条棱的中点在球心处，正方体的一个底面与一个侧面所在平面和四分之一球的两个侧面所在平面分别重合，正方体的两个顶点在球面上，所以 $(\sqrt{2}a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=R^2$，解得 $R=\frac{3}{2}a$.

若正四面体可以在储物盒内以任意角度旋转，则正四面体的外接球应能放入该储物盒内.

设储物盒内能放入的最大球半径为 r，取垂直于四分之一球两个侧面所在平面的交线的最大截面，如图，由截面图可知，最大内切圆的圆心在 $\angle AOB$ 的平分线上，且 $OM=\sqrt{2}r$.



又该内切圆与圆弧相切，所以 $OM+r=R$，即 $\sqrt{2}r+r=R$，故 $r=\frac{R}{1+\sqrt{2}}$.

设正四面体的最大棱长为 l，则其外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}l$，

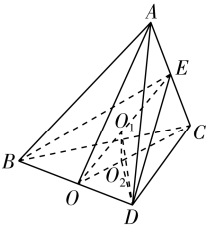
因此 $\frac{\sqrt{6}}{4}l=r=\frac{R}{1+\sqrt{2}}=\frac{\frac{3}{2}\times(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}$，解得 $l=2\sqrt{3}$.

故可放正四面体的最大棱长为 $2\sqrt{3}$.

7. 8π 【解析】在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BD=2$，则 $\triangle ABD$，$\triangle BCD$ 均为边长为 2 的等边三角形. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，设 O 为棱 BD 的中点，连接 AO，CO，则 $AO\perp BD$，$CO\perp BD$，且 $AO=CO=\sqrt{3}$.

设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 θ，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\theta=\angle AOC$.

因为 $AO\perp BD$，$CO\perp BD$，$AO\cap CO=O$，AO，$CO\subset$ 平面 AOC，所以 $BD\perp$ 平面 AOC.



连接 OE，在等腰三角形 AOC 中，$OE\perp AC$，由 $BD\perp$ 平面 AOC，$OE\subset$ 平面 AOC，得 $BD\perp OE$，所以 $OE=\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}$，$S_1=$

$\frac{1}{2}BD\cdot OE=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}$.

设三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心为 O_1，$\triangle BCD$ 外接圆圆心为 O_2，连接 O_1O_2，O_1D，O_2D，则 $\frac{OD}{OO_2}=\tan 60°$，解得 $OO_2=\frac{OD}{\tan 60°}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$O_1O_2=OO_2\cdot\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}$.

设外接球半径为 R，则 $R^2=O_1D^2=O_1O_2^2+O_2D^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}\left(4+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$，所以 $S_2=4\pi R^2=\frac{4\pi}{3}\left(4+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$，又 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\theta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\frac{\theta}{2}\neq0$，所以 $S_1\cdot S_2=\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(4+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}\cdot\left(4\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}\left(4\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}\left(3\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$.

令 $t=\cos\frac{\theta}{2}\in(0,1)$，则 $3\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}=3t+\frac{1}{t}\geqslant2\sqrt{3t\cdot\frac{1}{t}}=2\sqrt{3}$，当且仅当 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取等号，所以 $(S_1\cdot S_2)_{\min}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}\cdot2\sqrt{3}=8\pi$.

8. 288π　$72\sqrt{3}$　【解析】已知正四面体的棱长 $a=4\sqrt{6}$，设正四面体的高为 h，底面正三角形的外接圆半径为 r，正四面体外接球半径为 R，则 $r=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}\times4\sqrt{6}=4\sqrt{2}$，$\therefore h=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(4\sqrt{2})^2}=8$.

正四面体的外接球球心在高上，且满足 $R=\frac{3}{4}h=\frac{3}{4}\times8=6$（提示：若正四面体的高为 H，则其外接球半径为 $\frac{3}{4}H$），

$\therefore$ 正四面体外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi$.

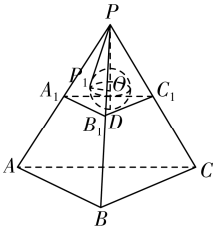
小球在正四面体中离其中一个顶点最近的情况如图①所示，作平面 $A_1B_1C_1$ // 平面 ABC，且平面 $A_1B_1C_1$ 与小球相切于点 D，则小球球心 O 为正四面体 $P-A_1B_1C_1$ 的内切球球心，连接 PD，易知 O 在 PD 上，$PO\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，D 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，$OD=\frac{1}{4}PD=1$（提示：若正四面体的高为 H，则其内切球半径为 $\frac{1}{4}H$），故 $PO=PD-OD=4-1=3$，设此时小球与平面 PAB 的切点为 P_1，连接 OP_1，PP_1，则 $PP_1=\sqrt{PO^2-OP_1^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

考虑小球与正四面体的侧面 PAB 相切的情况，则小球在侧面 PAB 上能接触到的部分为如图②所示的正三角形 P_1EF 及其

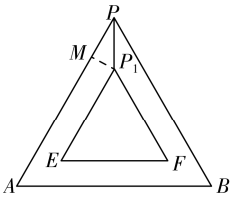
内部，在图②中过 P_1 作 $P_1M\perp PA$ 交 PA 于 M，$\because\angle MPP_1=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore PM=PP_1\cdot\cos\angle MPP_1=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$.

$\therefore P_1E=PA-2PM=4\sqrt{6}-2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$，小球在侧面 PAB 上不能接触到的部分的面积为 $S_{\triangle PAB}-S_{\triangle P_1EF}=24\sqrt{3}-6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$，

$\therefore$ 小球永远不可能接触到的容器内壁面积为 $4\times18\sqrt{3}=72\sqrt{3}$.



图①



图②

突破点 20　排列组合与古典概型（枚举法/计算法）

1. 18　【解析】若 a,b,c 恰好取 1,2 两个数字，则有 $C_3^2C_2^1=6$（种）情况；

若 a,b,c 恰好取 1,4 两个数字，则有 $C_3^2C_2^1=6$（种）情况；

若 a,b,c 恰好取 2,4 两个数字，则有 $C_3^2C_2^1=6$（种）情况.

故共有 6+6+6=18（种）情况，即在仅考虑前 3 个位置的情况下，a,b,c 恰好取两个不同值的编码共有 18 个.

2. $\dfrac{55}{84}$　【解析】将 9 个球看成不同的元素，则样本空间的样本点总数为 $9\times8\times7=504$.

“3 次摸球中，恰好有 2 次颜色相同”分为“2 次红球，1 次非红球”“2 次白球，1 次非白球”“2 次黑球，1 次非黑球”三种情况.

事件“2 次红球，1 次非红球”包含的样本点个数为 $C_2^2C_7^1A_3^3=42$；

事件“2 次白球，1 次非白球”包含的样本点个数为 $C_3^2C_6^1A_3^3=108$；

事件“2 次黑球，1 次非黑球”包含的样本点个数为 $C_4^2C_5^1A_3^3=180$.

所以 $P(A)=\dfrac{42+108+180}{504}=\dfrac{55}{84}$.

3. 432　【解析】分析：先按 2 道不同的 B 型题不相邻进行排列，再在 B 型题不相邻的排列中，排除前 3 道题中没有 B 型题的情况，即可求解.

第一步，排 4 道 A 型题，有 $A_4^4=24$（种）安排顺序；

第二步，排 2 道 B 型题，排好后的 A 型题会产生 5 个空位（包括两端），将 2 道 B 型题插入空位，有 $A_5^2=20$（种）安排顺序，所以 B 型题不相邻的安排顺序有 $24\times20=480$（种）；

第三步，排除不符合要求的情况，前 3 道题都是 A 型题的情况，即 2 道 B 型题在第 4 题和第 6 题的位置：4 道 A 型题全排列，有 $A_4^4=24$（种）安排顺序，2 道 B 型题全排列，有 $A_2^2=2$（种）安排顺序，所以不符合要求的安排顺序有 $24\times2=48$（种）.

因此 6 道题不同的安排顺序有 $480-48=432$（种）.

4. 38　【解析】分析：先排几何题与概率统计题，共有三类不同情况，再针对三类不同情况分别考虑插入 3 道函数题的情况种数即可得结果.

函数题 3 道，用 A_1,A_2,A_3 表示，且难度从易到难，

几何题 2 道，用 B_1,B_2 表示，且难度从易到难，

概率统计题 2 道，用 C_1,C_2 表示，且难度从易到难，

先排几何题与概率统计题（提示：先排列板块题目数量较少

的情况，余下数量较多的函数题进行插空），则有①$B_1B_2C_1C_2$ 或 $C_1C_2B_1B_2$，②$B_1C_1B_2C_2$ 或 $C_1B_1C_2B_2$，③$C_1B_1B_2C_2$ 或 $B_1C_1C_2B_2$ 这三类不同情况.

对于情况①，B_1B_2 之间与 C_1C_2 之间必须各插入 1 道函数题，则剩余的 1 道函数题有 3 个位置可选，共有 $C_3^1=3$（种）情况；

对于情况②，再插入 3 道函数题，共有 $C_5^3=10$（种）情况；

对于情况③，B_1B_2 之间或 C_1C_2 之间必须插入 1 道函数题，剩余的 2 道题有 4 个位置可选，共有 $C_4^2=6$（种）情况.

综上，共有 $2\times(3+10+6)=38$（种）不同的排版方案.

5. $\frac{10}{21}$　$\frac{15}{37}$　【解析】抽调的 3 名志愿者恰好有 2 名来自“后台统筹”组的概率为 $\frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$.

恰好抽中 2 名“前台引导”组志愿者的概率为 $\frac{C_5^1C_4^2}{C_9^3}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$，

至少有 1 名来自“前台引导”组的概率为 $1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=1-\frac{10}{84}=\frac{37}{42}$，

所以在抽调的 3 名志愿者中至少有 1 名来自“前台引导”组前提下，恰好抽中 2 名“前台引导”组志愿者的概率为 $\frac{\frac{5}{14}}{\frac{37}{42}}=\frac{15}{37}$.

6. 13　【解析】分析：以 1 的个数分类讨论，确定满足条件的数字，再进行排列组合.

（i）若 $x_1=x_2=\cdots=x_5=1$，则 $5+x_6=x_6$ 无解.

（ii）若 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，则 $4+x_5+x_6=x_5x_6$，得 $(x_5-1)(x_6-1)=5$，因为 5 为质数，且 $x_5\leqslant x_6$，所以 $x_5-1=1$，$x_6-1=5$，解得 $x_5=2$，$x_6=6$.

（iii）若 6 个正整数中 1 的个数小于或等于 3，则 $x_4\geqslant 2$，$x_5\geqslant 2$，由 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_6$，可得 $x_1+x_2+\cdots+x_6\leqslant 6x_6$（提示：利用放缩把乘积式控制在很小的范围内，只有有限组整数可以尝试，大幅减少计算量），

又 $x_1+x_2+\cdots+x_6=x_1x_2\cdots x_6$，则 $x_1x_2\cdots x_6\leqslant 6x_6$，因此 $x_1x_2x_3x_4x_5\leqslant 6$，

又 $x_1x_2x_3x_4x_5\geqslant 1\times1\times1\times2\times2=4$，因此 $x_1x_2x_3x_4x_5$ 的值只能为 4，5，6.

①若 $x_1x_2x_3x_4x_5=4$，则只能是 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=1$，$x_4=2$，$x_5=2$，

则 $1+1+1+2+2+x_6=1\times1\times1\times2\times2x_6$，解得 $x_6=\frac{7}{3}\notin\mathbf{N}^*$，舍去；

②若 $x_1x_2x_3x_4x_5=5$，因为 5 是质数，无法分解为两个及以上大于或等于 2 的整数的乘积，故舍去；

③若 $x_1x_2x_3x_4x_5=6$，则只能是 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=1$，$x_4=2$，$x_5=3$，

则 $1+1+1+2+3+x_6=1\times1\times1\times2\times3x_6$，解得 $x_6=\frac{8}{5}\notin\mathbf{N}^*$，舍去.

故若 1 的个数小于或等于 3，则该方程无正整数解，

因此 6 个数字为 1，1，1，1，2，6.

从中任选 3 个组成三位数，取 1，2，6，有 $A_3^3=6$（种）排法；

取 3 个 1，有 1 种排法；

取 2 个 1，1 个 2 或取 2 个 1，1 个 6，共有 $C_2^1\cdot\frac{A_3^3}{A_2^2}=6$（种）排法.

故组成的不同三位数个数为 $6+1+6=13$.

突破点 21　直线与圆位置关系中的含参问题（几何法/方程法）

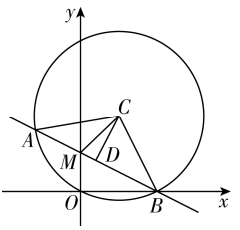
1. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　【解析】当 AB 为圆 O 的切线时，$\angle OAB$ 可取到最大值.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，$\sin\angle OAB=\dfrac{|OB|}{|OA|}$，已知 $|OB|=r=1$（r 为圆 O 半径），若 $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$，则 $|OA|=2$，

要使圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 B，使得 $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$，则只需 $|OA|\leqslant 2$ 即可.

点 $O(0,0)$ 到直线 $l:kx-y+4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|0-0+4|}{\sqrt{k^2+1}}$，故 $d=\dfrac{|0-0+4|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 2$，平方可得 $\dfrac{16}{k^2+1}\leqslant 4$，即 $k^2\geqslant 3$，解得 $k\geqslant\sqrt{3}$ 或 $k\leqslant-\sqrt{3}$，综上，k 的取值范围为 $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$.

2. $2\sqrt{2}$　【解析】已知直线 l 的方程为 $mx+y-1=0$，令 $x=0$，得 $y-1=0$，即 $y=1$，所以 l 过定点 $M(0,1)$.



将圆 C 的方程化为标准方程 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$，所以圆心 $C(1,2)$.

设线段 AB 的中点为 D，有 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CD}$，

所以 $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|2\overrightarrow{CD}|=2|\overrightarrow{CD}|\leqslant 2|\overrightarrow{CM}|=2\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=2\sqrt{2}$.

3. $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　【解析】圆心 $C(\cos\theta,\sin\theta)$ 在以坐标原点 O 为圆心，1 为半径的圆上，当 θ 变化时，圆 C 扫过的图形是以原点为圆心，2 为半径的圆面，

故存在 θ，使得直线 $kx-y+4k=0$ 与圆 C 有公共点等价于直线 $kx-y+4k=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有交点，得 $\dfrac{|4k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 2$，解得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故实数 k 的取值范围是 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

一题多解　依题意，圆心 $C(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $kx-y+4k=0$ 的距离 $d=\dfrac{|k\cos\theta-\sin\theta+4k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$，

即 $\dfrac{|\sqrt{1+k^2}\sin(\theta+\varphi)+4k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$，即 $-1-\dfrac{4k}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant 1-\dfrac{4k}{\sqrt{1+k^2}}$，其中 φ 满足 $\tan\varphi=-k$.

依题意，$\exists\theta$ 使得 $-1-\dfrac{4k}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant 1-\dfrac{4k}{\sqrt{1+k^2}}$ 成立，

故 $1-\dfrac{4k}{\sqrt{1+k^2}}\geqslant-1$ 且 $-1-\dfrac{4k}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$，解得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故实数 k 的取值范围是 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

4. $\frac{1}{2}$或1　【解析】不妨设 $A(\sqrt{3},0)$，$B(0,1)$．∵ 点 C 为线段 AB 的中点，直线 PC 平分∠APB，∴ P 在线段 AB 的垂直平分线上．∵ $k_{AB}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ 直线 PC 的斜率为$\sqrt{3}$．$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，由点斜式得线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，化简得 $y=\sqrt{3}x-1$．∵ 在圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上满足条件的 P 有且仅有一个，∴ 直线 $y=\sqrt{3}x-1$ 与圆 O 相切或圆 O 过点 C．当直线 $y=\sqrt{3}x-1$ 与圆 O 相切时，$r=\frac{1}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}$；当圆 O 过点 C 时，$r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$．

5. 25　【解析】分析：判断出圆 O_1 与圆 O_2 的位置关系，得 a,b 满足的关系式，再利用三角换元法求最大值．

由题意，圆 O_1 的圆心为 $O_1(0,0)$，半径 $r_1=1$；

圆 O_2 的圆心为 $O_2(a,b)$，半径 $r_2=3$．

因为两圆有且仅有 3 条公切线，所以两圆外切，

所以 $|O_1O_2|=r_1+r_2$，即 $\sqrt{a^2+b^2}=4$，所以 $a^2+b^2=16$．

设 $a=4\sin\theta,b=4\cos\theta,\theta\in[0,2\pi)$，

则 $3a-4b+5=12\sin\theta-16\cos\theta+5=20\times\left(\frac{3}{5}\sin\theta-\frac{4}{5}\cos\theta\right)+5=20\sin(\theta-\varphi)+5$，

其中 $\cos\varphi=\frac{3}{5},\sin\varphi=\frac{4}{5}$（$\varphi$ 为锐角），$-\varphi\leqslant\theta-\varphi<2\pi-\varphi$，

所以当 $\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$3a-4b+5$ 取得最大值 $20+5=25$．

6. $2\sqrt{7}$　【解析】分析：求出两圆圆心和半径，算出圆心距，根据直线 l 与圆 N 相切结合弦长公式求解最值．

圆 M 的圆心 $M(-1,0)$，半径 $R=5$，圆 N 的圆心 $N(1,2)$，半径 $r=\sqrt{2}$，可得 $|MN|=\sqrt{(1+1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$，

直线 l 与圆 N 相切，即定点 N 到直线 l 的距离恒等于$\sqrt{2}$．

设圆心 M 到直线 l 的距离为 d，则 $|MN|-r\leqslant d\leqslant|MN|+r$，

关键点

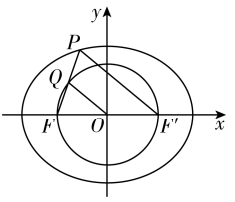
即$\sqrt{2}\leqslant d\leqslant3\sqrt{2}$，所以 $|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{25-d^2}$，

当 d 取最大值 $3\sqrt{2}$时，$|AB|$最小，$|AB|_{\min}=2\sqrt{25-(3\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}$．

突破点 22　椭圆、双曲线的几何性质（a，b，c 之间关系的灵活转化）

1. $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　【解析】由双曲线方程 $mx^2+y^2=1$ 化为标准方程得 $y^2-\frac{x^2}{-\frac{1}{m}}=1$，其中 $m<0$，则实轴长 $2a=2$，虚轴长 $2b=2\sqrt{-\frac{1}{m}}$，焦距 $2c=2\sqrt{1-\frac{1}{m}}$，由焦距是虚轴长的 $|m|$ 倍，得 $2\sqrt{1-\frac{1}{m}}=2|m|\sqrt{-\frac{1}{m}}$，整理得 $m^2+m-1=0$，解得 $m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，因为 $m<0$，所以 $m=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

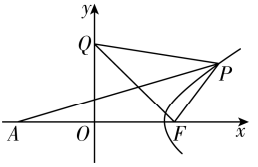
2. 4　【解析】由已知得长半轴长 $a=5$，短半轴长 $b=4$，半焦距 $c=\sqrt{25-16}=3$，设椭圆的右焦点为 F'，PF 的中点为 Q，连接 PF' 和 OQ，如图，因为 Q 在以 O 为圆心，$|OF|$ 为半径的圆上，所以 $|OQ|=|OF|=3$.



又 O 为 FF' 的中点，Q 为 PF 的中点，所以 $|PF'|=2|OQ|=6$，由椭圆的定义知 $|PF|=2a-|PF'|=2\times5-6=4$.

关键点

3. $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$　【解析】双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的左焦点为 $A(-2,0)$，右焦点为 $F(2,0)$，点 P 在其右支上，由双曲线的定义得 $|PA|-|PF|=2\sqrt{3}$，所以 $|PA|=2\sqrt{3}+|PF|$，所以 $|PA|+|PQ|=|PQ|+|PF|+2\sqrt{3}\geqslant|FQ|+2\sqrt{3}=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$，当且仅当 P 为线段 FQ 与双曲线的右支的交点时取等号. 故 $|PA|+|PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.



4. 8 或 $\frac{81}{8}$　【解析】分析：分别表示出椭圆 C_2 的离心率和椭圆 C_1 的离心率，讨论椭圆 C_1 的焦点位置分别列方程求 m.

设椭圆 C_2 的长半轴长为 a_2，短半轴长为 b_2，半焦距为 c_2，则 $a_2=2$，$b_2=1$，$c_2=\sqrt{3}$，所以椭圆 C_2 的离心率 $e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $e_1e_2=\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以 $e_1=\frac{1}{3}$.

设椭圆 C_1 的长半轴长为 a_1，短半轴长为 b_1，半焦距为 c_1，则 $\frac{c_1}{a_1}=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{c_1^2}{a_1^2}=\frac{1}{9}$，所以 $\frac{b_1^2}{a_1^2}=1-\frac{c_1^2}{a_1^2}=\frac{8}{9}$，

当椭圆 C_1 的焦点在 x 轴上时，$\frac{m}{9}=\frac{8}{9}$，所以 $m=8$；

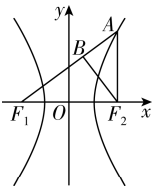
当椭圆 C_1 的焦点在 y 轴上时，$\frac{9}{m}=\frac{8}{9}$，所以 $m=\frac{81}{8}$，

综上，$m=8$ 或 $m=\frac{81}{8}$.

5. $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$　【解析】记椭圆 C 的半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则 C 的离心率 $e_1=\frac{c}{a}$，又 D 的离心率 $e_2=\sqrt{1+\frac{2m^2+1}{m^2}}=\sqrt{3+\frac{1}{m^2}}>\sqrt{3}$，由 $e_1e_2=1$，得 $0<e_1<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 在 C 上，代入得 $\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$，即 $a^2+b^2=4a^2b^2$，即 $2a^2-c^2=4a^2(a^2-c^2)$，所以 $4a^2=\frac{2a^2-c^2}{a^2-c^2}=\frac{2-e_1^2}{1-e_1^2}=1+\frac{1}{1-e_1^2}$. 因为 $0<e_1<\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $2<4a^2<\frac{5}{2}$，解得 $\sqrt{2}<2a<\frac{\sqrt{10}}{2}$，故 C 的长轴长的取值范围为 $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

6. $\frac{9}{16}$ 【解析】如图，由离心率 $e=\frac{c}{a}=2$ 得 $c=2a$，所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}a$.



因为点 A 为双曲线 C 上一点且满足 $AF_2\perp F_1F_2$，所以 $|AF_2|=\frac{b^2}{a}=3a$，所以 $|AF_1|=|AF_2|+2a=5a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，由等面积法可得 $|F_1F_2|\cdot|AF_2|=|AF_1|\cdot|BF_2|$，则 $|BF_2|=\frac{|F_1F_2|\cdot|AF_2|}{|AF_1|}=\frac{4a\cdot 3a}{5a}=\frac{12}{5}a$，所以 $|AB|=\sqrt{|AF_2|^2-|BF_2|^2}=\sqrt{(3a)^2-\left(\frac{12}{5}a\right)^2}=\frac{9}{5}a$，$|BF_1|=|AF_1|-|AB|=5a-\frac{9}{5}a=\frac{16}{5}a$，所以 $\frac{|AB|}{|BF_1|}=\frac{\frac{9}{5}a}{\frac{16}{5}a}=\frac{9}{16}$.

7. $\left[\sqrt{2}-1,\frac{1}{2}\right]$ 【解析】分析：已知 $\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|}+\frac{|F_1F_2|}{|AF_2|}=2$，等式左右同乘 $|AF_1|\cdot|AF_2|$ 去分母，结合椭圆的定义和性质可得出 a,b,c 满足的不等式，进而求得离心率的取值范围.

由 $\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|}+\frac{|F_1F_2|}{|AF_2|}=2$，得 $|F_1F_2|(|AF_1|+|AF_2|)=2|AF_1|\cdot|AF_2|$，由椭圆的定义得 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，又 $|F_1F_2|=2c$，所以 $|AF_1|\cdot|AF_2|=2ac$.

设 $A(x,y)$，椭圆 C 的离心率为 e，则有 $|AF_1|=a+ex$，$|AF_2|=a-ex$（提示：椭圆的焦半径公式），得 $|AF_1|\cdot|AF_2|=(a+ex)(a-ex)=a^2-e^2x^2$.

由点 A 在椭圆上，有 $-a\leqslant x\leqslant a$，所以 $0\leqslant x^2\leqslant a^2$，则当 $x^2=0$ 时，$|AF_1|\cdot|AF_2|$ 有最大值 a^2，当 $x^2=a^2$ 时，$|AF_1|\cdot|AF_2|$ 有最小值 $a^2-e^2a^2=a^2(1-e^2)=a^2\cdot\frac{b^2}{a^2}=b^2$，所以有 $b^2\leqslant 2ac\leqslant a^2$.

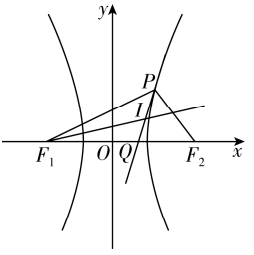
由 $2ac\leqslant a^2$，得 $a\geqslant 2c$，所以 $e=\frac{c}{a}\leqslant\frac{1}{2}$.

由 $2ac\geqslant b^2=a^2-c^2$，有 $c^2+2ac-a^2\geqslant 0$，可得 $e^2+2e-1\geqslant 0$，解得 $e\leqslant -1-\sqrt{2}$（舍去）或 $e\geqslant\sqrt{2}-1$.

结合 $0<e<1$，可知 C 的离心率的取值范围为 $\left[\sqrt{2}-1,\frac{1}{2}\right)$.

8. $\sqrt{3}+1$ 【解析】分析：利用已知条件求出 $\angle PF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，再结合双曲线的定义及离心率公式求解.

设 $\angle F_1PF_2$ 的平分线与 $\angle PF_1F_2$ 的平分线交于点 I，与 x 轴交于点 Q，$\angle PQF_2=\alpha$，$\angle IF_1Q=\beta$，则 $k_1=\tan\alpha$，$k_2=\tan\beta$.



因为 $\angle F_1IQ=\angle PF_1I+\angle IPF_1=\frac{1}{2}(\angle PF_1F_2+\angle F_1PF_2)=\frac{1}{2}(\pi-\angle PF_2F_1)=\frac{\pi}{3}$，且 $\angle F_1IQ=\angle PQF_2-\angle IF_1Q=\alpha-\beta$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\sqrt{3}$（提示：两角差的正切公式，实

现复杂角的正切值与相关直线斜率间的转化).

由题可得 $k_1k_2=1$,且 $k_1>0,k_2>0$,所以 $k_1=2+\sqrt{3}$,$k_2=2-\sqrt{3}$,

所以 $\tan\angle PF_1F_2=\tan 2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\dfrac{2\times(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

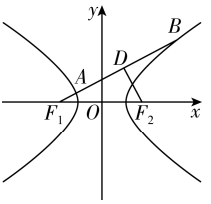
又 $\angle PF_1F_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\angle PF_1F_2=\dfrac{\pi}{6}$,则 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1PF_2$ 中,$|F_1F_2|=2c$,所以 $|PF_2|=c$,$|PF_1|=\sqrt{3}c$,

又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$,所以 $\sqrt{3}c-c=2a$,故 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

突破点 23　圆锥曲线中的弦中点问题(点差法)

1. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　【解析】已知直线 l 的斜率 $k_1=\dfrac{1}{2}$,$DF_2\perp AB$,则直线 DF_2 的斜率 $k_2=-2$.



设 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$D(x_0,y_0)$,由 D 在直线 l 上,得 $y_0=\dfrac{1}{2}(x_0+c)$①,$k_2=\dfrac{y_0}{x_0-c}=-2$②,联立①②得 $x_0=\dfrac{3c}{5}$,$y_0=\dfrac{4c}{5}$,即 $D\left(\dfrac{3c}{5},\dfrac{4c}{5}\right)$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,代入双曲线方程得 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$,整理得 $\dfrac{x_1+x_2}{a^2}=k_1\cdot\dfrac{y_1+y_2}{b^2}$,即 $\dfrac{2x_0}{a^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2y_0}{b^2}$,化简得 $y_0=\dfrac{2b^2}{a^2}x_0$,即 $\dfrac{4c}{5}=\dfrac{2b^2}{a^2}\cdot\dfrac{3c}{5}$,得 $a^2=\dfrac{3}{2}(c^2-a^2)$,解得 $c^2=\dfrac{5}{3}a^2$,因此 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

2. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　【解析】分析:结合题意求出点 M 的坐标,从而得 k_{OM},已知 M 为线段 AB 的中点,利用点差法建立 a,b 的关系式,从而得解.

过 M 作 $MN\perp x$ 轴于 N(图略),因为 $4|FM|=|OF|$,直线 AB 的倾斜角为 $60°$,所以 $|FN|=\dfrac{1}{2}|FM|=\dfrac{1}{8}|OF|$,设 $F(-c,0)$,则 N 的横坐标为 $-\dfrac{7}{8}c$,即 M 的横坐标为 $-\dfrac{7}{8}c$,且 $y_M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|FM|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}c$,即 $M\left(-\dfrac{7}{8}c,\dfrac{\sqrt{3}}{8}c\right)$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$(提示:中点问题通常使用点差法解决),即 $x_1+x_2=-\dfrac{7}{4}c$,$y_1+y_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$,又 $k_{OM}=-\dfrac{\sqrt{3}}{7}$,$k_{AB}=\sqrt{3}$,所以 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{3}{7}$.

分别将 A,B 的坐标代入椭圆的方程可得 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$

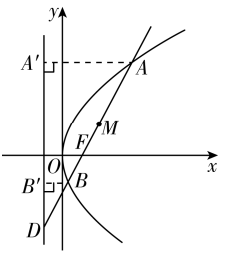
作差并整理可得 $\dfrac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，即 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{7}$，所以

关键点

$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{7}$，则离心率 $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

3. $2\sqrt{3}$　【解析】分析：分别过 A,B 作抛物线准线的垂线，利用抛物线的定义和相似三角形的性质，结合点差法进行求解.

由题知 $|\overrightarrow{AF}|=3|\overrightarrow{FB}|$，设 $|\overrightarrow{AF}|=3m$，则 $|\overrightarrow{FB}|=m$，$|\overrightarrow{AB}|=4m$，$m>0$. 设直线 AB 交准线 l 于点 D，过 A 作 $AA'\perp l$，过 B 作 $BB'\perp l$，垂足分别为 A'，B'，则 $|AA'|=|AF|=3m$，$|BB'|=|BF|=m$，显然 $\triangle AA'D\backsim\triangle BB'D$，所以 $\dfrac{|AA'|}{|BB'|}=\dfrac{|DA|}{|DB|}$，即 $\dfrac{3m}{m}=\dfrac{|DB|+4m}{|DB|}$，解得 $|DB|=2m$，所以 $|DA|=6m$，所以 $\cos\angle A'AF=\dfrac{|AA'|}{|AD|}=\dfrac{1}{2}$，则 $\angle A'AF=\dfrac{\pi}{3}$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\sqrt{3}$.



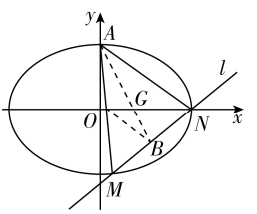
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}y_1^2=2px_1,\\ y_2^2=2px_2,\end{cases}$ 作差得 $y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$，即 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot 2y_M=2p$，所以 $k_{AB}\cdot y_M=p$，又因为 $y_M=2$，所以 $p=2\sqrt{3}$.



30 s 速解　西安交通大学——王紫蓬

（焦比公式）学霸提示：以开口向右的抛物线为例，焦比公式：$\cos\theta=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$，其中 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为过焦点的直线的倾斜角，λ 为两焦半径长度之比. 由题知 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，即 $\lambda=3\left(\text{或}\dfrac{1}{3}\right)$，代入得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\sqrt{3}$. 后同解析.

4. $\dfrac{3}{4}$　【解析】由题意得 $A(0,1)$，如图，设 $\triangle AMN$ 的重心为 G，连接 AG 并延长，与 MN 交于点 B，则 B 为 MN 的中点（提示：三角形的重心在三角形的中线上），且 $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GB}$. 又 $G\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，设 $B(x_B,y_B)$，



$\therefore\left(\dfrac{1}{2},-1\right)=2\left(x_B-\dfrac{1}{2},y_B\right)$，解得 $x_B=\dfrac{3}{4}$，$y_B=-\dfrac{1}{2}$.

设 $M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，则 $x_M+x_N=\dfrac{3}{2}$，$y_M+y_N=-1$

另解：$\triangle AMN$ 的重心为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，$A(0,1)$，由三角形重心的坐标表示，得 $\begin{cases}\dfrac{x_M+x_N+0}{3}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{y_M+y_N+1}{3}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_M+x_N=\dfrac{3}{2},\\ y_M+y_N=-1.\end{cases}$

又$\frac{x_M^2}{2}+y_M^2=1$，$\frac{x_N^2}{2}+y_N^2=1$，两式作差得$\frac{1}{2}(x_M^2-x_N^2)+y_M^2-y_N^2=0$，

即$k=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_M+x_N}{y_M+y_N}=\frac{3}{4}$.

一题多解

已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，上顶点坐标$A(0,1)$.

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，∵ $\triangle AMN$的重心为$\left(\frac{1}{2},0\right)$，

∴ $\frac{0+x_1+x_2}{3}=\frac{1}{2}$，$\frac{1+y_1+y_2}{3}=0$，可得$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{3}{2},\\ y_1+y_2=-1.\end{cases}$

联立直线l与椭圆C的方程，消去y可得$\frac{x^2}{2}+(kx+m)^2=1$，

整理得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，根据一元二次方程根与系数的关系可知$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$.

又∵ $y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$，∴ $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=k\times\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$.

由$x_1+x_2=\frac{3}{2}$，可得$-\frac{4km}{1+2k^2}=\frac{3}{2}$ ①；由$y_1+y_2=-1$，可得$\frac{2m}{1+2k^2}=-1$ ②.

由②可得$m=-\frac{1+2k^2}{2}$，将其代入①可得$-\frac{4k\times\left(-\frac{1+2k^2}{2}\right)}{1+2k^2}=\frac{3}{2}$，则$2k=\frac{3}{2}$，解得$k=\frac{3}{4}$.

将$k=\frac{3}{4}$代入②可得$m=-\frac{17}{16}$，此时直线$l:y=\frac{3}{4}x-\frac{17}{16}$与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$有两个交点，符合题意.

1 min 速解　西安交通大学——王紫蓬

（中点弦斜率结论）同解析知点B的坐标为$\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$，则直线$OB$的斜率为$-\frac{2}{3}$，结合点差法斜率公式可得直线$MN$的斜率为$\frac{3}{4}$（提示：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，若$MN$为不与坐标轴平行的弦，$P$为$MN$的中点，则$k_{MN}\cdot k_{OP}=-\frac{b^2}{a^2}$）.

突破点 24　函数图象的切线问题（导数的几何意义）

1. -3　【解析】由$y=x+\ln x$，求导可得$y'=1+\frac{1}{x}$，则切线斜率$k=1+1=2$，切线方程为$y=2x-1$.
由$y=x^2-2x-a$，求导可得$y'=2x-2$，令$2x-2=2$，解得$x=2$. 将$x=2$代入$y=2x-1$，可得$y=3$，将$(2,3)$代入$y=x^2-2x-a$，可得$3=4-4-a$，解得$a=-3$.

2. -1　【解析】由$y=e^{2x+b}$，求导得$y'=2e^{2x+b}$，令$x=0$得切线斜率$k=2e^b$，因为曲线$y=e^{2x+b}$在点$(0,e^b)$处的切线与直线$ex+2y+6=0$垂直，所以$2e^b\cdot\left(-\frac{e}{2}\right)=-1$，解得$b=-1$.

3. ±1　【解析】已知$y=ax\ln x$，则$y'=a(\ln x+1)$，令$x=1$得切线斜率为a，所以曲线$y=ax\ln x$在点$(1,0)$处的切线方程为

$y=a(x-1)$，即 $ax-y-a=0$. 又该切线与圆 O 相切，所以 $\frac{|a\times0-0-a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理得 $a^2=1$，解得 $a=\pm1$.

4. $\left(0,\frac{4e^{\frac{3}{2}}-1}{2e^3}\right)$　【解析】分析：设出切点坐标，借助导数的几何意义可得切线方程，将点$(1,b)$代入切线方程，将 b 分离到等式一侧，再将另一侧构造新函数，由题中切线有三条可得该新函数的图象与直线 $y=b$ 有三个不同交点，借助导数研究该新函数单调性后即可得解.

设切点坐标为 $\left(x_0,\frac{\ln x_0}{x_0}\right)$，由 $y=\frac{\ln x}{x}$ 得 $y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，则切线方程为 $y-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}(x-x_0)$.

点$(1,b)$在该直线上，则 $b-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}(1-x_0)$，整理得 $b=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}-\frac{1}{x_0}+\frac{2\ln x_0}{x_0}$，由题意可得函数 $g(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{x}(x>0)$ 的图象与直线 $y=b$ 有三个不同交点.

关键点

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}+\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln x}{x^2}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{-3+2\ln x+3x-2x\ln x}{x^3}$$
$$=\frac{3(x-1)-2\ln x\cdot(x-1)}{x^3}=\frac{(x-1)(3-2\ln x)}{x^3},$$

则当 $x\in(0,1)\cup(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,e^{\frac{3}{2}})$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在$(0,1)$和$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$上单调递减，在$(1,e^{\frac{3}{2}})$上单调递增，$g(1)=\frac{1-\ln 1}{1^2}-\frac{1}{1}+\frac{2\ln 1}{1}=0$，$g(e^{\frac{3}{2}})=\frac{1-\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^3}-\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}+\frac{2\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{4e^{\frac{3}{2}}-1}{2e^3}$，又当 $x\to0$ 时，$g(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$（易错：切记不要遗漏对函数变化趋势的分析），故当 $b\in\left(0,\frac{4e^{\frac{3}{2}}-1}{2e^3}\right)$ 时，函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y=b$ 有三个不同交点，即实数 b 的取值范围为 $\left(0,\frac{4e^{\frac{3}{2}}-1}{2e^3}\right)$.