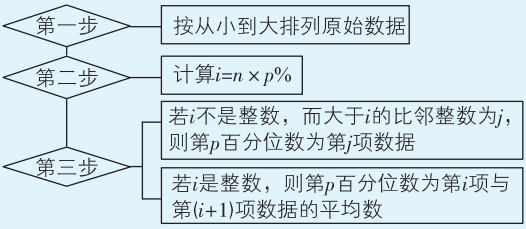
题型强化 · 单选

单选小卷

单选小卷 1

1. C 【解析】本题考查总体百分位数的计算.
一共有 6 个数字，6×0.75=4.5，按从小到大取第 5 个数，所以上四分位数是 15. 故选 C.

方法总结 计算 n 个数据的第 p 百分位数的步骤



2. C 【解析】本题考查复数的运算.
由 $(z-\mathrm{i})\mathrm{i}=-1$，得 $z-\mathrm{i}=-\frac{1}{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\mathrm{i}$，则 $z=2\mathrm{i}$. 故选 C.

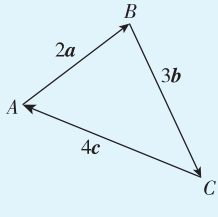
3. D 【解析】本题考查解一元二次不等式及集合的交集运算.
由 $x^2-x-2\leqslant 0$，得 $(x-2)(x+1)\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 2$，所以 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，由 $y^2-3y<0$，得 $y(y-3)<0$，解得 $0<y<3$，所以 $B=\{y\mid 0<y<3,y\in\mathbf{Z}\}=\{1,2\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$. 故选 D.

4. D 【解析】本题考查双曲线的渐近线方程.
双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$. 由题意可知 $2a=2$，得 $a=1$，则 $b=\sqrt{3}$，所以 $c^2=a^2+b^2=1+3=4$，即 $c=2$，故焦距为 $2c=4$（易错：c 为半焦距）.

5. B 【解析】本题考查向量的模.
分析：由题意可得 $\boldsymbol{c}=-\frac{1}{4}(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$，根据 $\boldsymbol{c}$ 的模结合数量积运算律可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值，进而得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$ 的值，即可求解.
由题意可知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，因为 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{c}=-\frac{1}{4}(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{c}^2=\frac{1}{16}(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2=\frac{1}{16}(4\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，即 $1=\frac{1}{16}(4+9+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}$，
则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1+2\times\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 B.

30 s 速解 武汉大学——王梓秋

（几何法）依题意，构造如图所示的 $\triangle ABC$，则 $AB=2,BC=3,AC=4$（提示：单位向量的模为 1），由余弦定理得 $\cos B=\frac{4+9-16}{2\times 2\times 3}=-\frac{1}{4}$，则对于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 α，有 $\cos\alpha=-\cos B=\frac{1}{4}$（提示：$\alpha$ 是 $\angle B$ 的补角），所以



$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1+1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 B.

6. D　卡住就看突破点 3 找思路、做练习

【解析】本题考查等比数列的前 n 项和、通项公式.

设该等比数列为 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，公比为 q，由该等比数列前 5 项的和等于 10，前 10 项的和等于 50，可知 $S_5=a_1+a_2+\cdots+a_5=10$，$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=50$，则 $S_{10}-S_5=a_6+a_7+\cdots+a_{10}=40$，所以 $\frac{a_6+a_7+\cdots+a_{10}}{a_1+a_2+\cdots+a_5}=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_5)q^5}{a_1+a_2+\cdots+a_5}=\frac{40}{10}=4$，即 $q^5=4$，$q=\sqrt[5]{4}$. 故选 D.

7. A　卡住就看突破点 4 找思路、做练习

【解析】本题考查圆锥的外接球.

分析：已知圆锥的顶点和底面的圆周都在球 O 的球面上，则该球为圆锥的外接球，根据几何关系寻找圆锥的高、底面半径与外接球的半径的关系即可求解.

设圆锥的外接球 O 的半径为 R，则球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3$. 由圆锥内接于球，得其轴截面为一个内接于球的大圆的等腰三角形，则轴截面三角形的外接圆半径就是外接球的半径. 已知

关键点

轴截面三角形的顶角为 120°，设该三角形顶角所对的边为 AB，由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin 120^\circ}=2R$，解得 $AB=\sqrt{3}R$，设圆锥的底面半径为 r，高为 h，则有 $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{3}R}{2}$，$h=\frac{1}{2}\times AB\times\tan 30^\circ=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}R\times\tan 30^\circ=\frac{1}{2}R$，所以圆锥的体积 $V_2=\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h=\frac{1}{3}\times\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2\times\frac{1}{2}R=\frac{1}{8}\pi R^3$，则该圆锥与球 O 的体积之比为 $\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{8}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{32}$. 故选 A.

8. D　卡住就看突破点 8 找思路、做练习

【解析】本题考查函数的奇偶性、周期性.

将 $f(x+1)+f(x-1)=0$ 中的 x 替换为 $x+1$ 可得 $f(x+2)+f(x)=0$，则 $f(x+2)=-f(x)$，用 $x+2$ 替换 x，即 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 因为 $f(x+2)+f(x)=0$，令 $x=0$，所以 $f(2)+f(0)=0$，又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，所以 $f(2)=0$；令 $x=1$，则 $f(3)+f(1)=0$，又 $f(1)=-f(-1)=-1$，所以 $f(3)=1$；令 $x=2$，则 $f(4)+f(2)=0$，因为 $f(2)=0$，所以 $f(4)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-1+0+1+0=0$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,026)=506\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=f(1)+f(2)=-1$. 故选 D.

单选小卷 2

1. A　【解析】本题考查复数的运算、复数的模.

因为 $z(1+2\mathrm{i})=5$，所以 $z=\frac{5}{1+2\mathrm{i}}$，故 $|z|=\frac{5}{|1+2\mathrm{i}|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. 故选 A.

2. D　【解析】本题考查空间线、面位置关系的判定.

对于 A，α 与 β 位置关系不确定，可能相交，平行或重合，故 **A**

错误；对于 B，α 与 β 不一定垂直，故 **B 错误**；对于 C，α 与 β 可以平行，不一定垂直，故 **C 错误**；对于 D，$a/\!/\alpha$，则在平面 α 内存在直线 $l/\!/a$，又 $a\perp\beta$，则 $l\perp\beta$，又 $l\subset\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$，故 **D 正确**. 故选 D.

3. C 【解析】本题考查集合间的关系及元素的互异性.

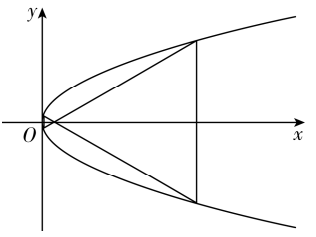
分析：由 $A\subseteq B$ 可知 A 中元素 m 必属于 B，且 $m\neq 1$，故 $m=3$ 或 $m=m^2$，从而分类讨论进行求解.

由 $A\subseteq B$，得 $m=3$ 或 $m=m^2$. 若 $m=3$，则 $A=\{1,3\}$，$B=\{1,3,9\}$，满足 $A\subseteq B$. 若 $m=m^2$，则 $m=0$ 或 $m=1$，当 $m=0$ 时，$A=\{1,0\}$，$B=\{1,3,0\}$，满足 $A\subseteq B$；当 $m=1$ 时，$A=\{1,1\}$，不满足集合元素的互异性. 综上，$m=0$ 或 $m=3$. 故选 C.

4. D 【解析】本题考查等差数列、等比数列的综合应用.

因为 a_3,a_4,a_7 成等比数列，所以 $a_4^2=a_3a_7$，即 $(a_1+3\times2)^2=(a_1+2\times2)(a_1+6\times2)$，解得 $a_1=-3$，所以 $S_7=-3\times7+\dfrac{7\times6}{2}\times2=21$. 故选 D.

5. D 【解析】本题考查抛物线的定义.



由题可知，抛物线的焦点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$，设等边三角形的边长为 a，则 $a\cos 30°+1=a$（大三角形）或 $1-a\cos 30°=a$（小三角形），解得 $a=4\pm2\sqrt{3}$. 故选 D.

6. B 卡住就看突破点 5 找思路、做练习

【解析】本题考查离散型随机变量的分布列及期望.

X 的取值为 0，1，2，3. 当 $X=0$ 时，4 放在第一位，其余数字全排列，故 $P(X=0)=\dfrac{A_3^3}{A_4^4}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$；当 $X=1$ 时，满足条件的排列有 1432，1423，2413，2431，2143，3412，3421，3142，3124，3214，3241，共 11 种，故 $P(X=1)=\dfrac{11}{24}$；当 $X=2$ 时，满足条件的排列有 1324，1342，1243，2134，2341，2314，共 6 种，故 $P(X=2)=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$；当 $X=3$ 时，满足条件的排列只有 1234，共 1 种，故 $P(X=3)=\dfrac{1}{24}$，所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{11}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{24}=\dfrac{13}{12}$. 故选 B.

7. B 卡住就看突破点 2 找思路、做练习

【解析】本题考查三角函数的图象变换及三角函数的性质.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图象可知，$A=\sqrt{2}$，图象与 x 轴的一个交点的坐标为 $\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$，相距最近的最高点的坐标为 $\left(\dfrac{\pi}{6},\sqrt{2}\right)$，所以 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $\dfrac{2\pi}{4\omega}=\dfrac{\pi}{4}$，解得 $\omega=2$，将 $\left(\dfrac{\pi}{6},\sqrt{2}\right)$ 代入 $f(x)$ 的解析式，得 $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\times2+\varphi\right)=\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $y=g(x)$ 的图象，所以

$g(x)=\sqrt{2}\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sqrt{2}\sin 2x$，所以 $g\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

30 s 速解　北京大学——郑威

（逆向思维、相位差）由题知，$g(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得 $f(x)$ 的图象，则 $g\left(\frac{\pi}{12}\right)=f(0)$. 由题图可知，$\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}$，则原点与波峰相位差为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$（个）周期（提示：取波峰处相位为 $\omega x+\varphi=0$，$y=\cos x$ 的一个周期为 2π，则 $x=0$ 处相位为 $\omega\cdot 0+\varphi=0-\frac{1}{6}\times 2\pi=-\frac{\pi}{3}$），所以 $g\left(\frac{\pi}{12}\right)=f(0)=\sqrt{2}\times\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

8. C　卡住就看突破点 6 找思路、做练习

【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性、极值与最值，同构问题.

分析：先代入函数后利用同构进行化简，得到关于 $\ln a$ 的不等式，然后将恒成立问题转化成最值问题，构造新函数，求解最值.

已知 $\forall x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，$f(ax)\geqslant e^x+ax$，则 $a\ln(ax)\geqslant e^x$，两边同乘 x，得 $ax\cdot\ln(ax)\geqslant xe^x$，于是 $e^{\ln(ax)}\cdot\ln(ax)\geqslant xe^x$.

令 $g(x)=xe^x$，$x\in(0,+\infty)$，求导得 $g'(x)=e^x+xe^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增. 又因为 $a\ln(ax)\geqslant e^x>0$，且 $a>0$，所以 $\ln(ax)>0$，所以 $g(\ln(ax))\geqslant g(x)$，得 $\ln(ax)\geqslant x$，即 $\ln a+\ln x\geqslant x$，所以 $\ln a\geqslant -\ln x+x$.

令 $h(x)=x-\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，求导得 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$，当 $x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$ 时，$h'(x)=1-\frac{1}{x}\leqslant 0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in[1,e]$ 时，$h'(x)=1-\frac{1}{x}\geqslant 0$，$h(x)$ 单调递增. 又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}+1$，$h(e)=e-1$，且 $\frac{1}{e}+1<e-1$，所以 $h_{\max}(x)=e-1$，即 $\ln a\geqslant e-1$.

故选 C.

单选小卷 3

1. B　【解析】本题考查复数的运算及复数的概念.

由 $i-iz=1$，移项得 $-iz=1-i$，两边同乘 i，得 $-i^2z=i-i^2$，因为 $i^2=-1$，所以 $z=1+i$，故复数 z 的虚部为 1. 故选 B.

2. D　【解析】本题考查解绝对值不等式及集合的交集运算.

不等式 $|x|\geqslant 1$ 的解为 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$，即 $A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{x|x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x<2\}$. 故选 D.

3. C　【解析】本题考查排列组合及其应用.

因为甲、乙均不能站最左端，所以最左端有 3 种站法，剩下的位置排另外四名同学，有 A_4^4 种站法，所以共有 $3A_4^4=3\times4\times3\times2\times1=72$（种）不同的站法. 故选 C.

4. D　【解析】本题考查利用正弦定理解三角形.

因为 $b\tan A=a\tan B$，所以 $\dfrac{b\sin A}{\cos A}=\dfrac{a\sin B}{\cos B}$，由正弦定理可得 $\dfrac{\sin B\sin A}{\cos A}=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos B}$. 又 $A,B\in(0,\pi)$，$\sin A\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\cos B$，所以 $A=B$. 又 $B=2C$，$A+B+C=\pi$，可得 $A=\dfrac{2\pi}{5}$. 故选 D.

5. C　【解析】本题考查直线与圆的位置关系.

设圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 O，由题知，圆 O 的半径为 2，因为圆上恰有三个点到直线 l 的距离等于 1，所以圆心 $O(0,0)$ 到直线 $l:x-y+b=0$ 的距离为 1，即 $\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $b=\pm\sqrt{2}$. 故选 C.

关键点

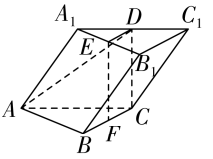
6. C　卡住就看突破点 3 找思路、做练习

【解析】本题考查等差数列前 n 项和与 n 的比所组成的等差数列.

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-10$，其前 n 项和为 S_n，则 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 -10 的等差数列，设 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 m，因为 $3S_4-4S_3=12$，所以 $\dfrac{S_4}{4}-\dfrac{S_3}{3}=m=1$，所以 $\dfrac{S_n}{n}=-10+(n-1)\times 1=n-11$，$\dfrac{S_{12}}{12}=1$，即 $S_{12}=12$. 故选 C.

7. D　卡住就看突破点 4 找思路、做练习

【解析】本题考查异面直线所成角.



连接 CD，DE，如图所示，因为 D，E 分别为 A_1C_1，A_1B_1 的中点，所以 $DE/\!/B_1C_1$ 且 $DE=\dfrac{1}{2}B_1C_1$. 因为四边形 BB_1C_1C 为平行四边形，所以 $BC/\!/B_1C_1$，因为 F 为 BC 的中点，所以 $CF/\!/B_1C_1/\!/DE$ 且 $CF=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}B_1C_1=DE$，所以四边形 $CDEF$ 为平行四边形，则 $EF/\!/CD$，故异面直线 AD 和 EF 所成的角等于 $\angle ADC$ 或其补角. 在 $\triangle CC_1D$ 中，$CC_1=2$，$C_1D=1$，$\angle CC_1D=60°$，由余弦定理可得 $CD=\sqrt{CC_1^2+C_1D^2-2CC_1\cdot C_1D\cos 60°}=\sqrt{4+1-2\times 2\times 1\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{3}$，所以 $C_1D^2+CD^2=C_1C^2$，所以 $CD\perp C_1D$，又 $C_1D/\!/AC$，所以 $AC\perp CD$，所以 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{7}$. 在 $\triangle ACD$ 中，$CD=\sqrt{3}$，$AD=\sqrt{7}$，$AC\perp CD$，所以 $\cos\angle ADC=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. 因此异面直线 AD 和 EF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. 故选 D.

关键点

8. D　卡住就看突破点 7 找思路、做练习

【解析】本题考查分段函数的零点问题.

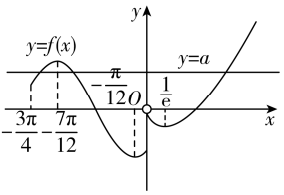
分析：利用导数研究当 $x>0$ 时 $f(x)$ 的单调性及一些特殊点的取值.

当 $x>0$ 时，$f(x)=x\ln x$，求导得 $f'(x)=\ln x+1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{e}$. 当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $x=\dfrac{1}{e}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}=-\dfrac{1}{e}$，且 $f(1)=\ln 1=0$，当 $x\to+\infty$ 时，

$f(x)\to+\infty$.

分析：当$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 0$时，可求出$2x-\frac{\pi}{3}$的取值范围，并得到$f(x)$的单调性和值域，据此画出$f(x)$的大致图象.

当$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 0$时，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，且$-\frac{11\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant -\frac{\pi}{3}$，可求出$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$f(0)=\sin\left(2\times 0-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合正弦函数图象可知当$-\frac{11}{6}\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant-\frac{\pi}{3}$时，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的值域为$[-1,1]$，其中$f\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{7\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$，因此$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$在$\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{7\pi}{12}\right]$上单调递增，在$\left(-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12}\right]$上单调递减，在$\left(-\frac{\pi}{12},0\right]$上单调递增，故函数$f(x)=\begin{cases}x\ln x, x>0,\\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right), -\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$的大致图象如图所示.



分析：作出图象后，将函数零点问题转化为函数图象的交点问题，数形结合即可求解.

已知函数$y=f(x)-a$有3个零点，由图象可知，当$a\in\left[\frac{1}{2},1\right)$或$a\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$时，$y=f(x)$的图象与直线$y=a$有3个交点，即$y=f(x)-a$有3个零点. 综上，实数$a$的取值范围是$\left(-\frac{1}{e},0\right)\cup\left[\frac{1}{2},1\right)$. 故选D.

单选小卷4

1. **C** 【解析】本题考查解分式不等式、集合的包含关系及集合的运算.

$A=\left\{x\left|\frac{1}{x}<1\right.\right\}\Rightarrow A=\{x|x>1\text{ 或 }x<0\}$，$B=\{x|x>1\}$，所以$A\cap B=\{x|x>1\}$，故**A 错误**；$A=\{x|x>1\text{ 或 }x<0\}$，$B=\{x|x>1\}$，所以$B\subsetneq A$，所以$A\cup B=A$，故**B 错误**，**C 正确**；由集合$A$中包含小于0的元素，而集合$B$中没有小于0的元素可知**D 错误**. 故选C.

2. **A** 【解析】本题考查复数的运算及共轭复数.

$z=\frac{i^3}{1-2i}=\frac{-i}{1-2i}=\frac{-i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$，则$\bar{z}=\frac{2}{5}+\frac{i}{5}$，所以$\bar{z}$的虚部为$\frac{1}{5}$. 故选A.

3. **C** 【解析】本题考查平面向量的位置关系及坐标运算.

由已知得，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(1,2)+(2,x)=(4,4+x)$，因为$\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，则$1\times 4+2\times(4+x)=0$，即$4+8+2x=0$，解得$x=-6$. 故选C.

4. **B** 【解析】本题考查椭圆、双曲线的离心率.

由题可得 $e_1=\sqrt{2}$，$e_2=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$，又 $e_1=2e_2$，所以 $e_1^2=4e_2^2$，即 $2=\dfrac{4(a^2-1)}{a^2}$，解得 $a=\sqrt{2}$.

5. A 【解析】本题考查等差、等比数列的性质及其应用.

已知数列$\{a_n\}$是等差数列，数列$\{b_n\}$是等比数列，则 $a_2+a_6+a_{10}=3a_6=12$，$b_3b_5b_7=b_5^3=5\sqrt{5}$，解得 $a_6=4$，$b_5=\sqrt{5}$，所以 $a_4+a_8=2a_6=8$，$b_4b_6=b_5^2=5$，因此$\dfrac{a_4+a_8}{1+b_4b_6}=\dfrac{8}{1+5}=\dfrac{4}{3}$. 故选 A.

6. A 卡住就看突破点 1 找思路、做练习

【解析】本题考查三角恒等变换.

$\sin 3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos 2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha$，

因为 $\sin\alpha=2\sin 3\alpha$，所以 $\sin\alpha=2(\sin\alpha\cos 2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha)$，

又 α 为锐角，所以 $\sin\alpha\neq 0$，则 $1=2(\cos 2\alpha+2\cos^2\alpha)$，

可得 $2\cos 2\alpha+2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\alpha=0$，即 $3\cos 2\alpha+2\cos^2\alpha=0$. 故选 A.

7. B 卡住就看突破点 5 找思路、做练习

【解析】本题考查离散型随机变量的分布列和均值.

记 1 个“正确分类样本”为 A，1 个“错误分类样本”为 B，2 个“不确定样本”为 C_1，C_2，已知测试到 A 就停止，ξ 为测试到的 C_1，C_2 的个数，则 ξ 的可能取值为 0，1，2.

$\xi=0$ 时有两种情况：①第一个是 A；②第一个是 B，第二个是 A，则 $P(\xi=0)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$；

$\xi=1$ 时有三种情况：①第一个是 C_1 或 C_2，第二个是 A；②第一个是 C_1 或 C_2，第二个是 B，第三个是 A；③第一个是 B，第二个是 C_1 或 C_2，第三个是 A，则 $P(\xi=1)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$；

$\xi=2$ 时有三种情况：①前两个是 C_1 和 C_2，第三个是 A；②前两个是 C_1 或 C_2 和 B，第三个是 C_1，C_2 中剩下的一个，第四个是 A；③前两个是 C_1 和 C_2，第三个是 B，第四个是 A，则 $P(\xi=2)=2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times 1\times 1+2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{3}$.

综上所述，$E(\xi)=0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3}=1$. 故选 B.



30 s 速解　北京大学——郑威

（用概率计算期望）“正确分类样本”出现在 4 个位置的可能性相等，即在遇到“正确分类样本”前测试到的样本个数的期望为 $E=\dfrac{0+1+2+3}{4}=\dfrac{3}{2}$，其余 3 个位置“不确定样本”出现的概率为 $p=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$，则 $E(\xi)=pE=1$，故选 B.

8. D 卡住就看突破点 6 找思路、做练习

【解析】本题考查导数的应用及不等式的恒成立问题.

分析：利用导数可判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，结合 $f(-x)=-f(x)$，将原问题转化为 $ae^x>x$ 恒成立，即 $a>\dfrac{x}{e^x}$ 恒成立，构造新函数分析新函数单调性和最值求解.

$f'(x)=e^{x}+e^{-x}+2\cos x, e^{x}+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^{x-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，$2\cos x\geqslant -2$，故 $f'(x)=e^{x}+e^{-x}+2\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(ae^{x})+f(-x)>0$ 恒成立等价于 $f(ae^{x})>-f(-x)=f(x)$，等价于 $ae^{x}>x$ 恒成立，即 $a>\dfrac{x}{e^{x}}$ 恒成立. 令 $g(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$（提示：将问题转化为研究函数 $g(x)$ 的最值问题，利用导数进行研究），则 $g'(x)=\dfrac{e^{x}-xe^{x}}{(e^{x})^{2}}=\dfrac{1-x}{e^{x}}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{e}$，故 $a>\dfrac{1}{e}$. 故选 D.

单选小卷 5

1. **B** 【解析】本题考查集合的并集、补集运算.
由题可得 $\complement_{U}B=\{1,3,5,6\}$，因为 $A=\{1,3,5\}$，所以 $A\cup(\complement_{U}B)=\{1,3,5,6\}$，共 4 个元素. 故选 B.

2. **B** 【解析】本题考查复数的运算、共轭复数.
易知 $\bar{z}=a-bi$，由题意得 $z+\bar{z}=2a=2$，$z\cdot\bar{z}=a^{2}+b^{2}=2(b<0)$，联立解得 $a=1$，$b=-1$，所以 $z=1-i$. 故选 B.

3. **B** 【解析】本题考查线性回归模型.
由经验回归方程 $\hat{y}=0.008x+16.392$，得 2026 年该地区的此种经济指标的预测值 $\hat{y}=0.008\times 2026+16.392=32.6$，所以残差=观测值−预测值=32.1−32.6=−0.5. 故选 B.

4. **C** 【解析】本题考查条件概率与对立事件.
设“某一天的空气质量为优良”为事件 A，“随后一天的空气质量为优良”为事件 B，依题意，$P(A)=0.75$，$P(AB)=0.6$，则 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.6}{0.75}=0.8$，即某天的空气质量为优良，随后一天的空气质量为优良的概率为 0.8，所以某天的空气质量为优良，随后一天的空气质量不为优良的概率是 0.2. 故选 C.

5. **D** 【解析】本题考查圆台的体积、球的体积.
由题意，$V_{杯}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{13}{2}\times(3^{2}+4^{2}+3\times 4)\pi=\dfrac{481}{6}\pi$，放球之前杯中水呈倒圆台形，$V_{水}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13}{2}\times\left[3^{2}+\left(\dfrac{3+4}{2}\right)^{2}+3\times\dfrac{3+4}{2}\right]\pi=\dfrac{1\,651}{48}\pi$，所以球的体积 $V_{球}=V_{杯}-V_{水}=\dfrac{481}{6}\pi-\dfrac{1\,651}{48}\pi=\dfrac{2\,197}{48}\pi$，即 $\dfrac{4\pi r^{3}}{3}=\dfrac{2\,197\pi}{48}$，解得 $r=\dfrac{13}{4}$. 故选 D.



30 s 速解　北京大学——郑威

根据加入球之后水位的变化可知，球的体积 $V_{球}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{13}{4}\times\left[\left(\dfrac{7}{2}\right)^{2}+4^{2}+\dfrac{7}{2}\times 4\right]\pi=\dfrac{2\,197}{48}\pi$，即 $\dfrac{4}{3}\pi r^{3}=\dfrac{2\,197}{48}\pi$，解得 $r=\dfrac{13}{4}$. 故选 D.

6. **C** 卡住就看突破点 1 找思路、做练习
【解析】本题考查三角恒等变换.
分析：对于 $\dfrac{\sin 2\theta+2\cos^{2}\theta}{\cos 2\theta}$，使用二倍角公式化简可知分子分母均为二次，考虑弦化切再求解.

因为 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\cos\theta$，所以 $\tan\theta=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{\sin 2\theta+2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2\tan\theta+2}{1-\tan^2\theta}=\frac{2}{1-\tan\theta}=3\sqrt{3}-3$. 故选 C.

7. D　卡住就看突破点 8 找思路、做练习

【解析】本题考查函数的奇偶性、周期性、函数图象的对称性.

因为 $f(3x+2)$ 为奇函数，所以 $f(-3x+2)=-f(3x+2)$，对上述等式两边同时求导得 $-3f'(-3x+2)=-3f'(3x+2)$，即 $f'(-3x+2)=f'(3x+2)$，所以 $g(x)=f'(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.

因为 $f(x+1)+x$ 为偶函数，所以 $f(-x+1)-x=f(x+1)+x$，对上述等式两边同时求导得 $-f'(-x+1)-1=f'(x+1)+1$，即 $-2=f'(x+1)+f'(-x+1)$，所以 $g(x)=f'(x)$ 的图象关于点 $(1,-1)$ 中心对称，所以 $g(x)$ 是周期为 4 的函数，且 $g(1)=-1$.

由 $g(0)=-2$，$g(1)=-1$，可得 $g(2)=0$，$g(3)=-1$，则 $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=-4$，则 $\sum_{k=0}^{15}g(k)=-4\times4=-16$. 故选 D.

8. A　卡住就看突破点 9 找思路、做练习

【解析】本题考查对数式和指数幂的比较大小问题.

因为 $1<e^{\frac{3}{2}}<e^2<2.72^2<\frac{15}{2}$，所以 $\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}>\frac{1}{\frac{15}{2}}$，即 $e^{-\frac{3}{2}}>\frac{2}{15}$，所以 $a>c$.

构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}(x>0)$，求导得 $f'(x)=\frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因此 $f(x)>f(0)=0$，即 $\ln(1+x)>\frac{2x}{x+2}(x>0)$，

令 $x=\frac{1}{7}$，得 $\ln\frac{8}{7}>\frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{7}+2}=\frac{2}{15}$，得证 $b>c$.

构造函数 $g(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，求导得 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{x+1}$，因为 $x>0$，所以 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $g(x)<g(0)=0$，即 $\ln(x+1)<x(x>0)$，

令 $x=\frac{1}{7}$，得 $\ln\frac{8}{7}<\frac{1}{7}$，由 $7^2>2.72^3>e^3>1\Rightarrow7>e^{\frac{3}{2}}>1\Rightarrow\frac{1}{7}<e^{-\frac{3}{2}}$，故 $a>b$. 综上，$a>b>c$. 故选 A.



30 s 速解　北京大学——杨晨博

（近似值估计、对数放缩）$e\approx2.71828$，$\sqrt{e}\approx1.65$，则 $a=\frac{1}{e\sqrt{e}}>\frac{1}{3\times2}=\frac{1}{6}$，通过放缩得到 $b<\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}$（提示：对数放缩 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号），因此 $b<a$，$c<a$.

又 $b>\frac{2\times\left(\frac{8}{7}-1\right)}{\frac{8}{7}+1}=\frac{2}{15}=c$（提示：$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$），所以 $a>b>c$.

单选小卷 6

1. B 【解析】本题考查集合的交集运算.

由集合 $A=\{x\mid -1<x<5, x\in \mathbf{N}^*\}$，得 $A=\{1,2,3,4\}$，又 $B=\{0,1,3,5\}$，所以 $A\cap B=\{1,3\}$. 故选 B.

2. C 【解析】本题考查复数的运算.

由题得 $3-z=\mathrm{i}\cdot(z-1)=\mathrm{i}z-\mathrm{i}$，移项得 $3+\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})z$，即 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$. 故选 C.

3. D 【解析】本题考查“在”某点处的切线方程问题.

易得 $f(1)=0$，又 $f'(x)=3x^2\ln x+\dfrac{x^3+1}{x}$，所以 $f'(1)=2$，所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $2x-y-2=0$. 故选 D.

4. A 【解析】本题考查随机变量的期望.

由题意得 ξ 可取 $0,1,2$，$P(\xi=0)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{16}$，$P(\xi=1)=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$，$P(\xi=2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$，所以 $E(\xi)=0+\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{2}$，故选 A.



30 s 速解　武汉大学——王梓秋

（期望的线性可加性）学霸提示：将“1 号盒中的总数”拆解为“每个小球是否落入 1 号盒”的变量之和，这样就剥离了复杂的组合分配关系，只需算出每个小球单独落入 1 号盒的概率，再利用期望的线性可加性直接相加即可.

记 2 个小球分别为甲、乙，令 $\xi=X_1+X_2$，其中 $X_1=\begin{cases}1,\text{甲球落入 1 号盒},\\0,\text{甲球未落入 1 号盒},\end{cases}$ $X_2=\begin{cases}1,\text{乙球落入 1 号盒},\\0,\text{乙球未落入 1 号盒},\end{cases}$ 每个小球独立且等可能地落入 4 个盒子中的 1 个，则有 $P(X_1=1)=P(X_2=1)=\dfrac{1}{4}$. 因此，$E(X_1)=\dfrac{1}{4}$，$E(X_2)=\dfrac{1}{4}$. 由期望的线性可加性，可得 $E(\xi)=E(X_1)+E(X_2)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

5. A 【解析】本题考查圆与抛物线的交点问题.

分析：根据圆以及抛物线的对称性求解.

圆 $(x+1)^2+y^2=16$ 和抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 都关于 x 轴对称，因此交点 M,N 也关于 x 轴对称. 设 $M(x,y)$，$N(x,-y)$，由 $|MN|=4\sqrt{3}$ 得 $2|y|=4\sqrt{3}$，即 $y^2=12$，则 $(x+1)^2+12=16\Rightarrow(x+1)^2=4$，由 $x\geqslant 0$ 解得 $x=1$，所以一个交点坐标为 $(1,2\sqrt{3})$，代入抛物线方程 $y^2=2px$，得 $12=2p\Rightarrow p=6$. 故选 A.

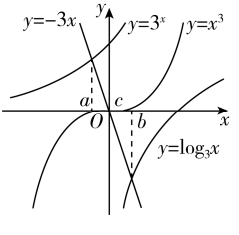
6. C 卡住就看突破点 7 找思路、做练习

【解析】本题考查函数零点问题、数形结合法比较大小.

$f(x)=3^x+3x$ 的零点即为方程 $3^x=-3x$ 的解，即为 $y=3^x$ 的图象与 $y=-3x$ 图象的交点横坐标；

$g(x)=\log_3 x+3x$ 的零点即为方程 $\log_3 x=-3x$ 的解，即为 $y=\log_3 x$ 的图象与 $y=-3x$ 图象的交点横坐标；

$h(x)=x^3+3x$ 的零点即为方程 $x^3=-3x$ 的解，即为 $y=x^3$ 的图象与 $y=-3x$ 图象的交点横坐标.



因为函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 的零点分别为 a,b,c，作出函数 $y=-3x$，$y=x^3$，$y=\log_3 x$，$y=3^x$ 的图象如图，由图可知 $b>c>a$.

7. B　卡住就看突破点 3 找思路、做练习

【解析】本题考查等比数列基本量的计算.

由题意可知，$a_{n+1}^2=\left(\frac{1}{4}a_n\right)^2+\left(\frac{3}{4}a_n\right)^2=\frac{5}{8}a_n^2$，易知 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{10}}{4}a_n$. 又 $a_1=1$，所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，$\frac{\sqrt{10}}{4}$为公比的等比数列，所以 $a_n=\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}$，故 $a_5=\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^4=\frac{25}{64}$.

8. D　卡住就看突破点 2 找思路、做练习

【解析】本题考查正弦型函数的图象的对称性、单调性.

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，因为 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$中心对称，则有 $\omega\times\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称，则有 $\omega\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\varphi=m\pi+\frac{\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$，因此 $\left(\omega\times\frac{\pi}{4}+\varphi\right)-\left[\omega\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\omega\times\frac{\pi}{2}=k\pi-\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right),k,m\in\mathbf{Z}$，化简得 $\omega=2(k-m)-1,k,m\in\mathbf{Z}$，则 ω 是一个奇数.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，因为 $f(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$上单调，所以 $\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{8}$，解得 $\omega\leqslant8$.

①当 $\omega=7$ 时，则有 $7\times\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{7\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，由于$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，

此时 $f(x)=\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 时，$7x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{8}\right)$，函数 $y=\sin t$ 在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{8}\right)$上不单调，因此 $\omega=7$ 不符合题意；

②当 $\omega=5$ 时，则有 $5\times\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，由于$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，

此时 $f(x)=\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 时，$5x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right)$，函数 $y=\sin t$ 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right)$上单调递增，因此 $\omega=5$ 符合题意.

综上，ω 的最大值为 5. 故选 D.

单选重难突破

突破点 1　三角恒等变换（活用公式）

1. C　【解析】分析：题目条件为正、余弦混合等式及正切值，要求正切值，因此需要弦化切，统一成正切值计算. 由 $\cos(\alpha+\beta)=2\sin(\alpha-\beta)$，得 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2\sin\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\sin\beta$，即$(\cos\alpha-2\sin\alpha)\cos\beta=(\sin\alpha-2\cos\alpha)\sin\beta$，所以 $\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=\tan\beta$，因此 $\frac{1-2\tan\alpha}{\tan\alpha-2}=-\frac{3}{2}$，解得 $\tan\alpha=-4$，故 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{8}{15}$. 故选 C.

2. C 【解析】因为 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

当 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 时，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{3}$；

当 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ 时，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}}=3$.

综上，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ 或 3. 故选 C.



15 s 速解　武汉大学——王梓秋

（万能公式）学霸提示：注意到本题可求出 $\sin\alpha$ 的值，需求 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值，由此可以联想到万能公式. 由 $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$，其中 $t=\tan\frac{\alpha}{2}$，可得 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{5}$，解得 $\tan\frac{\alpha}{2}=3$ 或 $\frac{1}{3}$. 故选 C.

3. B 【解析】由 $\sin\alpha+\sin\beta=0$，$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}$，得 $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=3$，整理得 $2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=3$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$. 故选 B.



15 s 速解　武汉大学——王梓秋

（取特殊值）学霸提示：注意到 $\sin\alpha=-\sin\beta$，$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}$，可尝试对 α 和 β 取特殊的相反数，且满足 $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故可取 $\alpha=-\beta=\frac{\pi}{6}$. 取 $\alpha=-\beta=\frac{\pi}{6}$，此时满足题目中的两个条件，则 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

学霸点拨：由 $\sin\alpha=-\sin\beta$ 可以推导出 $\alpha=-\beta+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $\alpha=\beta+(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，后者 α 和 β 余弦值的和为 0，与题目矛盾，故只需要考虑前者.

4. B 【解析】由 $3\sqrt{3}\cos\alpha-3\sin\alpha=4$，得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{2}{3}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$，所以 $\cos2\alpha-\sqrt{3}\sin2\alpha=2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\left[2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1\right]=2\times\left(2\times\frac{4}{9}-1\right)=-\frac{2}{9}$. 故选 B.

5. D 【解析】由题意可知，大正方形的边长为 $\sqrt{13}$，小正方形的边长为 1，设直角三角形中较短的直角边的长为 x，则直角三角形中较长的直角边的长为 $(x+1)$，由勾股定理可得

$x^2+(x+1)^2=13$，解得 $x=2$（负值舍去），所以 $\tan\theta=\frac{2}{3}$，因此 $\tan 2\theta=\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}$. 故选 D.

6. A 【解析】由已知 $\cos(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$，可得 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$①.

因为 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$存在，所以 $\cos\alpha\cos\beta\neq0$，将①式两边同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 可得 $1+\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$，代入 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$，得 $\tan\alpha+\tan\beta=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

根据两角和的正切公式 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，代入 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{3}{2}$和 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$，得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$. 故选 A.

7. B 【解析】因为 $3\cos 2\alpha+5=8\sin\alpha$，

所以 $3(1-2\sin^2\alpha)+5-8\sin\alpha=0$，即 $3\sin^2\alpha+4\sin\alpha-4=0$，

化简得 $(3\sin\alpha-2)(\sin\alpha+2)=0$，解得 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$或 $\sin\alpha=-2$（舍去），因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 B.

8. D 【解析】因为 $0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，化简得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$①.

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，化简得 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$②.

联立①②得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

由 $0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，得 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{8}$，

根据半角公式 $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$，代入 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$得 $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

9. B 【解析】因为 α 为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{7}$. 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$. 又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{7}-\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$，$2\beta=\frac{2\pi}{3}$，

$\cos 2\beta=-\frac{1}{2}$. 故选 B.

突破点 2　三角函数的图象及性质（数形结合/整体代换）

1. C　【解析】分析：根据 x 的范围求出 $3x+\frac{\pi}{6}$ 的范围，再由函数值为零，得到 $3x+\frac{\pi}{6}$ 的取值，进而得到零点个数. $\because 0\leqslant x\leqslant\pi$，$\therefore \frac{\pi}{6}\leqslant 3x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{19\pi}{6}$，则当 $f(x)=0(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 时，$3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$3x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$ 或 $3x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$，解得 $x=\frac{\pi}{9}$，$\frac{4\pi}{9}$ 或 $\frac{7\pi}{9}$，故有 3 个零点. 故选 C.

2. C　【解析】由题图可得 $\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3\pi}{4}$，故 $\omega=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，将点 $\left(\frac{2\pi}{3},-2\right)$ 代入整理得 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=-1$，于是 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，由于 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 故选 C.

3. D　【解析】分析：借助三角恒等变换可将原相应函数化为正弦型函数，利用正弦型函数的性质计算.

$f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{a\sin 2x+\cos 2x+1}{2}=\frac{\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\varphi)+1}{2}$，其中 $\tan\varphi=\frac{1}{a}$，由题意，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 为函数 $f(x)$ 的最值，所以 $\left(a\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pm\sqrt{a^2+1}+1}{2}$，即 $\frac{a+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pm\sqrt{a^2+1}+1}{2}$，即 $\sqrt{3}a+1=\pm2\sqrt{a^2+1}$，

两边平方得 $a^2-2\sqrt{3}a+3=0$，解得 $a=\sqrt{3}$. 故选 D.



15 s 速解　北京大学——郑威

根据对称性，有 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即 $(a\sin 0+\cos 0)\cdot\cos 0=\left(a\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}$，解得 $a=\sqrt{3}$. 经检验，$a=\sqrt{3}$ 符合题意.

4. A　【解析】由 $f(x)=\sin x+\cos(x+\varphi)=\sin x+\cos x\cos\varphi-\sin x\sin\varphi=(1-\sin\varphi)\sin x+\cos\varphi\cos x=\sqrt{(1-\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi}\cdot\sin(x+\beta)=\sqrt{2-2\sin\varphi}\sin(x+\beta)$，其中 $\tan\beta=\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}\left(\varphi\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$，又因为 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，所以 $\sqrt{2-2\sin\varphi}=1$，解得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，结合选项可知，$\varphi$ 可以为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

5. A　【解析】因为函数 $f(x)=\tan\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 1，所以 $\frac{\pi}{\omega}=1$，得 $\omega=\pi$，所以 $f(x)=\tan\pi x$. 令 $\pi x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{k}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k}{2},0\right),k\in\mathbf{Z}$.

因为将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{3}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图象，所以将 $f(x)$ 图象的对称中心向右平移 $\frac{1}{3}$ 个单位长度得

到函数 $g(x)$ 图象的对称中心，所以 $g(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{3},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 A.

6. C 【解析】对于 A，设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由题图知 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{2}$，解得 $T=\pi$，故 **A 错误**；对于 B，由 $T=\pi$，得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，则 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$，当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，函数 $f(x)$ 取最大值，则 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，化简得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，结合 $0<\varphi<\pi$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，由函数 $f(x)$ 在 y 轴上的截距为 $\sqrt{3}$，即 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，解得 $A=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$f(x)$ 的最大值为 2，故 **B 错误**；对于 C，由 $-\frac{\pi}{2}+2k_1\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z})$，得 $-\frac{5\pi}{12}+k_1\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z})$，当 $k_1=0$ 时，可得 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增，故 **C 正确**；对于 D，$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，该函数不是偶函数，故 **D 错误**. 故选 C.

7. B 【解析】分析：通过换元将问题进行转化，采用选项代入验证法，快速筛选出符合条件的 ω 值.

设 $t=\omega x-\frac{\pi}{6}$，由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 且 $\omega>0$，得 $t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-1,2]$ 等价于当 $t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2\sin t\in[-1,2]$，将选项依次代入验证.

对于 A，当 $\omega=4$ 时，$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$，存在 $t=\frac{3\pi}{2}$ 使 $2\sin t=-2\notin[-1,2]$，不符合值域条件，故 **A 错误**；对于 B，当 $\omega=2$ 时，$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\sin t$ 的最大值为 1，此时 $t=\frac{\pi}{2}$，$\sin t$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$，此时 $t=-\frac{\pi}{6}$，故 $2\sin t\in[-1,2]$，符合值域条件，故 **B 正确**；对于 C，当 $\omega=1$ 时，$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\sin t$ 的最大值为 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$2\sin t\leqslant\sqrt{3}<2$，不符合值域条件，故 **C 错误**；对于 D，当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时，$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$，$\sin t$ 的最大值为 $\sin\frac{\pi}{12}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $2\sin t<\sqrt{3}<2$，不符合值域条件，故 **D 错误**. 故选 B.

突破点 3　数列基本量的计算（方程法/性质法）

1. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_3+S_3=1$，$a_4+S_4=6$，得 $(a_4+S_4)-(a_3+S_3)=6-1=5$，即 $a_4-a_3+(S_4-S_3)=5$，则 $a_4+d=5$，因此 $a_5=a_4+d=5$，所以 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=9\times5=45$.

2. D 【解析】令 $m=1$，则有 $a_{n+1}=a_1+a_n$，即 $a_{n+1}-a_n=a_1$，所以 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，a_1 为公差的等差数列，所以 $a_n=a_1+(n-1)a_1=na_1$，又 $a_3=3a_1=6$，所以 $a_1=2$，所以 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}a_1=110$. 故选 D.

3. **A** 【解析】分析：利用求和公式分别表示出等差数列的前6项和与等比数列的前3项和，再由二者相等建立关于 m 的方程，进一步求出 S.

依题意可知，$a_6=6m$，$S=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}=21m$，显然 $m\neq1$，又 $S=\dfrac{m(1-m^3)}{1-m}=m(m^2+m+1)$，则 $m(m^2+m+1)=21m$. 又 $m\in\mathbf{N}^*$，故 $m\neq0$，所以 $m^2+m+1=21$，解得 $m=4$，所以 $S=21\times4=84$. 故选 A.

4. **B** 【解析】因为正项数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2\cdot a_7=16$，所以 $a_1\cdot a_8=a_2\cdot a_7=a_3\cdot a_6=a_4\cdot a_5=16$（提示：等比数列下标性质），所以 $\log_4a_1+\log_4a_2+\cdots+\log_4a_8=\log_4(a_1a_2\cdots a_8)=\log_4(16\times16\times16\times16)=8$. 故选 B.



15 s 速解　武汉大学——王梓秋

（特殊值法）本题无法求出 $\{a_n\}$ 的具体通项，表明对于任意一个满足题意的等比数列 $\{a_n\}$，将对应项的值代入所求式均得定值，于是不妨令 $a_n=4$，满足题目条件，则所求式等于 $1\times8=8$，故选 B.

5. **B** 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 从第5项开始是等差数列，所以 $a_5+a_6+\cdots+a_{12}=\dfrac{(a_5+a_{12})\times8}{2}=S_{12}-S_4=108-12=96$，则 $a_5+a_{12}=\dfrac{96\times2}{8}=24$，于是 $a_5=24-a_{12}=24-19=5$. 故选 B.

6. **B** 【解析】由题可知，$\{a_n\}$ 的公比不为 -1，由等比数列片段和的性质知 S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$ 成等比数列，所以 $(S_{20}-S_{10})^2=S_{10}(S_{30}-S_{20})$，则 $(21-S_{10})^2=S_{10}(49-21)$，所以 $S_{10}^2-70S_{10}+441=(S_{10}-7)(S_{10}-63)=0$，则 $S_{10}=7$ 或 $S_{10}=63$.

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

若 $S_{10}=63$，则 $S_{20}-S_{10}=S_{10}q^{10}\Rightarrow-42=63\cdot q^{10}$，而 $q^{10}>0$，显然等式不成立；

若 $S_{10}=7$，则 $S_{20}-S_{10}=S_{10}q^{10}\Rightarrow14=7\cdot q^{10}\Rightarrow q^{10}=2>0$，满足题设.

所以 $S_{10}=7$. 故选 B.

7. **C** 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_1<0$，$a_2=0$ 可知，$d=a_2-a_1=-a_1>0$，所以 $a_n=(n-2)d$，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[-d+(n-2)d]}{2}=\dfrac{n(n-3)d}{2}$，不等式 $S_n\leqslant a_n$ 即 $\dfrac{n(n-3)d}{2}\leqslant(n-2)d$，不等式化为 $n(n-3)\leqslant2(n-2)$，整理得 $n^2-5n+4\leqslant0$，解得 $1\leqslant n\leqslant4$，因为 n 为正整数，所以 n 的最大值为4，所以满足 $S_n\leqslant a_n$ 的 n 的最大值为4. 故选 C.

8. **C** 【解析】因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$，所以 $a_n\neq0$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n}$. 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{1}\cdot1=n$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 也符合上式，故 $a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

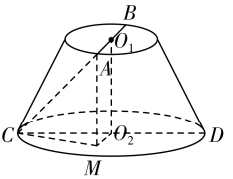
所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(1+n)}{2}$，所以 $\dfrac{2S_n+10}{a_n}=\dfrac{n(n+1)+10}{n}=n+\dfrac{10}{n}+1$，根据对勾函数的性质可知，$y=x+\dfrac{10}{x}+1$ 在 $[1,\sqrt{10})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{10},+\infty)$ 上单调递增，当 $n=3$ 时，$\dfrac{2S_n+10}{a_n}=3+\dfrac{10}{3}+1=\dfrac{22}{3}$，当 $n=4$ 时，$\dfrac{2S_n+10}{a_n}=4+\dfrac{10}{4}+1=\dfrac{15}{2}$，又 $\dfrac{22}{3}<\dfrac{15}{2}$，所以 $\dfrac{2S_n+10}{a_n}$ 的最小值为 $\dfrac{22}{3}$. 故选 C.

刷有所得　数列是特殊的离散函数，一些问题可以用函数思想解决.

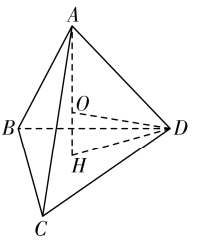
9. **C** 【解析】设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，因为$4+10=2\times7$，所以$b_4+b_{10}=2b_7$，因此$\dfrac{2a_4}{b_4+b_{10}}=\dfrac{2a_4}{2b_7}=\dfrac{a_4}{b_7}$，因为$b_1+b_8+b_{12}=b_1+(b_1+7d)+(b_1+11d)=3b_1+18d=3(b_1+6d)=3b_7$，所以$\dfrac{3a_8}{b_1+b_8+b_{12}}=\dfrac{3a_8}{3b_7}=\dfrac{a_8}{b_7}$，所以原式化简为$\dfrac{a_4}{b_7}+\dfrac{a_8}{b_7}=\dfrac{a_4+a_8}{b_7}$，而$a_4+a_8=2a_6$，所以原式等于$\dfrac{2a_6}{b_7}$，而$A_{2n-1}=\dfrac{(a_1+a_{2n-1})(2n-1)}{2}=\dfrac{2a_n(2n-1)}{2}=a_n(2n-1)$，所以$a_n=\dfrac{A_{2n-1}}{2n-1}$，则$a_6=\dfrac{A_{11}}{11}$，同理可得$b_7=\dfrac{B_{13}}{13}$，则$\dfrac{2a_6}{b_7}=2\times\dfrac{\dfrac{A_{11}}{11}}{\dfrac{B_{13}}{13}}=2\times\dfrac{13}{11}\times\dfrac{A_{11}}{B_{13}}$. 由$\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{n+4}{3n-1}$，可设$A_n=kn(n+4)$，$B_n=kn(3n-1)$（$k$为非零常数），则$A_{11}=k\times11\times(11+4)=165k$，$B_{13}=k\times13\times(3\times13-1)=494k$，所以$\dfrac{2a_6}{b_7}=2\times\dfrac{13}{11}\times\dfrac{165k}{494k}=\dfrac{15}{19}$. 故选 C.

突破点 4　空间几何体相关问题（找截面几何关系）

1. **B** 【解析】设圆台上底面和下底面的半径分别为r_1，r_2，则$r_1=1$，$r_2=2$. 设点A在下底面的射影为M，连接CM，O_2M，AM，有$AM\perp$底面CO_2M，易知四边形AMO_2O_1为矩形，所以$O_2M=O_1A=r_1$，$AB/\!/O_2M$，又$AB\perp CD$，所以$O_2M\perp CD$，则$CM=\sqrt{r_1^2+r_2^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，直线$AC$与圆台底面所成角即为$\angle ACM$，故$\angle ACM=\dfrac{\pi}{4}$，则$AM=\sqrt{5}$，即圆台的高$h=\sqrt{5}$，则圆台的母线长$l=\sqrt{(r_2-r_1)^2+h^2}=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}$，则侧面积$S=\pi(r_1+r_2)l=\pi(1+2)\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}\pi$. 故选 B.



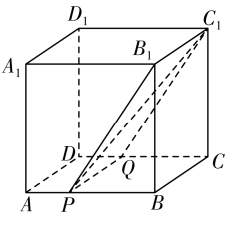
2. **D** 【解析】由题意知，该四面体为正四面体，如图，点H为$\triangle BCD$的中心，连接AH，根据正四面体的性质可知$AH\perp$平面BCD，且正四面体外接球的球心位于AH上，设球心为O，半径为R，连接HD，OD，则$OA=OD=R$.



在$\triangle BCD$中，$HD=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}CD=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 在Rt$\triangle AHD$中，$AH=\sqrt{AD^2-HD^2}=\sqrt{2-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，则$OH=AH-OA=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-R$. 在Rt$\triangle OHD$中，由$OH^2+HD^2=OD^2$得$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-R\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=R^2$，解得$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由题知，该正四面体可以在一个圆柱内任意转动，则其外接球也可以在这个圆柱内任意转动，故该圆柱的高的最小值为$2R=\sqrt{3}$. 故选 D.

3. **B** 【解析】如图，取棱DC上靠近D的三等分点Q，连接PQ，QC_1.



易知$PQ/\!/BC$，$PQ=BC$. 由正方体性质可知$BC/\!/B_1C_1$且$BC=B_1C_1$，所以$PQ/\!/B_1C_1$，$PQ=B_1C_1$，所以平面PB_1C_1截正方体的截面为平行四边形PB_1C_1Q（提示：判断几何体被一个平

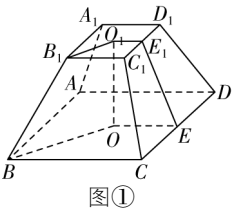
面所截的截面形状，关键在于找到这个平面与几何体的各面的交线）. 因为 $B_1C_1=3$，$PB_1=\sqrt{PB^2+B_1B^2}=\sqrt{13}$，所以该截面的周长为 $2(B_1C_1+PB_1)=6+2\sqrt{13}$. 故选 B.

4. B 【解析】已知圆锥轴截面为边长为 2 的等边三角形，因此圆锥的底面半径 $R=1$，高 $H=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 用经过一条母线的中点且平行于底面的平面截圆锥，则截面与圆锥底面之间的部分构成的几何体为圆台，其上底面半径 $r=\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}$，下底面半径为 R，高 $h=\frac{1}{2}H=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故其体积为 $\frac{1}{3}(\pi r^2+\pi R^2+\pi rR)h=\frac{7\sqrt{3}\pi}{24}$. 故选 B.

5. A 【解析】分析：依题意可得正方体外接球的半径以及平面 $ABCD$ 截外接球所得截面圆的半径，然后求出球心与截面圆的圆心间的距离，再求出较小部分球缺的高，最后代入公式求结果.

设正方体外接球球心为 O，平面 $ABCD$ 截外接球所得截面圆圆心为 O_1. 由题意，正方体外接球的半径 $R=\sqrt{3}$，平面 $ABCD$ 截外接球所得截面圆的半径 $r=\sqrt{2}$，$OO_1=\sqrt{3-2}=1$，则较小部分球缺的高 $h=\sqrt{3}-1$，所以该部分体积 $V=\frac{1}{6}\pi(\sqrt{3}-1)\times[3\times(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2]=\frac{6\sqrt{3}-8}{3}\pi$. 故选 A.

6. D 【解析】分析：作图，求出正四棱台的高，判断正四棱台内半径最大的球的情况. 作出如图①所示的正四棱台，其中 O_1，O 分别为正四棱台上、下底面的中心，E，E_1 分别为 CD，C_1D_1 的中点，



图①

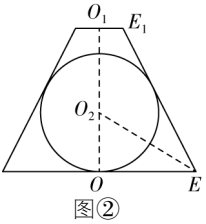
连接 OO_1，E_1E，EO，E_1O_1，OB，O_1B_1，因为正四棱台的上、下底面边长分别为 2，8，侧棱长为 $3\sqrt{5}$，所以 $B_1O_1=\sqrt{2}$，$BO=4\sqrt{2}$，$OO_1=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$.

因为 $OO_1=3\sqrt{3}>\frac{2+8}{2}=5$，故半径最大的球不与上、下底面同时相切.

关键点

又 $EE_1=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-\left(\frac{8-2}{2}\right)^2}=6$，则 $\sin\angle OEE_1=\frac{OO_1}{EE_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\angle OEE_1=\frac{\pi}{3}$.

过点 O，E，E_1，O_1 作正四棱台的截面，如图②，截球得大圆 O_2，该圆与等腰梯形两腰和下底相切，连接 OO_1，O_2E，$\angle O_2EO=\frac{\pi}{6}$，则 $OO_2=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}<\frac{OO_1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则更确定最大内切球与正四棱台的四个侧面及下底面相切，即该正四棱台内半径最大的球的半径 $r=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，表面积 $S=4\pi r^2=\frac{64}{3}\pi$. 故选 D.



图②

关键点

突破点 5　概率及期望的计算（信息提取）

1. B 【解析】依题意，1 次试验中成功的概率为 $\frac{1}{6}$，且每次试验是相互独立的，所以 30 次试验中成功的次数 X 服从二项

分布，即 $X\sim B\left(30,\frac{1}{6}\right)$，故均值 $E(X)=30\times\frac{1}{6}=5$，方差 $D(X)=30\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{6}$. 故选 B.

2. D 【解析】分析：通过整个过程中抽取新球的个数来确定 X 的取值，结合概率乘法公式计算每个取值对应的概率，再通过离散型随机变量的期望公式求解.

若第 1 次抽就抽到初始的 1 个旧球，此时即中奖，$X=1$，其概率 $P(X=1)=\frac{1}{4}$；

若全程只抽到 1 个新球，则第 1 次就要抽到新球，且后面只能抽到旧球并丢弃，共需丢弃 2 个旧球，此时也为中奖，$X=3$，其概率 $P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$；

若全程抽到 2 个新球，则第 1 次就要抽到 1 个新球，且后面需丢弃 3 个旧球，可能的情况有（新，新，旧，旧，旧）和（新，旧，新，旧，旧）2 种，此时也为中奖，$X=5$，其概率 $P(X=5)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{96}$.

若全程把 3 个新球都抽到，则箱中只剩旧球，且最终都被丢弃，此时不能中奖，每个新球需被抽 2 次（1 次抽到后变旧球，1 次抽到后丢弃），初始旧球只能被抽 1 次，故这种情况下 $X=3\times2+1=7$，其概率 $P(X=7)=1-P(X=1)-P(X=3)-P(X=5)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{17}{96}\right)=\frac{43}{96}$.

综上，X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+5\times\frac{17}{96}+7\times\frac{43}{96}=\frac{223}{48}$. 故选 D.

3. B 【解析】在不考虑顺序的前提下，甲、乙三轮比赛的所有可能结果如表所示，

	甲卡片			甲得分
	2	3	5	
乙卡片	4	6	10	0 分
	4	10	6	2 分
	6	4	10	1 分
	6	10	4	2 分
	10	4	6	2 分
	10	6	4	1 分

由表可知，X 的可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，则期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$. 故选 B.

突破点 6　函数与导数中的求参问题（参变分离/分类讨论）

1. C 【解析】由对勾函数的单调性可知，函数 $y=x+\frac{4}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，所以函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，则 $[a,+\infty)\subseteq[2,+\infty)$，即 $a\geqslant2$.

又因为函数 $f(x)=\frac{1}{4}x+4$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递增，且函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，则有 $\frac{1}{4}a+4\leqslant a+\frac{4}{a}$，又 $a\geqslant2$，则可得 $(3a-4)(a-4)\geqslant0$，解得 $a\geqslant4$，故实数 a 的取值范围是 $[4,+\infty)$，即 a 的最小值为 4.

2. C 【解析】分析：求 $f(x)$ 的导数，由给定条件建立不等式，分离参数并构造函数，再利用导数求解即可. 函数 $f(x)=\sin x+x^3-ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=\cos x+3x^2-a$，因为 $f(x)$ 是增函数，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立 $\Rightarrow a\leqslant\cos x+3x^2$ 恒成立. 令函数 $g(x)=\cos x+3x^2$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g'(x)=-\sin x+6x$，令 $h(x)=-\sin x+6x$，$x\in\mathbf{R}$，则 $h'(x)=-\cos x+6>0$，易得函数 $h(x)$，即 $g'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$g'(0)=0$，当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)_{\min}=g(0)=1$，则 $a\leqslant 1$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. 故选 C.

3. D 【解析】函数 $f(x)=ex^{\ln x}+(x\ln x-x)^2$，$x>0$，不等式 $f(x)\geqslant ax^2$ 恒成立（提示：将含参不等式恒成立问题，通过移项构造新函数，转化为新函数的最值问题），即 $a\leqslant\dfrac{ex^{\ln x}}{x^2}+(\ln x-1)^2=\dfrac{e\cdot e^{(\ln x)^2}}{e^{2\ln x}}+(\ln x-1)^2=e^{(\ln x-1)^2}+(\ln x-1)^2$ 恒成立，设 $t=(\ln x-1)^2\geqslant 0$，$g(t)=e^t+t$，$t\geqslant 0$，可得 $g'(t)=e^t+1>0$，所以 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，可得 $g(t)\geqslant g(0)=1$，即 $g(t)_{\min}=1$，所以 $a\leqslant 1$，当且仅当 $x=e$ 时等号成立，所以实数 a 的最大值为 1. 故选 D.

4. A 【解析】分析：通过换元法将原函数转化为关于新变量 t 的函数，利用导数研究 t 的取值范围以及函数 $p(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$ 的单调性，进而求出 a 的值.

$f(x)=a\left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2-\ln\dfrac{x}{e^x}$，令 $t=\dfrac{x}{e^x}(x>0)$，$t'=\dfrac{1-x}{e^x}$，令 $t'>0$，则 $0<x<1$，此时 $t=\dfrac{x}{e^x}$ 单调递增，令 $t'<0$，则 $x>1$，此时 $t=\dfrac{x}{e^x}$ 单调递减，且 $x=1$ 时，$t=\dfrac{1}{e}$，$x\to+\infty$ 时，$t\to 0^+$，$x\to 0^+$ 时，$t\to 0^+$，则 t 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$.

令 $h(t)=at^2-\ln t=t^2\left(a-\dfrac{\ln t}{t^2}\right)$，$t\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$，则 $h(t)$ 的最小值为 0，即 $a-\dfrac{\ln t}{t^2}$ 的最小值为 0，此时 $a=\left(\dfrac{\ln t}{t^2}\right)_{\max}$. 令 $p(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$，$t\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$，则 $p'(t)=\dfrac{t-2t\ln t}{t^4}=\dfrac{1-2\ln t}{t^3}$，$t\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$，易知 $p'(t)>0$，所以 $p(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ 上单调递增，则 $a=p(t)_{\max}=p\left(\dfrac{1}{e}\right)=-e^2$. 故选 A.



30 s 速解　北京大学——郑威

（放缩法）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 当 $x>0$ 时，$x-\ln x\geqslant 1$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），$\dfrac{x^2}{e^{2x}}>0$，所以 $a<0$. 又 $\dfrac{x}{e^x}\leqslant e^{-1}$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），故 $f(x)=a\left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2-\ln x+x\geqslant ae^{-2}+1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 $f(x)_{\min}=ae^{-2}+1=0$，则 $a=-e^2$. 故选 A.

5. D 【解析】因为 $f(x)=x^2+(x-m)\ln x$，$x>0$，可得 $f(1)=1$，所以当 $x=1$ 时，$f(x)\geqslant 1$ 成立. 若 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立，则 $x=1$ 必为函数 $f(x)$ 的极小值点（关键：本题中，若 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立且 $f(1)=1$，则 $x=1$ 必为函数的极小值点（最小值点），因此 $x=1$ 处导数必为 0，可快速建立方程求参数），可得 $f'(1)=0$. 又 $f'(x)=2x+\ln x+1-\dfrac{m}{x}$，则 $f'(1)=2-m+1=0$，所以 $m=3$.

当 $m=3$ 时，$f'(x)=2x+\ln x-\frac{3}{x}+1$，令 $g(x)=2x+\ln x-\frac{3}{x}+1$ $(x>0)$，则 $g'(x)=2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，因此 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $f'(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，也是最小值，即 $f(x)\geqslant f(1)=1$ 恒成立，所以 $m=3$ 符合题意. 故选 D.

6. **D** 【解析】$f(x)=x\ln x-ae^{x-1}+(a-1)x\Rightarrow f'(x)=\ln x-ae^{x-1}+a$，显然 $f'(1)=0$ 成立.

设 $g(x)=\ln x-ae^{x-1}+a,x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-ae^{x-1}$，因为 $a>0$，所以 $y=-ae^{x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g'(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数.

当 $g'(1)=1-a<0$，即 $a>1$ 时，由 $x>1$，得 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<g(1)=0\Rightarrow f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，当 $a>1$ 时，易知存在 $x_0<1$，使得当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 在 $(x_0,1)$ 上单调递减，则当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g(x)>g(1)=0\Rightarrow f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,1)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，符合题意（易错：仅通过导数值为零判定极值点，忽略两侧导数符号变化的验证，可能会导致伪极值点的错误）；当 $g'(1)=1-a>0$ 且 $a>0$，即 $0<a<1$ 时，由 $0<x<1$，得 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，存在 $x_1>1$，使得当 $x\in(1,x_1)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上单调递增，此时有 $g(x)>g(1)=0\Rightarrow f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上单调递增，此时 $x=1$ 不是极大值点，不符合题意；当 $a=1$ 时，$g'(x)=\frac{1}{x}-e^{x-1}$，显然 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g'(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，此时有 $g(x)<g(1)=0\Rightarrow f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，此时有 $g(x)<g(1)=0\Rightarrow f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，不符合题意. 综上所述，a 的取值范围是 $(1,+\infty)$. 故选 D.

易错提醒 **极值与极值点相关问题注意进行验证**

(1) 已知极值点求参数：先利用“极值点处导数为 0”建立方程求解参数，再验证该点两侧导数符号是否发生改变，满足“左正右负”为极大值，“左负右正”为极小值，验证步骤不可省略.

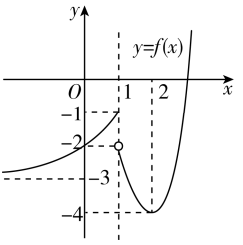
(2) 已知极值求参数：结合极值点处导数为 0 且极值点处函数值为极值两个条件，建立方程组求解参数，求解后同样需验证极值的存在性.

突破点 7　函数零点问题（构造法/数形结合法）

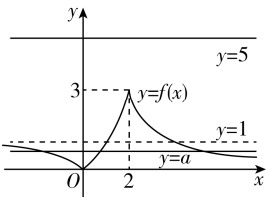
1. **B** 【解析】分析：利用导数判断函数的单调性，作出函数的图象，将零点个数问题转化为图象交点个数问题，数形结合求结果.

当 $x>1$ 时，$f(x)=x^3-3x^2$，则 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，所以当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 的极小值（最小值）为 $f(2)=-4$. 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

作出$f(x)$的大致图象，如图所示. 由$g(x)=0$，得$f(x)=a$，由图可知，当$a\in(-4,-3]\cup[-2,-1]$时，直线$y=a$与$f(x)$的图象恰有2个交点（关键：将“$g(x)$恰有2个零点”等价转化为“直线$y=a$与$f(x)$的图象恰有2个交点”，结合函数图象，得出参数a的取值范围），即$g(x)$恰有2个零点. 所以a的取值范围是$(-4,-3]\cup[-2,-1]$. 故选B.



2. A 【解析】由$[f(x)]^2-(a+5)f(x)+5a=0$可得$f(x)=a$或$f(x)=5$，当$x\leqslant0$时，$f(x)=|2^x-1|=1-2^x\in[0,1)$；当$0<x\leqslant2$时，$f(x)=|2^x-1|=2^x-1\in(0,3]$；当$x>2$时，$f(x)=\dfrac{3}{x-1}\in(0,3)$. 作出函数$f(x)$，$y=5$，$y=a$的图象如图所示.



由图可知，直线$y=5$与曲线$y=f(x)$没有交点，即方程$f(x)=5$无解，所以方程$f(x)=a$有三个不同的解，即直线$y=a$与曲线$y=f(x)$有三个交点，则$0<a<1$. 故选A.

方法总结　复合函数$y=f(g(x))$零点个数问题的求解

思路

(1)确定内层函数$u=g(x)$和外层函数$y=f(u)$；

(2)确定外层函数$y=f(u)$的零点$u=u_i(i=1,2,3,\cdots,n)$；

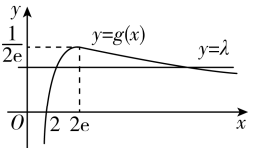
(3)确定直线$u=u_i(i=1,2,3,\cdots,n)$与内层函数$u=g(x)$图象的交点个数分别为$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，则函数$y=f(g(x))$的零点个数为$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

3. C 【解析】$f(x)=a\sin x+\cos 2x=-2\sin^2x+a\sin x+1$，$x\in[0,2\pi]$，令$t=\sin x\in[-1,1]$，$g(t)=-2t^2+at+1$，$t\in[-1,1]$，其图象开口向下，对称轴为直线$t=\dfrac{a}{4}$（提示：根据对称轴与区间的相对位置进行分类讨论）. 已知$a>0$，当$0<\dfrac{a}{4}<1$，即$0<a<4$时，$g(t)$的最大值为$g\left(\dfrac{a}{4}\right)=1+\dfrac{a^2}{8}=\dfrac{3}{2}$，解得$a=2$；当$\dfrac{a}{4}\geqslant1$，即$a\geqslant4$时，$g(t)$的最大值为$g(1)=a-1=\dfrac{3}{2}$，解得$a=\dfrac{5}{2}$（舍去）. 综上所述，$a=2$，则$f(x)=-2\sin^2x+2\sin x+1$，令$f(x)=-2\sin^2x+2\sin x+1=0$，解得$\sin x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$或$\sin x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$（舍去），又因为$\sin x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$在$[0,2\pi]$内有2个根，所以$f(x)$有2个零点. 故选C.

4. C 【解析】分析：求出函数$f(x)$的导数，再按$m\leqslant0$，$m>0$分类讨论，结合$f(x)$有两个零点列出不等式，通过构造函数求解. 函数$f(x)=me^{2x}+(m-2)e^x-x$的定义域为$\mathbf{R}$，求导得$f'(x)=2me^{2x}+(m-2)e^x-1=(2e^x+1)(me^x-1)$，而$2e^x+1>0$，故当$m\leqslant0$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，此时函数$f(x)$最多有一个零点，不符合题意. 当$m>0$时，由$f'(x)<0$，得$x<\ln\dfrac{1}{m}$，由$f'(x)>0$，得$x>\ln\dfrac{1}{m}$，函数$f(x)$在

$\left(-\infty,\ln\frac{1}{m}\right)$上单调递减，在$\left(\ln\frac{1}{m},+\infty\right)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f\left(\ln\frac{1}{m}\right)=\ln m-\frac{1}{m}+1$，且当$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$，当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，函数$f(x)$有两个零点，只需$f(x)_{\min}=\ln m-\frac{1}{m}+1<0$. 令函数$g(m)=\ln m-\frac{1}{m}+1(m>0)$，而函数$y=\ln m$，$y=-\frac{1}{m}+1$在$(0,+\infty)$上都单调递增，则函数$g(m)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$g(1)=0$，因此不等式$\ln m-\frac{1}{m}+1<0$的解集为$\{m|0<m<1\}$. 所以实数$m$的取值范围是$(0,1)$. 故选 C.

5. C 【解析】由题意，方程$e^{\lambda x+\ln 2}+\lambda x+\ln 2=e^{\ln x}+\ln x(x>0)$有两个不相等的实根，令$f(t)=e^t+t$，则$f(\lambda x+\ln 2)=f(\ln x)$，因为$f'(t)=e^t+1>0$，所以$f(t)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以问题等价于方程$\lambda x+\ln 2=\ln x(x>0)$，即$\lambda=\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}$有两个不相等的实根，即直线$y=\lambda$与$g(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{x}(x>0)$的图象有两个交点，$g'(x)=\frac{1-\ln\frac{x}{2}}{x^2}$，令$g'(x)>0$，得$0<x<2e$，令$g'(x)<0$，得$x>2e$，所以$g(x)$在$(0,2e)$上单调递增，在$(2e,+\infty)$上单调递减，$g(2)=0$，$g(x)_{\max}=g(2e)=\frac{1}{2e}$，$x\to0^+$时，$g(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$g(x)\to0^+$，作出$g(x)$的大致图象和直线$y=\lambda$如图所示，由图象得$\lambda\in\left(0,\frac{1}{2e}\right)$. 故选 C.



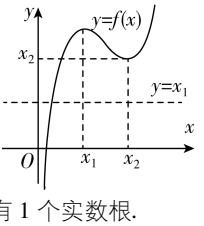
6. C 【解析】分析：求导，结合已知条件作出函数$y=f(x)$的大致图象，再利用图象找出方程$g(f(x))=0$的不同实数根.

由题意得$f(x)=x^2+ax+b\ln x+c$的定义域为$(0,+\infty)$，所以$g(x)=2x+a+\frac{b}{x}=\frac{2x^2+ax+b}{x}$.

因为x_1,x_2是$f(x)$的两个极值点，所以x_1,x_2是方程$g(x)=0$，即$2x^2+ax+b=0$的 2 个正根，则$x_1+x_2=-\frac{a}{2}>0\Rightarrow a<0$，$x_1x_2=\frac{b}{2}>0\Rightarrow b>0$.

又因为$x_1<x_2$，所以当$x\in(0,x_1)$时，$g(x)>0$，则$f(x)$在$(0,x_1)$上单调递增；当$x\in(x_1,x_2)$时，$g(x)<0$，则$f(x)$在(x_1,x_2)上单调递减；当$x\in(x_2,+\infty)$时，$g(x)>0$，则$f(x)$在$(x_2,+\infty)$上单调递增. 当$x\to0^+$时，$f(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$.

又因为$f(x_2)=x_2$，作出函数$y=f(x)$的大致图象如图所示.



在方程$g(f(x))=0$中，令$f(x)=t$，则$g(t)=0$，则$t=x_1$或$t=x_2$.

当$t=x_1$时，由图可得曲线$y=f(x)$与直线$y=x_1$只有一个交点，即方程$f(x)=x_1$有 1 个实数根.

当$t=x_2$时，由图可得曲线$y=f(x)$与直线$y=x_2$有两个交点，

即方程 $f(x)=x_2$ 有 2 个不等实数根.

所以方程 $g(f(x))=0$ 的不同实数根个数为 3. 故选 C.

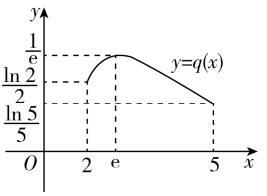
7. B 【解析】由题意得函数 $y=e^x$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,故 $g(x)=\ln x$(提示:图象关于直线 $y=x$ 对称的两个函数互为反函数,函数 $y=e^x$ 的反函数为 $y=\ln x$),

$f(x)=\ln x+(a-1)x\ (a>1)$,设 $f(x)=t$,则方程 $f(f(x))=x$ 即 $f(t)=x$,即点 (x,t),(t,x) 在函数 $y=f(x)$ 图象上.

假设 $x>t$,易知 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 $f(x)>f(t)$,又 $f(x)=t$,$f(t)=x$,故 $t>x$,与假设矛盾,舍去;

假设 $x<t$,因为 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 $f(x)<f(t)$,又 $f(x)=t$,$f(t)=x$,故 $t<x$,与假设矛盾,舍去.

故 $t=x$,则方程 $f(x)=x$ 在区间 $[2,5]$ 上有两解,即 $\ln x+(a-1)x=x$,即 $2-a=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $[2,5]$ 上有两解,令 $q(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,$x\in[2,5]$,则 $q'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,令 $q'(x)>0$,得 $2\leqslant x<e$,令 $q'(x)<0$,得 $e<x\leqslant 5$,故 $q(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[2,e)$ 上单调递增,在 $(e,5]$ 上单调递减,又 $q(e)=\dfrac{1}{e}$,$q(2)=\dfrac{\ln 2}{2}$,$q(5)=\dfrac{\ln 5}{5}$,其中 $\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{\ln 5}{5}=\dfrac{\ln 32-\ln 25}{10}>0$,即 $q(2)>q(5)$,画出函数 $q(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[2,5]$ 上的大致图象如图所示.



由图可知,要想 $2-a=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $[2,5]$ 上有两解,即直线 $y=2-a$ 与函数 $q(x)$ 的图象在 $[2,5]$ 上有两个交点,需要 $\dfrac{\ln 2}{2}\leqslant 2-a<\dfrac{1}{e}$,故 $a\in\left(2-\dfrac{1}{e},2-\dfrac{\ln 2}{2}\right]$.

故选 B.

突破点 8　抽象函数问题（赋值法/性质法/模型法）

1. A 【解析】分析:由 $f(x+1)$ 为奇函数,得 $f(-x+1)=-f(x+1)$,令 $x=1$ 即可求解.

由 $f(x+1)$ 为奇函数,得 $f(-x+1)=-f(x+1)$(关键:$f(x+1)$ 为奇函数,等价于 $f(1-x)=-f(1+x)$,即函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,注意不要错误理解为 $f(-x-1)=-f(x+1)$),令 $x=1$,得 $f(-1+1)=-f(1+1)$,即 $f(0)=-f(2)$,由 $f(0)=2$,得 $f(2)=-2$. 故选 A.

2. A 【解析】由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$f(x+1)$ 是偶函数,

令 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{2}x$,则 $f(-x)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}x=-f(x)$,

且 $f(x+1)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 为偶函数,满足题目要求. $f(2\,026)=\sin 1\,013\pi=\sin(\pi+2\pi\times 506)=\sin\pi=0$,故选 A.

一题多解 由函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，可得 $f(-x)=-f(x)$，且 $f(0)=0$，又由 $f(x+1)$ 是偶函数，即函数 $f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，可得函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，即 $f(x+2)=f(-x)$，

代入 $f(-x)=-f(x)$，可得 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

于是 $f(2\,026)=f(4\times506+2)=f(2)$. 又由 $f(x+1)$ 为偶函数知 $f(-x+1)=f(x+1)$，令 $x=1$ 可得 $f(2)=f(-1+1)=f(0)=0$，所以 $f(2\,026)=0$.

3. **D** 【解析】分析：联立两个函数关系式消去 $g(x)$，得出 $f(x)$ 图象的一条对称轴，结合偶函数性质推出 $f(x)$ 的一个周期，利用周期性和对称性求出 $f(1)$，再代入关系式求出 $g(1)$，最终计算目标值.

由 $f(x)=g(x-1)-1$ 得 $g(x)=f(x+1)+1$，又 $g(x)=f(2-x)+1$，则有 $f(x+1)+1=f(2-x)+1$，即 $f(x+1)=f(2-x)$，故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 对称（提示：若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则其图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称）. 又 $f(x)$ 是偶函数，其图象关于 y 轴对称，故 $f(x)$ 的一个周期 $T=2\times\left(\dfrac{3}{2}-0\right)=3$（提示：若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称，则 $f(x)$ 的一个周期 $T=2|b-a|\,(a\neq b)$），则 $f(20)=f(3\times6+2)=f(2)=3$. 在 $f(x+1)=f(2-x)$ 中，令 $x=0$，得 $f(1)=f(2)=3$. 在 $g(x)=f(2-x)+1$ 中，令 $x=1$ 得 $g(1)=f(1)+1=4$，因此 $f(1)+g(1)=3+4=7$. 故选 D.

4. **A** 【解析】由函数 $g(x-1)-1$ 是奇函数，得 $g(-x-1)-1=-[g(x-1)-1]$，即 $g(-x-1)=-g(x-1)+2$①.

由 $f(x-1)$ 是偶函数，得 $f(-x-1)=f(x-1)$，

由 $g(x-1)=f(x)-2$，得 $f(x)=g(x-1)+2$，

所以 $f(-x-1)=g(-x-2)+2$，$f(x-1)=g(x-2)+2$，

所以 $g(-x-2)=g(x-2)$②，

在①中用 $x+1$ 替换 x 得 $g(-x-2)=-g(x)+2$③，

由②③得 $g(x-2)=-g(x)+2$，即 $g(x)+g(x+2)=2$④.

由④可得 $g(x+4)=2-g(x+2)=2-[2-g(x)]=g(x)$，所以 $g(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

因为 $f(1)=1$，所以 $g(0)=f(1)-2=-1$，$g(4)=g(0)=-1$，

在③中，令 $x=1$ 得 $g(-3)=-g(1)+2$，又 $g(-3)=g(-3+4)=g(1)$，所以 $g(1)=1$.

在④中，分别令 $x=0$，$x=1$ 得 $g(0)+g(2)=2$，$g(1)+g(3)=2$，所以 $g(2)=3$，$g(3)=1$，

所以 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=1+3+1-1=4$（提示：周期函数求和优先计算单周期内各项和，再计算周期数与剩余项），$g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(100)=25\times[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)]=100$. 故选 A.

5. **C** 【解析】依题意，$f(x)$ 是偶函数，且 $f(x-2)+f(x)+1=0$.

分析：递推型抽象函数，先代入特殊值求出基础函数值，再通过推导函数周期将所求函数值转化为基础函数值.

令 $x=1$，得 $f(1-2)+f(1)+1=f(-1)+f(1)+1=2f(1)+1=0$，解得 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

令 $x=0$，得 $f(0-2)+f(0)+1=f(2)+f(0)+1=0$；

令 $x=3$，得 $f(3-2)+f(3)+1=-\frac{1}{2}+f(3)+1=0$，则 $f(3)=-\frac{1}{2}$.

在 $f(x-2)+f(x)+1=0$ 中以 $-x$ 替换 x，得 $f(-x-2)+f(-x)+1=f(x+2)+f(x)+1=0$，

两式作差并整理得 $f(x+2)=f(x-2)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数（关键：若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(x-a)$，$a\neq0$，则其一个周期 $T=2|a|$），

所以 $f(9)=f(2\times4+1)=f(1)=-\frac{1}{2}$，故 **C 正确**.

$f(11)=f(3\times4-1)=f(-1)=f(1)=-\frac{1}{2}$，故 **D 错误**.

取 $f(x)=A\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}$（$A\in\mathbf{R}$），$x\in\mathbf{R}$，

$f(-x)=A\cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}=A\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}=f(x)$，$f(x)$ 是偶函数，

$f(x-2)+f(x)+1=A\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-2)\right]-\frac{1}{2}+A\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}+1=A\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\pi\right)+A\cos\frac{\pi}{2}x=-A\cos\frac{\pi}{2}x+A\cos\frac{\pi}{2}x=0$，所以 $f(x)=A\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}$（$A\in\mathbf{R}$）符合题意，$f(6)=f(4+2)=f(2)=A\cos\pi-\frac{1}{2}=-A-\frac{1}{2}$（易错：易默认 $f(2)$，$f(0)$ 为固定值，忽略抽象函数的多解性），与 A 的值有关，故 **A，B 错误**. 故选 C.

突破点 9　比较大小问题（构造法/赋值法）

1. **B**　【解析】分析：根据导数的正负得出 $f(x)$ 的单调性，再由 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)$ 是偶函数求出 $f(x)$ 图象的对称轴，结合函数图象的对称性求解. 由 $\frac{f'(x)}{2x-3}>0$ 得，当 $x>\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. 又 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.

因为 $\log_2\sqrt{8}<\log_23<\log_24$，即 $\frac{3}{2}<\log_23<2$，所以 $b<c$，又

$\left|2-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$\left|0.2^3-\frac{3}{2}\right|=\frac{373}{250}>\frac{1}{2}$，所以 $a>c$，所以 $a>c>b$.

2. A 【解析】设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=e$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

故 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得最大值，则 $f(e)>f(2)$，$f(e)>f(3)$，而 $f(e)=\frac{1}{e}$，故 $b>a$，$b>c$.

又 $f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{3\ln 2}{6}=\frac{\ln 8}{6}$，$f(3)=\frac{\ln 3}{3}=\frac{2\ln 3}{6}=\frac{\ln 9}{6}$，故 $f(2)<f(3)$，即 $a<c$. 综上可得 $b>c>a$.

3. B 【解析】分析：比较 $b=e^{-0.2}$ 与 $c=\frac{2}{e}$ 时，将两式同乘正数 e，等价转化为比较 $e^{0.8}$ 与 2 的大小. 由 $0.8=\frac{4}{5}$，再将两式同取 5 次方，利用 e^4 与 32 的关系比较 b 与 c.

因为 $e^{-0.2}\times e=e^{0.8}$，$e^4>32=2^5$，所以 $e^{0.8}>2$，则 $e^{-0.2}>\frac{2}{e}$，即 $b>c$.

分析：比较 $a=\ln 2$ 与 $c=\frac{2}{e}$ 时，构造辅助函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}$ $(x>0)$，利用函数的单调性判断. 令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(x)\leqslant f(e)=0$，则 $f(2)=\ln 2-\frac{2}{e}<0$，即 $\ln 2<\frac{2}{e}$，即 $a<c$. 综上，$b>c>a$. 故选 B.

4. A 【解析】分析：比较 $a=\ln 1.3$ 与 $b=0.3$ 时，构造辅助函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$，$x>0$.

设函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$，$x>0$，求导可得 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $x-\ln(1+x)>0\Rightarrow\ln(1+x)<x$，令 $x=0.3$，代入可得 $\ln 1.3<0.3$，即 $a<b$（提示：$\ln(1+x)<x$，$x>0$ 是高频使用的切线放缩结论，选择填空题中可直接用于快速比较对数与一次式的大小）.

分析：比较 $c=e^{0.3}-1$ 与 $b=0.3$ 时，构造辅助函数 $g(x)=e^x-x-1$，$x>0$.

设函数 $g(x)=e^x-x-1$，$x>0$，求导可得 $g'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，即 $e^x-x-1>0\Rightarrow e^x-1>x$，令 $x=0.3$，代入可得 $e^{0.3}-1>0.3$，即 $c>b$.

综上，a，b，c 的大小关系为 $a<b<c$（关键：本题无需直接比较 a 与 c，以 $b=0.3$ 作为中间量，分别推导 $a<b$，$c>b$，利用不等式

的传递性直接得出 $a<b<c$). 故选 A.

刷有所得 构造函数时优先将变量集中到一侧,尽量使构造的函数形式简单、求导便捷,减少后续运算量;构造后的函数优先判断定义域,再通过导数或函数性质确定单调性,注意比较的两个自变量是否在同一单调区间内,必要时结合函数奇偶性、周期性转化为可统一比较的情况.

5. **B** 【解析】∵ $2\log_2 x-x=0, 3\log_3 y-y=0, 5\log_5 z-z=0$,

∴ $\log_2 x=\frac{x}{2}, \log_3 y=\frac{y}{3}, \log_5 z=\frac{z}{5}$, 即转化为函数 $u=\log_2 t$ 与 $u=\frac{t}{2}$, $u=\log_3 t$ 与 $u=\frac{t}{3}$, $u=\log_5 t$ 与 $u=\frac{t}{5}$图象的交点问题.

在同一平面直角坐标系中分别画出 $u=\log_2 t, u=\frac{t}{2}, u=\log_3 t, u=\frac{t}{3}, u=\log_5 t, u=\frac{t}{5}$的大致图象,如图所示.

记 $u=\log_2 t$ 与 $u=\frac{t}{2}$的图象交于 A,B 两点, $u=\log_3 t$ 与 $u=\frac{t}{3}$的图象交于 C,D 两点, $u=\log_5 t$ 与 $u=\frac{t}{5}$的图象交于 E,F 两点,且它们的横坐标满足 $t_E<t_A<t_C<t_D<t_B<t_F$,则 $x=t_A$ 或 $x=t_B$, $y=t_C$ 或 $y=t_D$, $z=t_E$ 或 $z=t_F$.

对于 A,取 $x=t_A, y=t_C, z=t_F$,则满足 $x<y<z$;

对于 B,由 $z<y$ 知 z 只能取 t_E,此时一定有 $z<x$,即 $x<z<y$ 不可能成立;

对于 C,取 $x=t_A, y=t_C, z=t_E$,则满足 $z<x<y$;

对于 D,取 $x=t_B, y=t_C, z=t_E$,则满足 $z<y<x$.

