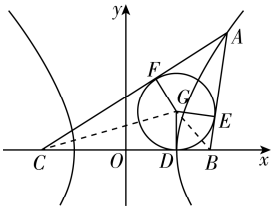
2027 高考新风向专练

新风向 1 ▸ 模块融合

1. B 【解析】分析：作出图象，利用三角形的内切圆，结合已知的三角函数关系式和双曲线的定义求解离心率. 设双曲线实轴长为 $2a$，焦距为 $2c$. 作出 $\triangle ABC$ 的内切圆圆 G，设半径为 r，与边 BC,AB,AC 的切点分别为 D,E,F，连接 BG,CG.



令 $BD=m,CD=n$，由 $\tan\frac{B}{2}=4\tan\frac{C}{2}$，可得 $\frac{r}{m}=\frac{4r}{n}$，即 $n=4m$.

因为 B,C 为焦点，所以 $m+n=2c$，又点 A 在双曲线上，所以 $AC-AB=n-m=2a$（提示：双曲线定义）.

联立 $\begin{cases}n-m=2a,\\ m+n=2c,\\ n=4m\end{cases}$，可得 $a+c=4c-4a$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$. 故选 B.

2. C 【解析】分析：已知题目所给是一系列圆心在函数 $y=x^2$ $(x>0)$ 的图象上，与 x 轴相切且彼此外切的圆，根据相邻圆的圆心距及函数值关系推导数列 $\{x_n\}$ 的性质.

$\because |P_nP_{n+1}|=\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2}=\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(x_{n+1}^2-x_n^2)^2}$，

$\odot P_n$ 与 $\odot P_{n+1}$ 的半径之和为 $y_n+y_{n+1}=x_n^2+x_{n+1}^2$，

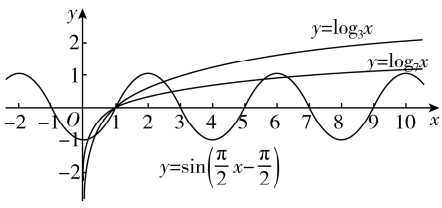
$\therefore x_n^2+x_{n+1}^2=\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(x_{n+1}^2-x_n^2)^2}=(x_n-x_{n+1})\cdot\sqrt{1+(x_{n+1}+x_n)^2}$，整理可得 $\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)^2=4$，

$\because x_{n+1}<x_n$，$\therefore \frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=2$（提示：等差数列的概念），

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{x_1}$ 为首项，2 为公差的等差数列，故选 C.

3. A 【解析】分析：复杂函数的零点问题可以转化为图象交点问题，结合正弦型函数的周期性质研究零点规律，进而求和. 因为 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)-\log_{(4n-1)}x$ 的零点个数为 a_n，所以 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $y=\log_{(4n-1)}x$ 的图象的交点个数为 a_n.

作出 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象，当 $n=1$ 时，作出 $y=\log_3x$ 的图象，$n=2$ 时，作出 $y=\log_7x$ 的图象，



当 $n=1$ 时，$\log_33=1$，结合图象可知 $y=\log_3x$ 的图象与 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象有 3 个交点；

当 $n=2$ 时，$\log_77=1$，结合图象可知 $y=\log_7x$ 的图象和 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象有 5 个交点，注意到函数 $y=$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的周期为 4，$\log_{4n-1}(4n-1)=1$，

n 每增加 1，$4n-1$ 增加 4（对应一个周期），则交点增加 2 个，

关键点

由此可推出数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=3\times10+\frac{10\times9}{2}\times2=120$. 故选 A.

4. **ACD** 【解析】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=2f(x)f(y)$，令 $x=n(n\in\mathbf{N}^*)$，$y=1$，可得 $f(n+1)=2f(n)f(1)$.

又 $f(1)=1$，可推出 $f(n+1)=2f(n)$，可得 $f(n)=2^{n-1}$（提示：利用赋值法，结合等比数列的概念，得到递推关系）对任意正整数 n 恒成立.

对于 A，$f(2)=2^{2-1}=2$，故 **A 正确**；

对于 B，数列 $\{f(n)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是递增数列，故 **B 错误**；

对于 C，$f(x+y)=2f(x)f(y)$，令 $x=y=\frac{t}{2}$，$t\in(0,+\infty)$，

得 $f(t)=2\left[f\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2\geqslant0$，则 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}\right)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，即 $f(x_1+x_2)=2\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2$，又 $f(x_1+x_2)=2f(x_1)f(x_2)$，所以 $2\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2=2f(x_1)f(x_2)$，即 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$，结合基本不等式可得 $\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，所以 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，

当且仅当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，等号成立，故 **C 正确**；

对于 D，前 n 项和 $T_n=1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

5. **ACD** 【解析】对于 A，分析：数列递推式中含有指数部分，不易直接求解，可以利用数列是特殊函数的特点，构造函数分析单调性. 已知 $a_1=1$，则 $a_2=e^{1-2}+1=1+\frac{1}{e}<2$，依次有 $a_3<2,\cdots,a_n<2$. 由 $a_{n+1}-a_n=e^{a_n-2}+1-a_n$，设 $g(x)=e^{x-2}+1-x$，$x<2$，对 $g(x)$ 求导得 $g'(x)=e^{x-2}-1$，

当 $x<2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，则 $g(x)>g(2)=e^{2-2}+1-2=0$，可得 $a_{n+1}-a_n>0$，所以 $\{a_n\}$ 为递增数列，故 **A 正确**.

对于 B，由 A 选项的分析可知 $a_n<2$，所以不存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>2$，故 **B 错误**.

对于 C，分析：通过递推式统一数列下标，进而构造函数，利用导数研究函数值的范围. 要证 $a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，即证 $e^{a_n-2}+1<\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，

设 $h(x)=e^{x-2}+1-\left(\frac{1}{2}x^2-x+2\right)$，$x<2$，$h'(x)=e^{x-2}-x+1$，令 $r(x)=e^{x-2}-x+1$，$r'(x)=e^{x-2}-1$，

当 $x<2$ 时，$r'(x)<0$，所以 $r(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，

则 $h'(x)>h'(2)=e^{2-2}-2+1=0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，

则 $h(x)<h(2)=e^{2-2}+1-\left(\frac{1}{2}\times2^2-2+2\right)=0$，即 $e^{a_n-2}+1<\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，故 **C 正确**.

对于 D，分析：题目所给的式子结构不便处理，因此结合 C 选项先构造和常数 2 相关的式子，再取倒数并裂项将化简得到的乘积不等式转化为差值不等式，放缩后利用累加法求得有关 a_n 的不等式，最后化简得到结果. 由 C 选项知，$a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，移项可得 $a_{n+1}-2<\frac{1}{2}a_n(a_n-2)$，两边同时乘 -1，得 $2-a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n(2-a_n)$，

由 A 选项及递推式得 $1\leqslant a_n<2$，则在上式两边同时取倒数得 $\frac{1}{2-a_{n+1}}<\frac{2}{a_n(2-a_n)}=\frac{1}{2-a_n}+\frac{1}{a_n}$，移项可得 $\frac{1}{2-a_{n+1}}-\frac{1}{2-a_n}<\frac{1}{a_n}$，

因为 $a_n\geqslant 1$，所以 $0<\frac{1}{a_n}\leqslant 1$，即 $\frac{1}{2-a_{n+1}}-\frac{1}{2-a_n}<1$，利用累加法可得，当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{2-a_n}-\frac{1}{2-a_1}=\left(\frac{1}{2-a_2}-\frac{1}{2-a_1}\right)+\left(\frac{1}{2-a_3}-\frac{1}{2-a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2-a_n}-\frac{1}{2-a_{n-1}}\right)<n-1$，所以 $\frac{1}{2-a_n}<n$，当 $n=1$ 时，$\frac{1}{2-a_1}=1$，

故 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{2-a_n}\leqslant n$，

化简移项可得 $a_n\leqslant 2-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

6. $\frac{5}{18}$　$\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2\,026}\right]$　【解析】每次掷骰子，事件 A 发生的概率 $p=\frac{1}{6}$，不发生的概率为 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，

掷 2 次，A 发生奇数次，即恰好发生 1 次，由二项分布概率公式得 $P_2=C_2^1\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，n 次试验中 A 发生奇数次，可分为两种情况，第一种是前 $(n-1)$ 次中 A 发生偶数次，第 n 次 A 发生；

第二种是前 $(n-1)$ 次中 A 发生奇数次，第 n 次 A 不发生.

可得 $P_n=(1-P_{n-1})p+P_{n-1}\cdot(1-p)=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{6}$，即 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$，所以 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $P_1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$ 为首项，$\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，得 $P_n=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$，因此 $P_{2\,026}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2\,026}\right]$.

关键点

7. 2　$\frac{16}{729}$　【解析】分析：由题知若 E_k 表示圆，则 $a_k=a_{k+1}$，计算出 $P(a_k=a_{k+1})=\frac{1}{3}$，所以 $X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，即可得出 X 的均值；若 E_k 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则 $a_k>a_{k+1}$，算出符合要求的情况数，进而得出所求概率.

若 $E_k:\frac{x^2}{a_k}+\frac{y^2}{a_{k+1}}=1(k=1,2,\cdots,6)$ 表示圆，则 $a_k=a_{k+1}$，符合此条件的 (a_k,a_{k+1}) 有 $(1,1)$，$(2,2)$，$(3,3)$，则 $P(a_k=a_{k+1})=\frac{3}{3\times 3}=\frac{1}{3}$，则 $X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，所以 $E(X)=6\times\frac{1}{3}=2$.

关键点

若 $E_k:\frac{x^2}{a_k}+\frac{y^2}{a_{k+1}}=1(k=1,2,\cdots,6)$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，

关键点

则 $a_k>a_{k+1}$，

当 $a_6=2$ 时，$a_7=1$，要使 $a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant 2(1\leqslant k\leqslant 5,k\in\mathbf{N})$，只需要考虑在 1 到 5 五个位置中出现 1 或 2 的次数，共 6 种.

当 $a_6=3$ 时，有 $a_7=1$ 或 $a_7=2$ 这 2 种情况，要使 $a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant 3(1\leqslant k\leqslant 5,k\in\mathbf{N})$，需要考虑在 1 到 5 五个位置中出现 3 的次数，不妨设 $a_7=1$，

如果有 5 个 3，有 1 种情况；如果有 4 个 3，有 2 种情况；如果有 3 个 3，考虑在 1，2 两个位置中出现 1 或 2 的次数，有 3 种情况；如果有 2 个 3，考虑在 1 到 3 三个位置中出现 1 或 2 的次数，有 4 种情况；如果有 1 个 3，考虑在 1 到 4 四个位置中出现 1 或 2 的次数，有 5 种情况；如果有 0 个 3，考虑在 1 到 5 五个位置中出现 1 或 2 的次数，有 6 种情况.

所以只有 E_6 是焦点在 x 轴上的椭圆的情况数有 $6+2\times(1+2+3+4+5+6)=48$，故只有 E_6 是焦点在 x 轴上的椭圆的概率 $P=\left(\frac{1}{3}\right)^7\times 48=\frac{16}{729}$.

1 min 速解　武汉大学——王梓秋

学霸提示：对于 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_6$ 这种式子的处理，可以通过变形处理成小于号再分析.

对于第二空，只有 E_6 是焦点在 x 轴上的椭圆等价于 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_6$，$a_7<a_6$，其中 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_6$ 可写成 $a_1<a_2+1<a_3+2<\cdots<a_6+5$.（关键点）

由于 $a_7<a_6$，只需考虑 $a_6=2$ 或 3.

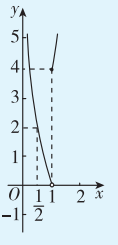
当 $a_6=2$ 时，$a_6+5=7$，故 $a_1,a_2+1,\cdots,a_5+4$ 可取 1，2…6，一共 $C_6^5=6$（种），a_7 只能取 1；$a_6=3$ 时，$a_6+5=8$，故 $a_1,a_2+1,\cdots,a_5+4$ 可取 1，2…7，一共 $C_7^5=21$（种），a_7 只能取 1 或 2. 故一共有 $6+2\times 21=48$（种）情况，概率 $P=\frac{48}{3^7}=\frac{16}{729}$.

新风向 2 ▸ 多想少算

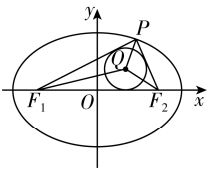
1. **D**　【解析】由题可知 $a>0$，则当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)_{\min}=f(a)=4^a$（提示：函数 $y=4^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增）. 当 $0<x<a$ 时，$f(x)>f(a)=-2\log_2 a$，因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最小值（关键点），所以 $4^a+2\log_2 a\leqslant 0$.

令 $g(x)=4^x+2\log_2 x$，易知 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 且 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 a 的取值范围为 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，故选 D.

快解（数形结合、排除法）当 $a=1$ 时，在平面直角坐标系中作出 $y=f(x)$ 的大致图象，观察可知，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有最小值，故不符合题意. 根据排除法，故选 D.



2. **D** 【解析】不妨设椭圆 Ω 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$P(x_0,y_0)$，$Q(x,y)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则有 $\overrightarrow{QF_1}=(-c-x,-y)$，$\overrightarrow{QF_2}=(c-x,-y)$，$\overrightarrow{QP}=(x_0-x,y_0-y)$，所以 $5\overrightarrow{QF_1}+3\overrightarrow{QF_2}+3\overrightarrow{QP}=5(-c-x,-y)+3(c-x,-y)+3(x_0-x,y_0-y)=(3x_0-11x-2c,3y_0-11y)=(0,0)$，所以 $x=\frac{3x_0-2c}{11}$，$y=\frac{3y_0}{11}$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径为 $\frac{3|y_0|}{11}$，由椭圆定义可得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\times\frac{3|y_0|}{11}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\times|y_0|$，即 $\frac{1}{2}(2a+2c)\times\frac{3|y_0|}{11}=\frac{1}{2}\times2c\times|y_0|$，化简并整理得 $3a=8c$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{8}$. 故选 D.



快解 不妨设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心为 Q，所以 $|PF_2|\overrightarrow{QF_1}+|PF_1|\overrightarrow{QF_2}+|F_1F_2|\overrightarrow{QP}=\mathbf{0}$（二级结论：三角形内心的向量表示，若 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$（其中 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c））），又 $5\overrightarrow{QF_1}+3\overrightarrow{QF_2}+3\overrightarrow{QP}=\mathbf{0}$，令 $|PF_2|=5x$，$|PF_1|=3x$，$|F_1F_2|=3x\,(x>0)$，则长轴长 $2a=|PF_1|+|PF_2|=8x$，焦距 $2c=|F_1F_2|=3x$，所以离心率 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{3}{8}$，故选 D.

3. **B** 【解析】由函数 $f(x)=\left|\frac{3e^x-1}{e^x-1}\right|-b$ 的定义域为 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$，可得其定义域关于原点对称，又 $f(-x)=\left|\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}-1}\right|-b=\left|\frac{\frac{3}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}-1}\right|-b=\left|\frac{e^x-3}{e^x-1}\right|-b$，因为函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=0$，即 $\left|\frac{e^x-3}{e^x-1}\right|-b+\left|\frac{3e^x-1}{e^x-1}\right|-b=0$，即 $\left|\frac{3e^x-1}{e^x-1}\right|+\left|\frac{e^x-3}{e^x-1}\right|=2b$ 恒成立，即 $2b=\frac{1}{|e^x-1|}\cdot(|3e^x-1|+|e^x-3|)$ 恒成立.

不妨先取 $a>\ln 3$.

当 $x>a>\ln 3$ 时，$e^x-1>0$，$3e^x-1>0$，$e^x-3>0$，所以 $2b=\frac{1}{e^x-1}\cdot[(3e^x-1)+(e^x-3)]=\frac{1}{e^x-1}\cdot(4e^x-4)=4$，所以 $b=2$.

当 $x<-a<-\ln 3$ 时，$e^x-1<0$，$3e^x-1<0$，$e^x-3<0$，所以 $2b=\frac{1}{1-e^x}\cdot[(1-3e^x)+(3-e^x)]=\frac{1}{1-e^x}\cdot(4-4e^x)=4$，所以 $b=2$.

综上可得，实数 b 的值为 2.

快解 考虑特殊情形，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to3-b$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to1-b$. 又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $3-b+1-b=0$，解得 $b=2$.

4. **BCD**　【解析】由$f\left(2x+\frac{3}{2}\right)$为奇函数，可得$f\left(-2x+\frac{3}{2}\right)=-f\left(2x+\frac{3}{2}\right)$，即$f\left(-x+\frac{3}{2}\right)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，即$f(-x)=-f(x+3)$，所以函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3}{2},0\right)$对称，令$x=-2$可得$f(2)=-f(1)=-1$.

令$x=y=1$，得$f^2(1)+f^2(1)-f(2)f(0)=4$，可得$f(0)=2$，故**A 错误**；

令$x=0$，可得$f^2(0)+f^2(y)-f(y)f(-y)=4$，即$f^2(y)-f(y)f(-y)=0$，则$f(y)[f(y)-f(-y)]=0$，所以$\forall y\in\mathbf{R}$，$f(y)=0$或$f(y)-f(-y)=0$，

当$f(y)\neq0$时，$f(y)-f(-y)=0$，

当$f(y)=0$时，用$-y$替换y得$f(-y)[f(-y)-f(y)]=0$，所以$f^2(-y)=0$，解得$f(-y)=0$，满足$f(y)-f(-y)=0$，

所以$\forall y\in\mathbf{R}$，$f(y)-f(-y)=0$，即$f(y)=f(-y)$，则$f(x)$为偶函数，故**B 正确**；

由$f(x)=f(-x)$，$f(-x)=-f(x+3)$，可得$f(x)=-f(x+3)$，即$f(x+3)=-f(x+6)$，所以$f(x)=f(x+6)$，则$f(x)$是以6为周期的周期函数，则$f(x+3)=f(-x-3)=f(-x+3)$，故**C 正确**；

由$f(0)=2$，$f(1)=1$，$f(2)=-1$，$f(-x)=-f(x+3)$，$f(x)$为以6为周期的偶函数，可得$f(3)=-f(0)=-2$，$f(4)=-f(-1)=-f(1)=-1$，$f(5)=-f(-2)=-f(2)=1$，$f(6)=f(0)=2$，所以$\sum_{k=1}^{2\,026}f(k)=337\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=337\times0-3=-3$，故**D 正确**.

快解　令$f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$，符合题干条件. 则$f(0)=2$，**A 错误**；$f(x)$为偶函数，$f(3+x)=f(3-x)$，**B，C 正确**. $f(x)$的周期为6，所以$\sum_{k=1}^{2\,026}f(k)=-3$，**D 正确**.

5. $\frac{5}{16}$　【解析】因为$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$（关键：由平面向量基本定理表示所求向量），所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{5}{16}$.

快解　分析：对于规则图形，向量坐标化求值可以快速有效地解决问题.

以B为坐标原点，分别以$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$的方向为x，y轴的正方向建立平面直角坐标系（图略），则$A(0,1)$，$D(1,1)$，$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{5}{16}$.

6. 2　【解析】分析：先研究函数的奇偶性、单调性与值域，再根据题意按自变量分布在原点同侧、跨原点两类讨论，然后利用单调性去绝对值并放缩，最后求出M的最值.

将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=\left|\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right|=\left|1-\frac{2}{e^{2x}+1}\right|$，

因为 $f(-x)=\left|\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}\right|=\left|-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right|=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$，

由于 $e^{2x}+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

由偶函数的图象对称性可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，

$f(0)=0$ 为最小值，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$.

令 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$，根据单调性，对 x_i 的分布进行讨论.

当所有 x_i 均在同一单调区间内，即 $x_n\leqslant 0$ 或 $x_0\geqslant 0$ 时，$S=|f(x_n)-f(x_0)|<1$；

当序列跨越原点，即 $x_0<0$ 且 $x_n>0$ 时，存在下标 $k(0\leqslant k<n-1,k\in\mathbf{N}^*)$ 使得 $x_k\leqslant 0<x_{k+1}$，利用单调性拆解绝对值.

当 $k=0$，即 $x_0<0<x_1<\cdots<x_n$ 时，$S=f(x_n)-f(x_1)+|f(x_1)-f(x_0)|<1+1=2$.

当 $k=n-1$，即 $x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}\leqslant 0<x_n$ 时，同理有 $S<2$.

当 $1\leqslant k\leqslant n-2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，$S=\sum\limits_{i=1}^{k}[|f(x_i)-f(x_{i-1})|]+|f(x_{k+1})-f(x_k)|+\sum\limits_{i=k+2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$

$=\sum\limits_{i=1}^{k}[f(x_{i-1})-f(x_i)]+|f(x_{k+1})-f(x_k)|+\sum\limits_{i=k+2}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]$

$=[f(x_0)-f(x_k)]+|f(x_{k+1})-f(x_k)|+[f(x_n)-f(x_{k+1})]$

$=f(x_0)+f(x_n)-[f(x_k)+f(x_{k+1})-|f(x_{k+1})-f(x_k)|]$，

由于对任意 $a,b\in\mathbf{R}$ 有 $a+b-|a-b|=2\min\{a,b\}$，

则 $S=f(x_0)+f(x_n)-2\min\{f(x_k),f(x_{k+1})\}$，

由于 $f(x)\geqslant 0$ 且 $f(x)<1$，故 $S\leqslant f(x_0)+f(x_n)<1+1=2$.

综上，$S<2$ 恒成立，又当 $x_0\to-\infty$，$x_n\to+\infty$，$\exists k$ 满足 $1\leqslant k<n$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$ 使得 $x_k=0$ 时，$S\to 2$，所以要使 $S\leqslant M$ 恒成立，则 $M_{\min}=2$.

快解 $|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 可以表示 $f(x)$ 图象上两个点纵坐标差的绝对值，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 表示这 n 组相邻两点纵坐标差的绝对值之和，在 y 轴左侧此和的极限为 1，由偶函数对称性可知 y 轴右侧和的极限也为 1，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 最大极限为 2，故 $M_{\min}=2$.

新风向 3 ▸ 新定义

1. **A** 【解析】分析：要求所有非空子集的“绝对交错和”的总和，则需分类讨论所有可能的非空子集，最后求和.

对于数集 $T=\{15,23,26,630\}$，

当其子集为单元素集合时，子集的“绝对交错和”的总和为 $15+23+26+630=694$.

当子集为两个元素的集合时，子集的“绝对交错和”的总和为 T 中任意两个元素的差的绝对值之和，

即 $|15-23|+|15-26|+|15-630|+|23-26|+|23-630|+|26-630|=1\ 848$.

当子集为三个元素的集合时，

若是 $\{15,23,26\}$，则“绝对交错和”为 $|15-23+26|=18$；

若是 $\{15,23,630\}$，则“绝对交错和”为 $|15-23+630|=622$；

若是 $\{15,26,630\}$，则“绝对交错和”为 $|15-26+630|=619$；

若是 $\{23,26,630\}$，则“绝对交错和”为 $|23-26+630|=627$.

故此时子集的“绝对交错和”的总和为 $18+622+619+627=1\ 886$.

当子集为四个元素的集合时，“绝对交错和”为 $|15-23+26-630|=612$.

则 T 的所有非空子集的“绝对交错和”的总和为 $694+1\ 848+1\ 886+612=5\ 040$. 故选 A.

2. **AC** 【解析】对于 A，分析：先求双曲线焦点的坐标，然后根据题目中“复运算”的定义直接求解. 由题意，双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$.

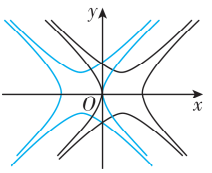
因为 $|\overline{BF_1}|=0$，所以 $\sqrt{|(x_2+\sqrt{3})^2-y_2^2|}=0$，化为 $y_2^2=(x_2+\sqrt{3})^2$，解得 $y_2=x_2+\sqrt{3}$ 或 $y_2=-x_2-\sqrt{3}$，

所以点 B 的轨迹方程为 $y=x+\sqrt{3}$ 和 $y=-x-\sqrt{3}$，故 **A 正确**.

对于 B，若 $|\overline{BF_1}|=0$，结合 A 分析，取 $B(0,\sqrt{3})$，$A(-\sqrt{2},0)$，则 $|\overline{AF_1}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，又 $|\overline{AB}|=1>\sqrt{3}-\sqrt{2}=|\overline{AF_1}|+|\overline{BF_1}|$，故 **B 错误**.

对于 C，分析：采用数形结合，得到动点的轨迹方程后，将题目转化为图形的交点个数进行求解. 因为 $|\overline{BF_1}|=\sqrt{3}$，所以 $|(x_2+\sqrt{3})^2-y_2^2|=3$，

所以点 B 的轨迹方程为 $(x_2+\sqrt{3})^2-y_2^2=3$ 和 $y_2^2-(x_2+\sqrt{3})^2=3$，是一对等轴双曲线（蓝色曲线），如图.



同理，满足 $|\overline{BF_2}|=\sqrt{3}$ 时，点 B 的轨迹也为一对等轴双曲线（黑色曲线）.

由题意，满足 $|\overline{BF_1}|=|\overline{BF_2}|=\sqrt{3}$ 的点 B 的个数，即为两对等轴双曲线的交点个数，如图所示共有 7 个交点，故 **C 正确**.

对于 D，分析：发现表达式含绝对值难以直接证明，可以结合完全平方公式进行化简，再根据式子进行放缩. 不妨设 A 在双曲线的右支上，存在点 A 满足 $|x_1-\sqrt{3}|>|y_1|$，即 $(x_1-\sqrt{3})^2-y_1^2>0$，

由双曲线定义可知 $|AF_1|-|AF_2|=2\sqrt{2}$，即 $\sqrt{(x_1+\sqrt{3})^2+y_1^2}-\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+y_1^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $(x_1+\sqrt{3})^2+y_1^2=8+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+y_1^2}+(x_1-\sqrt{3})^2+y_1^2$，

则 $(x_1+\sqrt{3})^2-y_1^2=8+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+y_1^2}+(x_1-\sqrt{3})^2-y_1^2$

$\geqslant 8+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{|(x_1-\sqrt{3})^2-y_1^2|}+|(x_1-\sqrt{3})^2-y_1^2|$

$=\left(2\sqrt{2}+\sqrt{|(x_1-\sqrt{3})^2-y_1^2|}\right)^2$，

即 $\sqrt{(x_1+\sqrt{3})^2-y_1^2}\geqslant 2\sqrt{2}+\sqrt{|(x_1-\sqrt{3})^2-y_1^2|}$，

即 $|\overline{AF_1}|-|\overline{AF_2}|\geqslant 2\sqrt{2}$，根据对称性可得 $||\overline{AF_1}|-|\overline{AF_2}||\geqslant 2\sqrt{2}$，

所以当 $y_1\neq 0$ 时，$||\overline{AF_1}|-|\overline{AF_2}||>2\sqrt{2}$，故 **D 错误**. 故选 AC.

3. **6** 【解析】分析：先根据复合函数定义，写出递推关系式，因为 n 为正整数，所以可以转化为数列问题进行研究，求出 $2f_{21}(19)$，再通过二项式定理展开，求解其除以 10 的余数.

由题意可知 $f_n(19)=f(f_{n-1}(19))=3f_{n-1}(19)+1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

令 $a_n=f_n(19)$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，记 $a_1=f(19)=3\times 19+1=58$，

由题意可得 $a_n=3a_{n-1}+1$，故 $a_n+\frac{1}{2}=3\left(a_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$，且 $a_1+\frac{1}{2}=58+\frac{1}{2}=\frac{117}{2}\neq 0$，

所以数列 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{117}{2}$ 为首项，公比为 3 的等比数列，

所以 $a_{21}+\frac{1}{2}=\frac{117}{2}\times 3^{20}=\frac{13\times 3^{22}}{2}$，

所以 $f_{21}(19)=a_{21}=\dfrac{13\times3^{22}-1}{2}$，所以 $2f_{21}(19)=13\times3^{22}-1$，

因为 $3^{22}=9^{11}=(10-1)^{11}=10^{11}-C_{11}^{1}\cdot10^{10}+C_{11}^{2}\cdot10^{9}-\cdots+C_{11}^{10}\cdot10-1$，

关键点

故 $2f_{21}(19)=13(10^{11}-C_{11}^{1}\cdot10^{10}+C_{11}^{2}\cdot10^{9}-\cdots+C_{11}^{10}\cdot10-1)-1$

$=13(10^{11}-C_{11}^{1}\cdot10^{10}+C_{11}^{2}\cdot10^{9}-\cdots+C_{11}^{10}\cdot10)-14$

$=13(10^{11}-C_{11}^{1}\cdot10^{10}+C_{11}^{2}\cdot10^{9}-\cdots+C_{11}^{10}\cdot10)-20+6$，

因为 $13(10^{11}-C_{11}^{1}\cdot10^{10}+C_{11}^{2}\cdot10^{9}-\cdots+C_{11}^{10}\cdot10)-20$ 能被 10 整除，故 $2f_{21}(19)$ 除以 10 的余数是 6.

4. $\left[\dfrac{2}{e},+\infty\right)$　【解析】分析：先根据“线性上界函数”的定义列出不等式，进行参变量分离，把问题转化为恒成立问题，从而构造函数求参. 由题意可知，对任意的 $x\geqslant0$，$f(x)\leqslant g(x)$，即 $\sin2x-ae^{x+1}\leqslant x-2$ 恒成立，参变量分离可得 $a\geqslant\dfrac{\sin2x-x+2}{e^{x+1}}$.

令 $h(x)=2x-\sin2x$，其中 $x\geqslant0$，则 $h'(x)=2-2\cos2x\geqslant0$，且不恒为 0，

所以函数 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $x\geqslant0$ 时，$h(x)=2x-\sin2x\geqslant h(0)=0$，即 $2x\geqslant\sin2x$，

所以当 $x\geqslant0$ 时，$\dfrac{\sin2x-x+2}{e^{x+1}}\leqslant\dfrac{2x-x+2}{e^{x+1}}=\dfrac{x+2}{e^{x+1}}$，

构造函数 $p(x)=\dfrac{x+2}{e^{x+1}}$，其中 $x\geqslant0$，

则 $p'(x)=\dfrac{1-(x+2)}{e^{x+1}}=-\dfrac{x+1}{e^{x+1}}<0$，

所以函数 $p(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，即 $p(x)=\dfrac{x+2}{e^{x+1}}\leqslant p(0)=\dfrac{2}{e}$，故 $\dfrac{\sin2x-x+2}{e^{x+1}}\leqslant\dfrac{x+2}{e^{x+1}}\leqslant\dfrac{2}{e}$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

故函数 $y=\dfrac{\sin2x-x+2}{e^{x+1}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值为 $\dfrac{2}{e}$，

所以 $a\geqslant\dfrac{2}{e}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{2}{e},+\infty\right)$.

新风向 4 ▸ 新情境

1. C　【解析】由题意，知蜻蜓沿逆时针方向飞的概率是 $\dfrac{3}{4}$，沿顺时针方向飞的概率是 $\dfrac{1}{4}$.

蜻蜓飞三次要回到 A 叶上只有两条途径：

第一条，按 $A\to B\to C\to A$，飞三次后停在 A 叶上的概率 $P_1=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{27}{64}$；

第二条，按 $A\to C\to B\to A$，飞三次后停在 A 叶上的概率 $P_2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{64}$.

所以飞三次之后停在 A 叶上的概率 $P=P_1+P_2=\dfrac{27}{64}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{7}{16}$.

故选 C.

2. B　【解析】分析：由第一次的晷影长是表高的 2 倍得到 $\tan\alpha$，从而把 β 拆成两角之差，再利用两角差的正切公式算出结果. 由题意可得，$\tan\alpha=2$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，则 $\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\dfrac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\cdot\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}=1$，所以第二

次的晷影长是表高的 1 倍. 故选 B.

3. **ABD**　【解析】对于 A，由题意可知，$a_1=81$，$a_{2k}=\left(1-\frac{1}{3}\right)a_{2k-1}=\frac{2}{3}a_{2k-1}$，$a_{2k+1}=\left(1+\frac{1}{3}\right)a_{2k}=\frac{4}{3}a_{2k}$（提示：将题目背景转化为数列递推关系式，由题知需交替操作，因此区分奇偶下标），$k\in\mathbf{N}^*$，

则 $a_{2k+1}=\frac{4}{3}a_{2k}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}a_{2k-1}=\frac{8}{9}a_{2k-1}$，可知数列$\{a_{2k-1}\}$是首项为 $a_1=81$，公比为$\frac{8}{9}$的等比数列，则 $a_{2k-1}=81\times\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}$，$k\in\mathbf{N}^*$，所以 $a_5=81\times\left(\frac{8}{9}\right)^2=64$，故 **A 正确**；

对于 B，因为 $a_{2k}=\frac{2}{3}a_{2k-1}$，所以 $a_8=\frac{2}{3}a_7$，即 $2a_7=3a_8$，故 **B 正确**；

对于 C，因为 $a_{2k-1}+a_{2k+3}-2a_{2k+1}=a_{2k-1}\left(1+\frac{64}{81}-2\times\frac{8}{9}\right)=\frac{1}{81}a_{2k-1}\neq0$，即 $a_{2k-1}+a_{2k+3}\neq2a_{2k+1}$，所以不存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_{2k-1}+a_{2k+3}=2a_{2k+1}$，故 **C 错误**；

对于 D，由等比数列性质可知 $a_{2k-1}a_{2k+3}=(a_{2k+1})^2$，即 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{2k-1}a_{2k+3}=(a_{2k+1})^2$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

4. **128　7**　【解析】分析：由题意得到$\{a_n\}$的通项公式，代入 $n=5$ 算出 a_5，再求 $\lg a_5$. 求 $a_1a_2\cdots a_k$ 的表达式，得到对应不等式，结合 k 为正整数求 k 的最小值.

根据题意，$a_n=10^{8\times2^{n-1}}$. $a_5=10^{8\times2^4}=10^{128}$，则 $\lg a_5=\lg\ 10^{128}=128$.

$a_1a_2\cdots a_k=10^{8+16+32+\cdots+8\times2^{k-1}}=10^{\frac{8(1-2^k)}{1-2}}=10^{8(2^k-1)}$，

由 $10^{8(2^k-1)}>10^{1\,000}$，得 $8(2^k-1)>1\,000$，即 $2^k>126$，

因为 $2^6=64$，$2^7=128$，所以正整数 k 的最小值为 7.

新风向 5 ▸ 双空题

1. **$\frac{\pi}{3}$　$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$（答案不唯一）**　【解析】因为 $\triangle ABC$ 中，$\sin 2C=\sin C$，则 $2\sin C\cos C=\sin C$，且 $\sin C>0$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

因为 A 为钝角，所以 $B+C<\frac{\pi}{2}$，即得 $B<\frac{\pi}{6}$，取 $B=\frac{\pi}{12}$，满足 A 为钝角（提示：题目要求“一个取值”，则可知答案不唯一，尽量选择可以凑出特殊角度的角求解），

由正弦定理得 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

所以 $c=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$（答案不唯一）.

2. **$\frac{9}{5}$　$\frac{5^k-4^k}{5^{k-1}}$**　【解析】当 $m=2$ 时，X 的可能取值为 1，2，

$P(X=1)=\frac{5}{5^2}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{5\times4}{5^2}=\frac{4}{5}$，

所以 X 的数学期望为 $1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$.

当 $m=k$ 时，设随机变量 $X_i=\begin{cases}1,\text{这}k\text{次选取中，球}i\text{至少被取出}1\text{次},\\0,\text{这}k\text{次选取中，球}i\text{没被取出过},\end{cases}i\in\{1,2,3,4,5\}$，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{5}X_i$，

由5个球“地位”相同可得 $E[X_i]=E[X_1],i\in\{1,2,3,4,5\}$，

由期望的性质，得 $E[X]=E[\sum\limits_{i=1}^{5}X_i]=\sum\limits_{i=1}^{5}E[X_i]=5E[X_i]$，

依题意，球 i 在单次抽取中未被取出的概率为 $\frac{4}{5}$，

则 k 次均未取出球 i 的概率为 $P(X_i=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^k$，球 i 至少被取出一次的概率为 $P(X_i=1)=1-\left(\frac{4}{5}\right)^k$，因此 $E[X_i]=0\times\left(\frac{4}{5}\right)^k+1\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^k\right]=\frac{5^k-4^k}{5^k}$，$E[X]=5E[X_i]=\frac{5^k-4^k}{5^{k-1}}$.

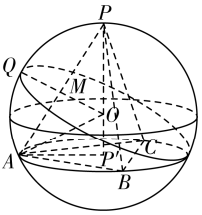
3. 4　32　【解析】根据题意，$Q(t)=Q_0\cdot2^{t+4k-k|t-4|}=\begin{cases}Q_0\cdot2^{(1-k)t+8k},t\geqslant4,\\Q_0\cdot2^{(k+1)t},0\leqslant t<4\end{cases}$（提示：绝对值函数多拆成分段函数，便于进行研究），又 $k>1$，则函数 $Q(t)$ 在 $[0,4)$ 上单调递增，在 $[4,+\infty)$ 上单调递减，即病毒载量在 $t=4$ 小时达到峰值.

因为达到峰值之后病毒载量每经过1小时衰减为原来的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $Q(t+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}Q(t)$，则有 $Q_0\cdot2^{(1-k)(t+1)+8k}=\frac{\sqrt{2}}{2}Q_0\cdot2^{(1-k)t+8k}$，变形可得 $2^{1-k}=\frac{\sqrt{2}}{2}=2^{-\frac{1}{2}}$，解得 $k=\frac{3}{2}$，则 $Q(t)=\begin{cases}Q_0\cdot2^{-\frac{1}{2}t+12},t\geqslant4,\\Q_0\cdot2^{\frac{5}{2^t}},0\leqslant t<4,\end{cases}$ 若 $Q(t)\geqslant\frac{Q_0}{16}=Q_0\cdot2^{-4}$，则有 $\begin{cases}Q_0\cdot2^{-\frac{1}{2}t+12}\geqslant Q_0\cdot2^{-4},\\t\geqslant4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}Q_0\cdot2^{\frac{5}{2^t}}\geqslant Q_0\cdot2^{-4},\\0\leqslant t<4,\end{cases}$

解得 $0\leqslant t\leqslant32$，故该病毒具有传染性的总时长为32小时.

4. $2\sqrt{6}\pi$　$2\sqrt{6}\pi$　【解析】如图，设 P 在平面 ABC 上的射影为 P'，四面体 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，



则 $P'A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$P'P=\sqrt{AP^2-P'A^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，

由 $OA^2=P'A^2+P'O^2$ 得 $R^2=\frac{16}{3}+\left(\frac{4\sqrt{6}}{3}-R\right)^2$，解得 $R=\sqrt{6}$.

$\because M$ 为 PA 的中点，$\therefore OM\perp PA$，

又 $\because QM\perp PA$，$\therefore Q$ 的轨迹是半径为 $\sqrt{6}$ 的圆（提示：Q 在过 M 且垂直于 PA 的平面上且该平面过球心 O，截面必为大圆），

$\therefore Q$ 的轨迹长度为 $2\pi R=2\sqrt{6}\pi$.

设 Q 的轨迹所在平面为 α，记平面 α 与平面 ABC 的夹角为 θ，平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}//\overrightarrow{AP}$，平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}//\overrightarrow{PP'}$，则 $\cos\theta=\frac{PP'}{AP}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore Q'$ 的轨迹所围成的区域的面积为 $\pi R^2\cos\theta=2\sqrt{6}\pi$（提示：由面积射影定理知平面图形射影面积公式为 $S_{射影}=S_{原图}\cos\theta$，其中，θ 为原图形所在平面与射影图形所在平面的夹角）.