小卷提速 · 限时

限时小卷 ▸ 1

1. C 【解析】本题考查全称量词命题的否定.

“$\forall x>0, e^x+1\leqslant 3x$”为全称量词命题,其否定为“$\exists x>0, e^x+1>3x$”. 故选 C.

2. C 【解析】本题考查中位数、平均数.

分析:题干未说明给出的数据是否为按照大小顺序排序的,而中位数需要将数据按照大小顺序排序后求解,故先对 a 的取值进行讨论. 当 $a\leqslant 7$ 时,中位数为 $\frac{7+11}{2}=9$,当 $a\geqslant 11$ 时,中位数为 $\frac{11+11}{2}=11$,而中位数为 10,故 $7<a<11$ 且 $\frac{a+11}{2}=10$,可得 $a=9$,所以该组数据的平均数为 $\frac{3+7+9+11+11+13}{6}=9$.

故选 C.

3. C 【解析】本题考查集合的交集运算、含参的一元二次方程问题.

关于 t 的方程 $t^2-2xt+4=0$ 有实根,需判别式 $\Delta=(-2x)^2-16\geqslant 0$(易错:一元二次方程有实根,包括有 1 个实根和 2 个实根,故不要丢等号),即 $4x^2-16\geqslant 0$,所以 $|x|\geqslant 2$,又 $x\in\mathbf{Z}$,因此 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$. 由 $|x-1|<4$,得 $-3<x<5$,则 $A\cap B=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 2\}\cap\{x\mid -3<x<5\}=\{-2,2,3,4\}$,共有 4 个元素. 故选 C.

4. D 【解析】本题考查诱导公式、向量的坐标运算.

由题可知,$\boldsymbol{a}=\left(\cos\frac{5\pi}{3},-\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right),-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1)$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}\times(-2)+\frac{1}{2}\times 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

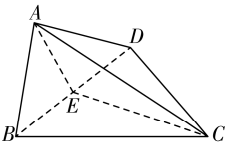
5. B 【解析】本题考查对数的运算性质.

分析:设印尼中爪哇省地震释放出来的能量为 E_1,震级 $M_1=6.2$,四川凉山州木里县地震释放出来的能量为 E_2,震级 $M_2=5.0$,利用对数的运算性质求解.

设印尼中爪哇省地震释放出来的能量为 E_1,震级 $M_1=6.2$,四川凉山州木里县地震释放出来的能量为 E_2,震级 $M_2=5.0$. 因为地震时释放出来的能量 E(单位:焦耳)与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$,所以 $\lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right)=\lg E_1-\lg E_2=1.5(M_1-M_2)=1.5\times 1.2=1.8$,又 $\lg 62.5\approx 1.796<1.8<1.803\approx\lg 63.5$,所以 $62.5<\frac{E_1}{E_2}<63.5$,所以 $\frac{E_1}{E_2}\approx 63$,故选 B.

6. D 【解析】本题考查三棱锥的外接球问题、二面角.

如图,设 BD 的中点为 E,连接 CE,AE,则 $CE\perp BD$,$CE=\sqrt{3}$.



因为 AC 是三棱锥 $A-BCD$ 外接球的直径,所以 $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$,又 $CD=CB$,$CA=CA$,则 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$,可得 $AB=AD$,则 $AE\perp BD$,可知二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AEC=120^\circ$.

关键点

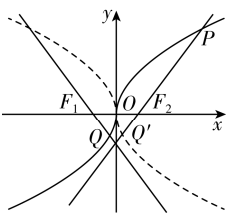
设 $AE=a$，则 $AB=\sqrt{a^2+1}$，$AC=\sqrt{a^2+5}$，在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AE^2+CE^2-2\cdot AE\cdot CE\cdot\cos\angle AEC$，即 $a^2+5=a^2+3-2\times a\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，解得 $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$，所以 $AC=\sqrt{a^2+5}=\sqrt{\frac{4}{3}+5}=\frac{\sqrt{57}}{3}$. 故选 D.

7. B 【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系、抛物线的焦半径问题.

分析：题中曲线 C 的解析式中含有绝对值，且条件也和对称相关，则解题时考虑利用对称性找等量关系.

由题意知，当 $y\geqslant 0$ 时，曲线 C：$4x-y^2=0$，即 $y^2=4x(y\geqslant 0)$，其对应抛物线的焦点为 $F_2(1,0)$；

当 $y<0$ 时，曲线 C：$4x+y^2=0$，即 $y^2=-4x(y<0)$，其对应抛物线的焦点为 $F_1(-1,0)$. 作出曲线 C，直线 PF_2，QF_1，如图中实线所示.



由对称性知点 Q 关于 y 轴的对称点 Q' 在抛物线 $y^2=4x$ 上，且 $|QF_1|=|Q'F_2|$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q'(x_2,y_2)$，$x_1>0$，$y_1>0$，$x_2>0$，$y_2<0$，由抛物线的定义知，$|PF_2|=x_1+1=5$，所以 $x_1=4$，$y_1^2=16$，所以 $y_1=4$，

所以直线 PF_2 的斜率为 $\frac{4-0}{4-1}=\frac{4}{3}$，直线 PF_2 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$. 由 $\begin{cases}y=\frac{4}{3}(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $4x^2-17x+4=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{17}{4}$，又 $x_1=4$，所以 $x_2=\frac{1}{4}$，所以 $|QF_1|=|Q'F_2|=x_2+1=\frac{5}{4}$. 故选 B.

8. A 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性、比较大小问题.

分析：先观察题目中代数式的结构特征，寻找它们之间的关系，然后构造函数，利用导数讨论函数的单调性，进而得到大小关系. $a=-\ln\frac{5}{6}=\ln\frac{6}{5}=\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)$，$b=\sin\frac{1}{5}$，$c=e^{\frac{1}{5}}-1$.

令 $f(x)=\sin x-\ln(x+1)$，$x\in(0,1)$，则 $f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$.

令 $g(x)=f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，则 $g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$，则 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，且 $g'(0)=1>0$，$g'(1)=\frac{1}{4}-\sin 1<\frac{1}{4}-\frac{1}{2}<0$，所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减.

又 $f'(0)=0$，$f'(1)=\cos 1-\frac{1}{2}>0$，则 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，则 $f(x)>f(0)=0$，即 $\sin x>\ln(x+1)$（$x\in(0,1)$），令 $x=\frac{1}{5}$，可得 $\sin\frac{1}{5}>\ln\frac{6}{5}=-\ln\frac{5}{6}$，即 $a<b$.

令 $h(x)=e^x-(\sin x+1)$，$x\in(0,1)$，则 $h'(x)=e^x-\cos x>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，又 $h(0)=0$，所以 $h\left(\frac{1}{5}\right)>h(0)=0$，即 $e^{\frac{1}{5}}-1>\sin\frac{1}{5}$，即 $b<c$.

综上，$a<b<c$. 故选 A.

9. BC 【解析】本题考查共轭复数、复数的模、复数的乘法运算.

选项 A，由 $z=1+2i$，得 $\bar{z}=1-2i$，**A 错误**；选项 B，由 $z=1+2i$，得

$z^2=(1+2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i$，**B 正确**；选项 C，由 $z=1+2i$，得 $|z-i|=|1+2i-i|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，**C 正确**；选项 D，由 $z=1+2i$，得 $|z-1|=|1+2i-1|=|2i|=2$，**D 错误**. 故选 BC.

10. **AD** 【解析】本题考查等比数列的性质、前 n 项和公式.

由题知 $a_n>0, q>0, q\neq 1$.

A：由等比数列的性质可得，$a_{2\,023}\cdot a_{2\,026}=a_{2\,024}\cdot a_{2\,025}$（提示：等比数列下标和的性质），**A 正确**.

B：$a_{2\,023}+a_{2\,026}-a_{2\,024}-a_{2\,025}=a_{2\,023}(1+q^3-q-q^2)=a_{2\,023}(1-q)^2\cdot(1+q)$，因为 $a_{2\,023}>0$，$(1-q)^2>0$，$1+q>0$，所以 $a_{2\,023}+a_{2\,026}-a_{2\,024}-a_{2\,025}>0$，即 $a_{2\,023}+a_{2\,026}>a_{2\,024}+a_{2\,025}$，**B 错误**.

C：若 $T_{2\,023}T_{2\,026}<T_{2\,024}T_{2\,025}$，则 $a_{2\,026}<a_{2\,024}$，则 $q^2<1$，由于 q 与 1 的大小关系不确定，故 $T_{2\,023}T_{2\,026}<T_{2\,024}T_{2\,025}$ 不一定成立，**C 错误**.

D：$S_{2\,023}S_{2\,026}-S_{2\,024}S_{2\,025}=\dfrac{a_1^2}{(1-q)^2}[(1-q^{2\,023})(1-q^{2\,026})-(1-q^{2\,024})(1-q^{2\,025})]=\dfrac{a_1^2}{(1-q)^2}\cdot[-q^{2\,023}(1+q)(1-q)^2]=-a_1^2q^{2\,023}(1+q)<0$，因此 $S_{2\,023}S_{2\,026}<S_{2\,024}S_{2\,025}$，**D 正确**. 故选 AD.

11. **AD** 【解析】本题考查空间线、面位置关系的判断，空间几何体的截面问题.

分析：题干给了很多中点，优先考虑构造出中位线，从而得到平行关系.

对于 A，如图①，连接 BC_1，AD_1. ∵ E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，∴ $BC_1\parallel EF$，易知 $AB\parallel C_1D_1$，且 $AB=C_1D_1$，∴ 四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，∴ $BC_1\parallel AD_1$，∴ $AD_1\parallel EF$. ∵ $A_1D\perp AD_1$，∴ $A_1D\perp EF$，故 **A 正确**.

对于 B，设正方体的棱长为 2，点 C，G 到平面 AEF 的距离分别为 h_1，h_2，

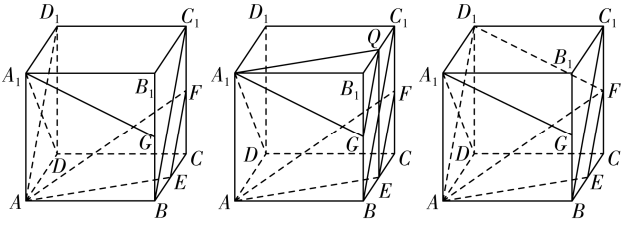
∵ $V_{C-AEF}=V_{A-CEF}$（提示：等体积法），

∴ $\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot h_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1\times1}{2}\times2$，∴ $S_{\triangle AEF}\cdot h_1=1$，连接 GA，GE，GF（图略），又 $V_{G-AEF}=V_{A-GEF}$，∴ $\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot h_2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\times1}{2}\times2$，

∴ $S_{\triangle AEF}\cdot h_2=2$，∴ $h_1\neq h_2$，故 **B 错误**.

对于 C，如图②，取 B_1C_1 的中点 Q，连接 A_1Q，GQ，EQ，BC_1，易知 $EF/\!/BC_1/\!/GQ$，$GQ\not\subset$ 平面 AEF，$EF\subset$ 平面 AEF，∴ $GQ/\!/$ 平面 AEF. 易知 $AA_1/\!/BB_1/\!/EQ$，且 $AA_1=BB_1=EQ$，∴ 四边形 $AEQA_1$ 为平行四边形，∴ $A_1Q/\!/AE$，∵ $A_1Q\not\subset$ 平面 AEF，$AE\subset$ 平面 AEF，∴ $A_1Q/\!/$ 平面 AEF，∵ $A_1Q\cap GQ=Q$，A_1Q，$GQ\subset$ 平面 A_1QG，∴ 平面 $A_1QG/\!/$ 平面 AEF，又∵ $A_1G\subset$ 平面 A_1GQ，∴ $A_1G/\!/$ 平面 AEF，故 **C 错误**.

对于 D，如图③，连接 BC_1，AD_1，FD_1，由选项 A 知 $AD_1/\!/EF$，且 $AD_1=BC_1=2EF$，易知 $AE=FD_1$，故过 A，E，F 三点的平面截正方体的截面为等腰梯形 $AEFD_1$，故 **D 正确**. 故选 AD.



图①　　图②　　图③

12. **6** 【解析】本题考查二项式定理的应用.

$(x+1)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$ 的展开式中，常数项为 $C_4^2\cdot(-1)^2=6$.

13. $\dfrac{1}{2}$ 【解析】本题考查三角恒等变换.

由两角和的正切公式可得 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\sqrt{2}}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$，所以 $1-\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}$.

由两角和的余弦公式可得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta(1-\tan\alpha\tan\beta)=\sqrt{2}\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$（关键：利用同角三角函数的基本关系转化），解得 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$.



30 s 速解　西安交通大学——王紫蓬

因为 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\sqrt{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$.

14. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　【解析】本题考查双曲线的离心率、双曲线与圆的综合问题.

分析：分别求出圆 M：$x^2+y^2=a^2$ 平移后的圆的方程、双曲线的渐近线方程，根据平移后的圆与双曲线渐近线相切构造方程组，得到 a,b 的关系，进而求得离心率. 依题意，圆 M 的方程为 $x^2+y^2=a^2$，将该圆竖直上移$\sqrt{3}$个单位长度可得圆 M_1：$x^2+(y-\sqrt{3})^2=a^2$（提示：将圆 M 竖直上移$\sqrt{3}$个单位长度后圆心坐标为$(0,\sqrt{3})$，半径不变），将圆 M 水平右移$\sqrt{6}$个单位长度后，得到圆 M_2：$(x-\sqrt{6})^2+y^2=a^2$. 因为圆 M_1，M_2 均与双曲线的渐近线相切，不妨取渐近线 $bx-ay=0$，

则 $\begin{cases}\frac{|0-\sqrt{3}a|}{\sqrt{(-a)^2+b^2}}=a,\\ \frac{|\sqrt{6}b-0|}{\sqrt{(-a)^2+b^2}}=a,\end{cases}$ 可得 $a=\sqrt{2}b$. 所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

限时小卷 ▸ 2

1. D　【解析】本题考查复数的乘法运算、共轭复数、复数的几何意义.

因为 $z=i(1-i)=1+i$，所以 $\bar{z}=1-i$，复数 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(1,-1)$，位于第四象限，故选 D.

2. C　【解析】本题考查向量的线性运算、平面向量基本定理.

连接 AE，图略. 因为 F 是线段 DE 的中点，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$，又 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{8}\overrightarrow{AD}$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{7}{8}$，$\lambda+\mu=\frac{1}{2}+\frac{7}{8}=\frac{11}{8}$. 故选 C.

3. A　【解析】本题考查充分、必要条件的判断，基本不等式.

若 $ab>4$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>2\sqrt{4}=4$，充分性成立；若 $a+b>4$，取 $a=\frac{1}{2}$，$b=5$，满足条件，但 $ab=\frac{5}{2}<4$，不满足 $ab>4$，故必要性不成立. 所以“$ab>4$”是“$a+b>4$”的充分不必要条件. 故选 A.

4. B　【解析】本题考查导数的几何意义.

设切点坐标为 (m,n)，由于 $y'=3x^2-2$，所以 $3m^2-2=1$，解得 $m=\pm 1$.

当 $m=1$ 时，$\begin{cases}n=1+1,\\ n=1^3-2\times 1+3,\end{cases}$ 故 $n=2$；

当 $m=-1$ 时，$\begin{cases}n=-1+1,\\ n=(-1)^3-2\times(-1)+3,\end{cases}$ 此时 n 无解.

综上，切点的纵坐标为 2.

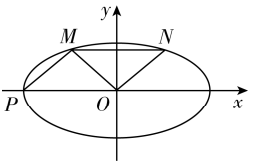
5. B 【解析】本题考查柱体、锥体体积的计算.

正六棱柱的底面是正六边形，即由 6 个边长为 6 的全等正三角形组成，故其底面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=54\sqrt{3}$，其体积 $V_{正六棱柱}=54\sqrt{3}\times4=216\sqrt{3}$. 挖去的正六棱锥底面与棱柱下底面重合，高等于棱柱的高，故其体积 $V_{正六棱锥}=\frac{1}{3}\times54\sqrt{3}\times4=72\sqrt{3}$，故剩余部分几何体的体积 $V=V_{正六棱柱}-V_{正六棱锥}=216\sqrt{3}-72\sqrt{3}=144\sqrt{3}$. 故选 B.

关键点

6. B 【解析】本题考查椭圆的离心率.

分析：根据题意，四边形 $OPMN$ 满足 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$，结合椭圆的对称性，不妨设 $N\left(\frac{a}{2},t\right)(t>0)$，将 N 点坐标代入椭圆方程可得 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，设 α 为直线 ON 的倾斜角，可得 $\tan\alpha=\sqrt{3}\times\frac{b}{a}$，结合 α 的范围可得 $\frac{b}{a}$ 的取值范围，进而求得椭圆 C 的离心率的取值范围.



由题意知 $P(-a,0)$，由 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}$ 知四边形 $OPMN$ 为平行四边形，则点 M,N 关于 y 轴对称，

根据椭圆的对称性，不妨设 $N\left(\frac{a}{2},t\right)(t>0)$，$M\left(-\frac{a}{2},t\right)$，将 N 点坐标代入椭圆方程可得 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.

设 α 为直线 ON 的倾斜角，因为 $\angle PON\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $\tan\alpha=\frac{t}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}\times\frac{b}{a}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$，所以 $\frac{b}{a}\in\left(\frac{1}{3},1\right)$. 因为椭圆离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，所以 $e\in\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

所以椭圆 C 的离心率的取值范围为 $\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. 故选 B.

关键点

7. B 【解析】本题考查利用导数研究函数的零点、比较大小问题.

分析：先通过导数判断函数单调性，再代入特殊点判断函数值的符号，结合单调性确定零点所在范围，得出大小关系.

已知 $f(x)=e^x+x$，则 $f'(x)=e^x+1$.

因为对于任意实数 x，都有 $e^x>0$，所以 $f'(x)>1>0$，所以函数 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是单调递增的，又 $f(0)=e^0+0=1+0>0$，所以 $f(x)$ 的零点 a 必定在 0 的左侧，即 $a<0$.

已知 $g(x)=\ln x+x$，函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}+1$. 因为 $x>0$，所以 $\frac{1}{x}>0$，则 $g'(x)>1>0$，所以函数 $g(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的，又 $g(1)=\ln1+1=1>0$，所以 $g(x)$ 的零点 b 必定在 1 的左侧，而定义域要求 $x>0$，所以 $0<b<1$.

已知 $h(x)=x-\sin x$，则 $h'(x)=1-\cos x$，因为对于任意实数 x，都有 $-1\leqslant\cos x\leqslant1$，所以 $1-\cos x\geqslant0$，即 $h'(x)\geqslant0$，且 $h'(x)$

不恒为 0，所以函数 $h(x)$ 在定义域 **R** 上是单调递增的，又 $h(0)=0-\sin 0=0$，
所以 $x=0$ 是函数 $h(x)$ 的唯一零点，故 $c=0$.
综上，$b>c>a$. 故选 B.

8. **C** 【解析】本题考查三角函数图象的平移变换、利用几何特征求参数.
分析：先由平移关系得到 m 与 ω 的关系式，再求解两函数图象的交点坐标，利用向量夹角公式结合已知角度建立方程，求出 ω 的值，最终得到 $\frac{m}{\omega}$ 的值. 由 $f(x)$ 的图象向左平移 m 个单位长度后得到 $g(x)$ 的图象，得 $\sin\left[\omega(x+m)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\omega x$（易错：左右平移变换的对象是自变量 x），即 $\omega m-\frac{\pi}{3}=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<m<\frac{\pi}{\omega}$，所以 $k=0$，$m=\frac{\pi}{3\omega}$.

由 $\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\omega x$，得 $\omega x-\frac{\pi}{3}=\pi-\omega x+2k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$，整理得 $x=\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{k_1\pi}{\omega}$，$k_1\in\mathbf{Z}$.

由对称性不妨取 $x_P=-\frac{\pi}{3\omega}$，$x_Q=\frac{2\pi}{3\omega}$，$x_R=\frac{5\pi}{3\omega}$，则 $y_P=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y_Q=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y_R=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

向量 $\overrightarrow{QP}=\left(-\frac{\pi}{\omega},-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{QR}=\left(\frac{\pi}{\omega},-\sqrt{3}\right)$，由 $\angle PQR=\frac{2\pi}{3}$，得 $\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}|\cdot|\overrightarrow{QR}|}$，即 $-\frac{1}{2}=\frac{-\frac{\pi^2}{\omega^2}+3}{\frac{\pi^2}{\omega^2}+3}$，又 $\omega>0$，故 $\omega=\frac{\pi}{3}$. 代入 $m=\frac{\pi}{3\omega}$ 中，得 $m=1$，故 $\frac{m}{\omega}=\frac{1}{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}$. 故选 C.

9. **ACD** 【解析】本题考查等差数列基本量的计算、等差数列的性质.
设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.
由 $\frac{S_5}{5}=6$，$\frac{S_7}{7}=8$，可得 $\begin{cases}5a_1+\frac{5\times4}{2}d=30,\\7a_1+\frac{7\times6}{2}d=56,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2n$，且 $S_n=n(n+1)$.
对于 A，由 $a_n=2n$，可得 $a_3=2\times3=6$，所以 **A 正确**；
对于 B，由 $S_n=n(n+1)$，可得 $S_6=6\times(6+1)=42$，所以 **B 不正确**；
对于 C，$a_{n+1}-a_n=2(n+1)-2n=2>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 **C 正确**；
对于 D，由 $S_n=n(n+1)$，可得 $\frac{S_n}{n}=\frac{n(n+1)}{n}=n+1$，则 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=(n+2)-(n+1)=1$，所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，所以 **D 正确**.
故选 ACD.

10. **ACD** 【解析】本题考查抽象函数求值问题，抽象函数的单调性、奇偶性.
令 $x=y=0$，可得 $f(0)=2f(0)$，则 $f(0)=0$，故 **A 正确**；
令 $x=-y$，可得 $f(0)=f(x)+f(-x)+0$，即 $f(x)+f(-x)=0$，因为 $f(x)$ 的定义域为 **R**，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，故 **B 错误**；
令 $y=1$，则 $f(x+1)=f(x)+f(1)+6x(x+1)$，则 $(x+1)'f'(x+1)=f'(x)+12x+6$，即 $f'(x+1)-f'(x)=12x+6$，故 **C 正确**；
由 $f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy(x+y)$，对 y 两边求导得 $f'(x+y)=f'(y)+6x(x+2y)$，令 $y=0$，可得 $f'(x)=f'(0)+6x^2$，又

$f'(0)=-6$，所以 $f'(x)=6x^2-6$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，故 **D 正确**. 故选 ACD.

11. **ABD** 【解析】本题考查与双曲线相关的范围问题.

设 $P(x,y)$，因为 $|OP|\cdot|OQ|=1$ 且 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2y^2+1}\geqslant 1$（提示：将 $x^2-y^2=1$ 代入即可消 x），所以 $0<|OQ|\leqslant 1$，即 $0<x_0^2+y_0^2\leqslant 1$，又 Q 在射线 OP 上，所以存在 $t>0$ 使得 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OQ}$，即 $\begin{cases}x=tx_0,\\ y=ty_0.\end{cases}$

又根据 $|OP|\cdot|OQ|=1$，可得 $t\cdot|OQ|\cdot|OQ|=1$，即 $t=\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{x_0^2+y_0^2}$，所以点 $P\left(\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2},\dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$，代入双曲线 E 的方程有 $\left(\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2-\left(\dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2=1$，

整理得 Q 的轨迹 M 的方程为 $(x_0^2+y_0^2)^2=x_0^2-y_0^2\ (0<x_0^2+y_0^2\leqslant 1)$.

对于 A，将 $(-x_0,-y_0)$ 代入轨迹 M 的方程可得 $(x_0^2+y_0^2)^2=x_0^2-y_0^2$，所以 M 关于原点 O 成中心对称，故 **A 正确**.

对于 B，由 $0<|OQ|\leqslant 1$ 可知，当 $|OP|=1$，即 P 点坐标为 $(\pm1,0)$ 时，$|OQ|_{\max}=1$，故 M 上的点到原点距离的最大值为 1，故 **B 正确**.

对于 C，若 Q 到点 $(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$ 的距离之差大于 2，则 Q 也在以点 $(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$ 为焦点且实半轴长大于 1 的双曲线上，这些双曲线上的所有点的横坐标的绝对值均大于 1，而由 $0<x_0^2+y_0^2\leqslant 1$，可知 $|x_0|\leqslant 1$，不合题意，所以 Q 到点 $(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$ 的距离之差不可能大于 2，故 **C 错误**.

对于 D，设 $u=x_0^2+y_0^2$，则由 M 的方程可得 $u^2=u-2y_0^2$ 且 $0<u\leqslant 1$，所以 $y_0^2=\dfrac{u-u^2}{2}\leqslant\dfrac{1}{8}$（提示：利用二次函数的性质求最值），即 $|y_0|\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

12. **-3** 【解析】本题考查根据集合的包含关系求参数.

$A\cup B=A$，即 $B\subseteq A$，若 $a+6=7$，则 $a=1$，不符合；若 $a+6=|a|$，则 $a=-3$，经检验符合题意.

13. **15π** 【解析】本题考查扇环面积的有关计算.

分析：分别计算侧面与底面上小球能接触到的容器内壁的面积.

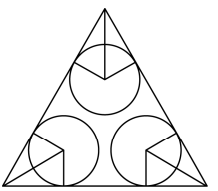
由圆锥轴截面为等边三角形，高为 6，易得圆锥的母线长与底面圆的直径均为 $4\sqrt{3}$（提示：即等边三角形的边长）.

小球的半径为 1，

在圆锥内壁侧面，小球接触到的区域展开后是一个扇环，可

关键点

知扇环的半径分别为 $3\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，扇环所在扇形的圆心角为 $\dfrac{2\pi\times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\pi$，所以扇环面积为 $\dfrac{1}{2}\pi\times[(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2]=12\pi$.



在圆锥底面，小球接触到的区域是一个圆面，其半径为 $\sqrt{3}$，面积为 $(\sqrt{3})^2\pi=3\pi$.

综上，小球能接触到的圆锥容器内壁的最大面积为 15π.

14. **$\dfrac{39}{28}$** 【解析】本题考查隔板法的应用、古典概型、离散型随机变量的数学期望.

分析：分配名额的方法数可转化为将 9 个球分成 3 份，且每份至少有 1 个球，即用 2 个隔板插入 9 个球形成的 8 个空隙中，则有 $C_8^2=28$（种）分法，X 的所有可能取值为 1，2，3，应用古典概型的概率求法求对应概率，进而求期望.

设三个年级分配的名额数分别为 a,b,c，则 $a+b+c=9$，又每个年级至少分配 1 个名额，所以相当于将 9 个球分成 3 份，且每份至少有 1 个球，即用 2 个隔板插入 9 个球形成的 8 个空隙中，则有 $C_8^2=28$（种）分法.

突破点

由题意，$X=\min\{a,b,c\}$，则 X 的所有可能取值为 1，2，3，

其中 $X=3$ 的情况有 $(3,3,3)$，即 $P(X=3)=\frac{1}{28}$，

$X=2$ 的情况有 $(2,2,5)$，$(2,5,2)$，$(5,2,2)$，$(2,3,4)$，$(2,4,3)$，$(3,2,4)$，$(3,4,2)$，$(4,2,3)$，$(4,3,2)$，即 $P(X=2)=\frac{9}{28}$，

所以 $P(X=1)=1-\frac{1}{28}-\frac{9}{28}=\frac{9}{14}$.

综上，$E(X)=3\times\frac{1}{28}+2\times\frac{9}{28}+1\times\frac{9}{14}=\frac{39}{28}$.

限时小卷 ▸ 3

1. **D** 【解析】本题考查百分位数.

将数据从小到大重新排列，为 29，32，34，36，39，47，48，50，66，78. $10\times75\%=7.5$，由百分位数的定义可知，这组数据的第 75 百分位数是重新排列后的第 8 个数据 50. 故选 D.

2. **D** 【解析】本题考查交集的概念、对数函数的定义域、解分式不等式.

由 $\frac{x+2}{x-2}\leqslant0$，得 $\begin{cases}(x+2)(x-2)\leqslant0,\\x-2\neq0,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant x<2$（注意：分母不为 0），又 $x\in\mathbf{N}$，则 $A=\{0,1\}$. 根据对数函数的定义域知 $B=\{x\mid x<1\}$，则 $A\cap B=\{0\}$. 故选 D.

3. **D** 【解析】本题考查利用和差角公式化简求值.

$\because\sin(\alpha-\beta)=n$，$\therefore\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=n$，

$\because\tan\alpha=3\tan\beta$，$\therefore\sin\alpha\cos\beta=3\cos\alpha\sin\beta$（关键：切化弦），

$\therefore\cos\alpha\sin\beta=\frac{n}{2}$，$\sin\alpha\cos\beta=\frac{3n}{2}$，$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=2n$，故选 D.

4. **B** 【解析】本题考查锥体体积的有关计算.

设圆锥的母线长为 l，则圆锥绕顶点 S 滚动所形成的圆的半径为 l，周长为 $2\pi l$.（关键点）

又圆锥底面半径为 5，则底面周长为 $2\pi\times5=10\pi$，故 $2\pi l=3\times10\pi$，解得 $l=15$，所以圆锥的高 $h=\sqrt{15^2-5^2}=10\sqrt{2}$，所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times10\sqrt{2}=\frac{250\sqrt{2}\pi}{3}$，故选 B.

5. **B** 【解析】本题考查弦长公式、点到直线的距离.

分析：首先求出圆心到直线 l 的距离，然后利用弦长公式求弦长.

因为圆 $O:x^2+y^2=9$，所以圆心坐标为 $(0,0)$，半径 $r=3$，圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{3}\times0-\sqrt{2}\times0+5|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2}}=\sqrt{5}$，

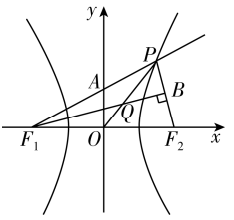
根据弦长公式，可得弦长 $L=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=4$. 故选 B.

6. **D** 【解析】本题考查由函数奇偶性求参数.

$f(x)=a^{a+x}-3a^{2-x}=a^a\cdot a^x-3a^2\cdot a^{-x}$，则 $f(-x)=a^{a-x}-3a^{2+x}=a^a\cdot a^{-x}-3a^2\cdot a^x$，因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，（关键点）即 $a^a\cdot a^{-x}-3a^2\cdot a^x=-a^a\cdot a^x+3a^2\cdot a^{-x}$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，整理得 $(a^a-3a^2)(a^x+a^{-x})=0$，结合 $a>1$，所以 $a^a-3a^2=0$，即 $a^{a-2}=3$，解得 $a=3$，所以 $f(x)=3^{3+x}-3\times3^{2-x}$，则 $f(2)=3^5-3\times3^0=240$. 故选 D.

7. **A** 【解析】本题考查双曲线的渐近线方程、焦点三角形问题.

不妨设 P 在第一象限，如图，设双曲线 C 的半焦距为 c，则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，∵ O 为 F_1F_2 的中点，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QP}$，∴ Q 为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心（提示：三角形的重心在顶点与对边中点连线上，且在靠近对边中点的三等分点处），又 Q 为线段 BF_1 上的一点，∴ B 为 PF_2 的中点.



又 $F_1B\perp PF_2$，∴ $|PF_1|=|F_1F_2|=2c$，由双曲线的定义可知，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，∴ $|PF_2|=2c-2a$.

∵ $|AF_1|=\frac{4}{3}|AP|$，∴ $|AF_1|=\frac{8c}{7}$，$|AP|=\frac{6c}{7}$，

∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAF_1$ 中，$\cos\angle AF_1O=\frac{|OF_1|}{|AF_1|}=\frac{c}{\frac{8}{7}c}=\frac{7}{8}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle F_2F_1P=\frac{(2c)^2+(2c)^2-(2c-2a)^2}{2\cdot 2c\cdot 2c}=\frac{7}{8}$，化简得 $3c^2-8ac+4a^2=0$，

∴ $c=2a$ 或 $c=\frac{2}{3}a$（舍去），∴ $b=\sqrt{3}a$. 故 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$. 故选 A.

8. B 【解析】本题考查三次函数的切线问题.

分析：先对曲线方程求导，求出切线斜率表达式，再用两直线夹角公式结合已知夹角列等式，分析并求出 k 的范围. 因为曲线 $C:y=x^3-kx$，所以 $y'=3x^2-k$，所以曲线 C 在原点 O 处的切线的斜率 $k_O=-k$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，则曲线 C 在 P，Q 两点处的切线的斜率分别为 $k_P=3x_1^2-k$，$k_Q=3x_2^2-k$，显然 $k_P>-k$，$k_Q>-k$. 因为三条切线两两夹角为 $\frac{\pi}{3}$，由两直线夹角公式可得 $\tan\frac{\pi}{3}=\left|\frac{k_P-k_O}{1+k_Pk_O}\right|=\sqrt{3}$，即 $\sqrt{3}=\left|\frac{(3x_1^2-k)-(-k)}{1+(-k)(3x_1^2-k)}\right|=\frac{3x_1^2}{|k^2+1-3kx_1^2|}$，化简整理得 $\sqrt{3}x_1^2=|k^2+1-3kx_1^2|$，同理可得 $\sqrt{3}x_2^2=|k^2+1-3kx_2^2|$，则 x_1，x_2 是 $\sqrt{3}x^2=|k^2+1-3kx^2|$（$x\neq 0$）的两个不同实根，将方程 $\sqrt{3}x^2=|k^2+1-3kx^2|$（$x\neq 0$）去掉绝对值得到 $x^2=\frac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}$，$x^2=\frac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}$，且 $x^2>0$. 因为 $k^2+1>0$，所以 $\begin{cases}3k-\sqrt{3}>0,\\3k+\sqrt{3}>0,\end{cases}$ 解得 $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此 k 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. 故选 B.

9. AC 【解析】本题考查三角函数的性质.

$f(x)=2\sin(x+\theta)-\cos(x+\theta)=\sqrt{5}\sin(x+\theta-\varphi)$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

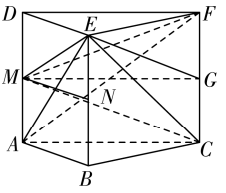
结合正弦函数性质可得，函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$，**A 正确**；

函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$，**B 错误**；

若 $\theta=\frac{\pi}{4}$，当 $f(x)$ 取得最大值时，$x+\frac{\pi}{4}-\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\varphi, k\in\mathbf{Z}$，则 $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，**C 正确**；

$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $f(x)=2\sin(x+\theta)-\cos(x+\theta)$ 为奇函数时，$f(0)=2\sin\theta-\cos\theta=0$，即 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，**D 错误**. 故选 AC.

10. BC 【解析】本题考查线线垂直的判定、三棱锥的体积、异面直线所成角、外接球问题.



如图，设 N,G 分别为 EB,FC 的中点，连接 MN,MG,EG,AF.

对于 A，在直三棱柱 $ABC-DEF$ 中，有 $AD\perp DE$，$BE\perp BC$，$AD\perp AC$. 因为 $AD=AB=BC=2$，所以 $CE^2=BE^2+BC^2=8$. 又 M 为 AD 的中点，所以 $ME^2=MD^2+DE^2=5$. 又 $AB\perp BC$，所以 $AC^2=AB^2+BC^2=8$，$MC^2=MA^2+AC^2=9$，则 $ME^2+CE^2\neq MC^2$，从而 ME 与 EC 不垂直，**A 不正确**.

对于 B，因为 $AB\perp BE$，$AB\perp BC$，$BE\cap BC=B$，$BE,BC\subset$ 平面 $BCFE$，所以 $AB\perp$ 平面 $BCFE$，又 $MN\parallel AB$，所以 $MN\perp$ 平面 $BCFE$，则 $V_{F-MEC}=V_{M-EFC}=\frac{1}{3}S_{\triangle EFC}\cdot MN=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$，**B 正确**.

对于 C，易知 $MG/\!/AC$，则异面直线 ME 与 AC 所成的角即为 $\angle EMG$. $MG^2=AC^2=8$，$ME^2=5$，$EG^2=EF^2+FG^2=5$，故 $\cos\angle EMG=\frac{ME^2+MG^2-EG^2}{2ME\cdot MG}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，**C 正确**.

对于 D，易知三棱锥 $E-ABC$ 的外接球即为直三棱柱 $ABC-DEF$ 的外接球，该外接球的直径 $AF=\sqrt{AC^2+CF^2}=2\sqrt{3}$，则三棱锥 $E-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=12\pi$，**D 不正确**. 故选 BC.

11. ABD 【解析】本题考查相互独立事件的概率乘法公式、贝叶斯公式.

对于 A，答对 8 道题，即有思路的题目和没有思路的题目全部答对，由相互独立事件的概率乘法公式得答对 8 道题的概率为 $1^5\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{100}$，故 **A 正确**.

对于 B，至少答对 7 道题，即在有思路的题目和没有思路的题目这 3 道题中答对 2 道或 3 道. 答对 3 道的概率，由 A 选项可知为 $\frac{9}{100}$. 答对 2 道分两种情况：①2 道有思路的题目全答对、1 道没有思路的题目答错，概率为 $1^5\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{27}{100}$；②1 道有思路的题目答对、1 道有思路的题目答错、1 道没有思路的题目答对，概率为 $1^5\times C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$. 因此至少答对 7 道题的概率为 $\frac{9+27+12}{100}=\frac{48}{100}=\frac{12}{25}$，故 **B 正确**.

对于 C，设答对题数为 $X=5+X_1+X_2+X_3$（X_1,X_2 分别为 2 道有思路的题答对的题数，X_3 为无思路的题答对的题数），由数学期望的性质得 $E(X)=5+E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=5+$

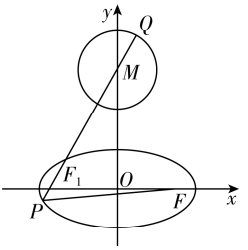
$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{129}{20}$，故 **C 错误**.

对于 D，设 $A=$“题目做对”，$B_1=$“题目完全掌握”，$B_2=$“题目有思路”，$B_3=$“题目没有思路”，则 $P(B_1)=\frac{5}{8}$，$P(A|B_1)=1$，$P(B_2)=\frac{1}{4}$，$P(A|B_2)=\frac{3}{5}$，$P(B_3)=\frac{1}{8}$，$P(A|B_3)=\frac{1}{4}$，根据贝叶斯公式 $P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}}{1\times\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}}=\frac{8}{43}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

12. 1 【解析】本题考查指数式与对数式的互化、对数的运算性质.

由 $3^m=\sqrt{2}$，可得 $m=\log_3\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_3 2$，又 $n=\log_3 6$，则 $n-2m=\log_3 6-2\times\frac{1}{2}\log_3 2=\log_3\frac{6}{2}=\log_3 3=1$.

13. $5+2\sqrt{3}$ 【解析】本题考查椭圆定义的应用.



由题得 $M(0,3)$，圆 M 的半径为 1，椭圆的左焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，长轴长 $2a=4$，则 $|PQ|+|PF|=|PQ|+4-|PF_1|\leqslant|PM|+1+4-|PF_1|=5+|PM|-|PF_1|\leqslant 5+|MF_1|=5+2\sqrt{3}$，当且仅当 P,F_1,M,Q 共线且点 F_1,M 在 P,Q 之间时 $|PQ|+|PF|$ 取得最大值 $5+2\sqrt{3}$.

14. $\frac{9}{8}$ 【解析】本题考查利用 a_n 与 S_n 的关系求通项、最值问题.

分析：借助 a_n 与 S_n 的关系和等比数列定义求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $f(n)$ 的表达式，再借助作商法判断 $f(n)$ 的单调性，进而得最值. 由 $a_{n+1}=S_n+2$，当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n=S_{n-1}+2$，所以 $a_{n+1}-a_n=S_n+2-(S_{n-1}+2)=S_n-S_{n-1}=a_n$，即 $a_{n+1}=2a_n$ $(n\geqslant 2)$，又因为 $a_1=2$，所以 $a_2=S_1+2=a_1+2=2a_1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=2^n$.

因为 $f(n)=\frac{n^2}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $f(n)=\frac{n^2}{2^n}$，则 $f(n+1)=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$. 易得 $f(n)>0$，令 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{n^2+2n+1}{2n^2}\geqslant 1$，即 $n^2-2n-1\leqslant 0$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，故 $n=1$ 或 $n=2$，即当 $n=1$ 或 $n=2$ 时，$f(n+1)\geqslant f(n)$，当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n+1)<f(n)$，所以 $f(n)$ 的最大值为 $f(3)=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$.

限时小卷 ▸ 4

1. B 【解析】本题考查复数的模.

由 $z+\frac{2}{z}=2$，得 $z^2+2=2z$，即 $z^2-2z+2=0$，解得 $z=1\pm i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$. 故选 B.

2. B 【解析】本题考查集合间的关系、集合中的含参问题.

若 $A=\{n\}$，则方程 $x^2+mx+9=0$ 有两个相等实数根，则 $\Delta=m^2-36=0$，解得 $m=\pm6$，所以 $\begin{cases}m=6,\\n=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-6,\\n=3,\end{cases}$ 此时 $mn=-18$；

若 $A=\{9,n\}$，则方程 $x^2+mx+9=0$ 有两个不等实数根（提示：集合中元素的互异性）且 9 是其中一个根，则 $9m+90=0$，解得 $m=-10$，所以方程为 $x^2-10x+9=0$，则 $n=1$，$mn=-10$（另解：利用一元二次方程根与系数的关系，得到 $9+n=-m$，$9n=9$，所以 $n=1$，$m=-10$，$mn=-10$）.

综上，$mn=-18$ 或 -10. 故选 B.

3. C 【解析】本题考查导数值的计算、奇函数性质的应用.

由已知可得 $f(-x)=-f(x)$，当 $x<-1$ 时，$-x>1$，$f(x)=-f(-x)=-(-x)^2=-x^2$，则 $f'(x)=-2x$，所以 $f'(-3)=-2\times(-3)=6$. 故选 C.

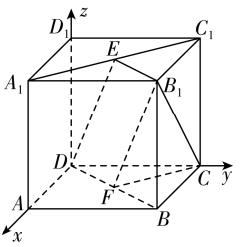
一题多解 由已知可得 $f(-x)=-f(x)$，两边取导数可得 $-f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(-3)=f'(3)$. 又当 $x>1$ 时，$f(x)=x^2$，$f'(x)=2x$，所以 $f'(-3)=f'(3)=2\times3=6$. 故选 C.

4. C 【解析】本题考查二项展开式的系数和问题.

由 $(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，令 $x=-1$，得 $2^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$，所以 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=32$. 故选 C.

5. D 【解析】本题考查异面直线所成角.

（向量法）如图，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $D(0,0,0)$，$E(1,1,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，$\overrightarrow{DE}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-2,0,-2)$. 设异面直线 DE 与 B_1C 所成角为 θ，$0°<\theta\leqslant90°$，则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\theta=30°$，∴ 异面直线 DE 与 B_1C 所成角的大小是 30°. 故选 D.



一题多解 **（几何法）**连接 BD，取 BD 的中点 F，连接 B_1F，FC，B_1E，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，易知 $DF\parallel B_1E$ 且 $DF=B_1E$，则四边形 DFB_1E 为平行四边形，∴ $B_1F\parallel DE$，∴ $\angle FB_1C$（或其补角）即为异面直线 DE 与 B_1C 所成角.

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2a$，则 $B_1F=\sqrt{6}a$，$FC=\sqrt{2}a$，$B_1C=2\sqrt{2}a$，在 $\triangle FB_1C$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle FB_1C=\dfrac{6a^2+8a^2-2a^2}{2\cdot2\sqrt{2}a\cdot\sqrt{6}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\angle FB_1C=30°$，∴ 异面直线 DE 与 B_1C 所成角的大小是 30°.

6. B 【解析】本题考查利用正、余弦定理解三角形.

由余弦定理得 $a\cos B+b\cos A=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$（快解：由射影定理可知 $a\cos B+b\cos A=c$），所以 $c=3c\tan C$，则 $\tan C=\dfrac{1}{3}$（另解：由正弦定理可得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=3\sin C\tan C$，即 $\sin(A+B)=\sin C=3\sin C\tan C$，又 $\sin C\neq0$，故 $\tan C=\dfrac{1}{3}$）. 根据 $\begin{cases}\sin^2C+\cos^2C=1,\\\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 结合 $C\in(0,\pi)$，解得 $\sin C=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. 由正弦定理，可知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R 满足

$\frac{c}{\sin C}=2R$，所以 $R=\frac{c}{2\sin C}=\frac{\sqrt{10}}{2\times\frac{\sqrt{10}}{10}}=5$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆面积 $S=\pi R^2=25\pi$. 故选 B.

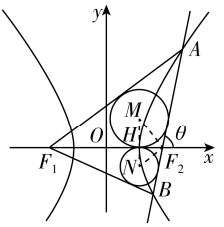
7. A 【解析】本题考查正切型函数的图象变换、奇偶性.

由题意可知，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{3}$，所以 $|\omega|=\frac{\pi}{T}=3$，又 $\omega>0$，所以 $\omega=3$，所以 $f(x)=\tan(3x+\varphi)$.

由将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象关于原点对称，可得函数 $y=\tan\left[3\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\varphi\right]=\tan\left(3x+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$ 为奇函数，所以 $\varphi+\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，又因为 $0\leqslant\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$，故选 A.

8. B 【解析】本题考查双曲线的焦点三角形的内切圆、离心率的取值范围问题.

如图所示，设 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆 M 与 x 轴相切于点 H，根据双曲线的定义及圆的切线长性质易知 $|AF_1|-|AF_2|=|F_1H|-|HF_2|=2a$，又 $|F_1H|+|HF_2|=2c$，$\therefore |F_1H|=c+a$，$|HF_2|=c-a$，$\therefore$ 切点 H 为双曲线的右顶点. 同理可得 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆 N 也与 x 轴相切于点 H，连接 MN，则 MN 垂直于 x 轴，且 $|MH|=r_1$，$|NH|=r_2$.



突破点

连接 MF_2，NF_2. 设直线 AB 的倾斜角为 θ，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$（提示：由 $3r_1=4r_2$，可知 $r_1>r_2$，数形结合可得 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$），则 $\angle HF_2B=\theta$，$\angle HF_2A=\pi-\theta$，$\therefore \angle HF_2N=\frac{\theta}{2}$，$\angle HF_2M=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$.

$r_1=|MH|=|HF_2|\tan\angle HF_2M=(c-a)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$，$r_2=|NH|=|HF_2|\tan\angle HF_2N=(c-a)\tan\frac{\theta}{2}$，又 $3r_1=4r_2$，$\therefore 3(c-a)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=4(c-a)\tan\frac{\theta}{2}$，$\therefore \frac{3}{4}=\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$，解得 $\cos\theta=\frac{1}{7}$，$\therefore \sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\therefore \tan\theta=4\sqrt{3}$.

又直线 l 交双曲线 E 的右支于 A，B 两点，$\therefore$ 直线 AB 的斜率 $k=\tan\theta=4\sqrt{3}>\frac{b}{a}$（提示：过双曲线焦点的直线与双曲线的一支有两个交点，则直线的斜率不存在或其绝对值大于双曲线渐近线的斜率绝对值），$\therefore$ 双曲线的离心率 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}<\sqrt{1+(4\sqrt{3})^2}=7$，又 $e>1$，$\therefore$ 双曲线 E 的离心率的取值范围为 $(1,7)$. 故选 B.

拓展结论　双曲线中一条焦点弦和两条焦半径所构成的两个焦点三角形的内切圆问题

(1) 两个内切圆与实轴所在直线的切点均在双曲线顶点处；
(2) 两内切圆圆心连线与实轴垂直；
(3) 两圆心的距离以及两圆半径的比值都与焦点弦所在直线的倾斜角有关.

9. ABC 【解析】本题考查函数图象的对称性与函数的单调性.

$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}(x\neq1)$.

对于 A，$y=\frac{1}{x}$ 的图象的对称中心为 $(0,0)$，将 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到 $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$ 的图象，故 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1,2)$，故 **A 正确**（另解：直接验证，$f(2-x)+f(x)=\frac{3-2x}{1-x}+\frac{2x-1}{x-1}=4$，可得 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1,2)$）；

对于 B，任取 $f(x)$ 图象上一点 (x,y)，$x\neq1$，$y\neq2$，设点 (x,y) 关于直线 $y=-x+3$ 的对称点为 (a,b)，则 $\begin{cases}\frac{b-y}{a-x}=1,\\ \frac{y+b}{2}=-\frac{x+a}{2}+3,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=3-y,\\ b=3-x,\end{cases}$ 故点 (x,y) 关于直线 $y=-x+3$ 的对称点为 $(3-y,3-x)$，$3-y\neq1$，$3-x\neq2$，

而 $f(3-y)=2+\frac{1}{(3-y)-1}=2+\frac{1}{2-y}=2+\frac{1}{2-\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)}=3-x$，因此点 $(3-y,3-x)$ 也在 $f(x)$ 的图象上，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=-x+3$ 对称，故 **B 正确**；

对于 C，因为 $\frac{1}{x-1}\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以 $2+\frac{1}{x-1}\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，即 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，故 **C 正确**；

对于 D，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，它仅在 $(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$ 上分别单调递减，不能说在整个定义域上单调递减，故 **D 错误**（快解：$f(2)=3$，$f(0)=1<3$，故 $f(x)$ 不在整个定义域上单调递减）. 故选 ABC.

10. **AB** 【解析】本题考查等差数列与基本不等式的综合.

等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0$，公差 $d>0$，所以 $a_n>0$，由题可知，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5$，所以 $a_1a_3a_5=\frac{1}{3}S_9=3a_5$，故 $a_1a_3=3$，即 $a_1(a_1+2d)=3$.

当 $a_1=1$ 时，解得 $d=1$，故 **A 正确**；

若 $a_1>d$，则 $0<d+2d<a_1+2d$，所以 $d(d+2d)<a_1(a_1+2d)=3$，即 $d^2<1$，又 $d>0$，故 $0<d<1$，故 **B 正确**；

由 $a_1(a_1+2d)=3$，得 $d=\frac{3}{2a_1}-\frac{a_1}{2}$，所以 $a_1+a_2=a_1+a_1+d=2a_1+\frac{3}{2a_1}-\frac{a_1}{2}=\frac{3a_1}{2}+\frac{3}{2a_1}\geqslant2\sqrt{\frac{3a_1}{2}\cdot\frac{3}{2a_1}}=3$，当且仅当 $a_1=1$ 时，等号成立，故 a_1+a_2 的最小值为 3，故 **C 错误**；

由 $a_1(a_1+2d)=3(a_1>0)$，得 $2d=\frac{3}{a_1}-a_1>0$，即 $3-a_1^2>0$，解得 $0<a_1<\sqrt{3}$，故 **D 错误**. 故选 AB.

11. **ACD** 【解析】本题考查椭圆中焦点三角形的相关问题.

由题意，椭圆的长半轴长 $a=5$，短半轴长 $b=4$，半焦距 $c=3$，故 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$.

对于 A，分析：利用椭圆焦点三角形的性质计算面积的最大值. 当 P 为短轴顶点时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，此时面积为 $\frac{1}{2}\times2c\times b=bc=12$，故 **A 正确**.

对于 B，因为 $|F_1O|=|F_2O|$，所以若 $\angle F_1PF_2$ 的平分线过椭圆的中心 O，则此时 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形，$|PF_1|=|PF_2|$，故此时 P 为短轴顶点，当 P 不为短轴顶点时，$\angle F_1PF_2$ 的平分线不过椭圆的中心，故 **B 错误**.

对于 C，分析：利用椭圆的定义结合余弦定理求解. 因为

$\tan\angle PF_1F_2=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{2}{3}$，由余弦定理可得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_2F_1|^2-2|PF_1||F_2F_1|\cos\angle PF_1F_2$，故 $|PF_2|^2=(10-|PF_2|)^2+36-2\times6\times(10-|PF_2|)\times\frac{2}{3}$，解得 $|PF_2|=\frac{14}{3}$，所以 $|PF_1|=\frac{16}{3}$，故 $|PF_1|:|PF_2|=8:7$，故 **C 正确**.

对于 D，由题知 $|PF_2|+|PF_1|=10$，且 $|PF_2|^2+|PF_1|^2-2|PF_2||PF_1|\cos\theta=36$，故 $(|PF_2|+|PF_1|)^2-2|PF_2||PF_1|\cdot\cos\theta-2|PF_2||PF_1|=36$，

所以 $2(1+\cos\theta)=\frac{64}{|PF_1||PF_2|}=\frac{64}{(10-|PF_2|)|PF_2|}=\frac{64}{10|PF_2|-|PF_2|^2}=\frac{64}{-(|PF_2|-5)^2+25}$，

又 $2\leqslant|PF_2|\leqslant8$，所以 $16\leqslant-(|PF_2|-5)^2+25\leqslant25$，所以 $\frac{64}{25}\leqslant2(1+\cos\theta)\leqslant4$，即 $\frac{7}{25}\leqslant\cos\theta\leqslant1$，所以 $\frac{7}{25}\leqslant\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}\leqslant1$，所以 $\frac{7}{25}\leqslant\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\leqslant1$，因为 $\frac{7}{25}<\frac{3}{5}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}<1$，所以 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$ 满足该不等式，故椭圆 C 上存在点 P 使得 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，故 **D 正确**. 故选 ACD.



30 s 速解　西安交通大学——王紫蓬

（焦点三角形面积公式）对于 D，若椭圆 C 上存在点 P 使得 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，则 F_1,P,F_2 不共线，由焦点三角形面积公式知，$\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=16\tan\frac{\theta}{2}$，由选项 A 知 $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 12，所以 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$，结合几何特征知 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{3}{4}\right]$，由 $\frac{1}{2}\in\left(0,\frac{3}{4}\right]$ 知存在符合题意的点 P，故 **D 正确**.

12. $\sqrt{2}+1$　**【解析】**本题考查平面向量的数量积的计算.

由题意可知 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OF}|=1$，$\angle AOD=\angle AOF=\frac{3\pi}{4}$，$\angle DOF=\frac{\pi}{2}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}=1\times1\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OF}=0$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}^2=\sqrt{2}+1$.

13. $\frac{26}{5}$　**【解析】**本题考查样本数据的数字特征问题.

不妨设这 5 个样本数据分别为 $a,b,c,d,e(a<b<c<d<e)$，且 $a,b,c,d,e\in\mathbf{N}$，

依题意有 $a+b+c+d+e=25$，易知 $e\geqslant d+1\geqslant c+2\geqslant b+3\geqslant a+4$，

关键点

所以 $5a+10\leqslant a+b+c+d+e\leqslant5e-10$，则 $e\geqslant7$，$a\leqslant3$，又 $e-a\leqslant6$，所以 a,b,c,d,e 的值可能有三种情况：

①2，3，5，7，8，此时方差为 $\frac{1}{5}\times[(2-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+$

$(7-5)^2+(8-5)^2]=\frac{26}{5}$;

②2,4,5,6,8,此时方差为$\frac{1}{5}\times[(2-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2]=4$;

③3,4,5,6,7,此时方差为$\frac{1}{5}\times[(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2]=2$.

所以当 a,b,c,d,e 的取值分别为 2,3,5,7,8 时,方差最大,最大值为$\frac{26}{5}$.

14. 1 【解析】本题考查根据函数的零点个数求参数问题.

分析:将所研究的函数拆分为一个一元二次函数与一个正弦型函数,然后分 $a>1$ 与 $a=1$ 讨论算出符合条件的 a. 根据题意,$f(x)=0$ 等价于 $x^2-2x+a=0$ 或 $\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)=0$,对于 $x^2-2x+a=0$,$\Delta=(-2)^2-4a=4-4a$,又 $a\in\mathbf{N}^*$,故可分以下两种情况(易错:判断判别式的符号时需要讨论 a,题目条件 $a\in\mathbf{N}^*$ 易被忽略,导致讨论复杂化).

①当 $a>1$ 时,$y=x^2-2x+a$ 在 $[0,4]$ 上没有零点,则 $y=\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,4]$ 上应有 2 个零点,又 $ax-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},4a-\frac{\pi}{3}\right]$,可知 $\pi\leqslant 4a-\frac{\pi}{3}<2\pi$,解得 $\frac{\pi}{3}\leqslant a<\frac{7\pi}{12}$,又 $a>1$ 且 $a\in\mathbf{N}^*$,可知此时无解;

②当 $a=1$ 时,$y=x^2-2x+a$ 在 $[0,4]$ 上有唯一零点 1,此时 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,4]$ 上有 1 个零点 $\frac{\pi}{3}$,则 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上恰有 2 个零点,符合题意.

综上所述,符合条件的只有 $a=1$,即符合条件的 a 的个数为 1.

限时小卷 ▸ 5

1. D 【解析】本题考查根据 Venn 图求集合.

由题图可知阴影部分表示的集合为 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A$. 又 $A=\{x\mid x^2>4\}=\{x\mid x>2 \text{ 或 } x<-2\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right\}=\{x\mid x>1\}$,故 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=\{x\mid x\leqslant 1\}\cap\{x\mid x>2 \text{ 或 } x<-2\}=\{x\mid x<-2\}$,故选 D.

2. B 【解析】本题考查抛物线的焦点到准线的距离.

设抛物线的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$,由题意可得 $2p=1$,得 $p=\frac{1}{2}$,所以 $F\left(\frac{1}{4},0\right)$,$l:x=-\frac{1}{4}$,所以 F 到 l 的距离为 $\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$. 故选 B.

3. A 【解析】本题考查分段函数求值.

因为当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=3^{x+4}-1$,所以 $f(-2)=3^{-2+4}-1=8$. 因为当 $x>0$ 时,$f(x)=\log_4 x$,所以 $f(8)=\log_4 8=\frac{3}{2}$,即 $f(f(-2))=\frac{3}{2}$.

4. A 【解析】本题考查等比数列基本量的计算.

$\because\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等比数列,首项为 a_1,第二项为 $\frac{S_2}{2}$,第三项 $\frac{S_3}{3}=\frac{S_2+a_3}{3}=\frac{S_2+2S_2}{3}=S_2$,

$\therefore\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公比为 2,$\therefore S_n=na_1\cdot 2^{n-1}$,$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-$

$S_{n-1}=(n+1)a_1\cdot 2^{n-2}$，$\therefore \dfrac{a_9}{a_4}=\dfrac{(9+1)a_1\cdot 2^7}{(4+1)a_1\cdot 2^2}=64$. 故选 A.

5. C 【解析】本题考查样本的数字特征.

对于 A，若甲的 5 个点数分别是 1，1，2，5，6，则平均数为 3，中位数为 2，但出现了点数 6，故 **A 错误**；

对于 B，若乙的 5 个点数分别是 2，2，3，4，6，则中位数为 3，众数为 2，但出现了点数 6，故 **B 错误**；

对于 C，若丙的 5 个点数的平均数为 2，又包含点数 6，则方差 $s^2>\dfrac{1}{5}(6-2)^2=3.2>2.4$，因此不可能出现点数 6，故 **C 正确**；

对于 D，若丁的 5 个点数分别是 2，3，3，6，6，则中位数为 3，平均数为 4，方差为 $\dfrac{(2-4)^2+(3-4)^2+(3-4)^2+(6-4)^2+(6-4)^2}{5}=2.8$，但出现了点数 6，故 **D 错误**. 故选 C.

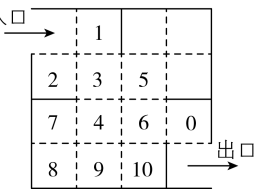
6. C 【解析】本题考查向量的数量积、模.

由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}_1$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_1=|\boldsymbol{e}_1|^2+\lambda\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，又 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，$\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $1^2+\lambda\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$，解得 $\lambda=2$，所以 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

$|\boldsymbol{a}|^2=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)^2=|\boldsymbol{e}_1|^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4|\boldsymbol{e}_2|^2=1^2+4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4\times1^2=3$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$.

7. B 【解析】本题考查列举法、分步乘法计数原理.

如图，将所有可能进入的方格进行编号.



易知一定会经过 3 号方格，而从入口到 3 号方格有“1-3”“2-3”2 种走法，因此只需考虑从 3 号方格到出口的走法. 又只能经过“6-0”才能抵达出口，故只需考虑从 3 号方格到 6 号方格的走法.

走法如下：

①3-5-6，②3-4-6，③3-4-9-10-6，④3-4-7-8-9-10-6.

故不同的走法共 4×2=8（种）. 故选 B.

8. D 【解析】本题考查函数的性质.

分析：根据给定条件，确定 $f(x)$ 的奇偶性并求出 m 的值，再逐项判断即可.

函数 $f(x)=e^{|x+1-m|}$ 的定义域为 **R**，由 $f(1-x)=f(x-1)$，得 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$e^{|-x+1-m|}=e^{|x+1-m|}$，即 $|x-1+m|=|x+1-m|$ 恒成立，因为 $x-1+m=-x-1+m$ 仅在 $x=0$ 时成立，所以当 $x\neq0$ 时，$x-1+m=x+1-m$ 恒成立，解得 $m=1$，故 $f(x)=e^{|x|}$.

关键点

对于 A，B，$f(0)=1$，$f(m)=e$，故 $f(x)\geqslant f(m)$，$f(x-1)\geqslant f(m)$ 均不正确，**A，B 错误**；

对于 C，当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)-x=e^{-x}-x>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)-x=e^x-x$，设 $g(x)=e^x-x(x>0)$，求导得 $g'(x)=e^x-1>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)=1>0$，故函数 $f(x)-x$ 无零点，**C 错误**；

对于 D，函数 $f(x)-m=e^{|x|}-1$ 有唯一零点 $x=0$，**D 正确**. 故选 D.

9. BCD 【解析】本题考查复数的运算.

设 $\omega=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，代入 $z\oplus\omega=10$，即 $(1-2i)(a-bi)+(1+2i)(a+bi)=10$，化简得 $a-2b=5$.

对于 A，$3-2=1$，不满足 $a-2b=5$，故 **A 错误**；

对于 B，$|\omega|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5b^2+20b+25}=\sqrt{5}\times\sqrt{(b+2)^2+1}$，故 $|\omega|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$，故 **B 正确**；

对于 C，$a-2b=5\Rightarrow b=\frac{1}{2}a-\frac{5}{2}$，所以 ω 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(a,\frac{a-5}{2}\right)$，当 $\frac{a-5}{2}>0$ 时，$a>5$，所以该点不可能位于第二象限，故 **C 正确**；

对于 D，$z\omega=(1+2\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})=a-2b+(2a+b)\mathrm{i}$，实部为 $a-2b$，因为 $a-2b=5$，故实部为 5，故 **D 正确**. 故选 BCD.

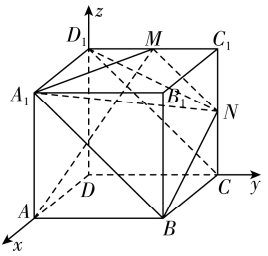
10. **BC** 【解析】本题考查空间中线、面位置关系的判断以及点到直线的距离.

选项 A，连接 MN，D_1C，因为 M 为棱 C_1D_1 的中点，N 为棱 CC_1 的中点，所以 $MN/\!/D_1C/\!/A_1B$，所以 M，N，A_1，B 四点共面，所以直线 A_1M 和直线 BN 不是异面直线，**A 错误**.

选项 B，以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，易得 $A(2,0,0)$，$M(0,1,2)$，$B(2,2,0)$，则 $\overrightarrow{AM}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，因为 $\cos\angle MAB=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{2}{3\times2}=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\angle MAB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，点 B 到直线 AM 的距离为 $|\overrightarrow{AB}|\times\sin\angle MAB=2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，**B 正确**.

选项 C，设 $M(0,x,2)$，$0\leqslant x\leqslant2$，又 $D_1(0,0,2)$，$N(0,2,1)$，所以 $\overrightarrow{D_1N}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{AM}=(-2,x,2)$. 若 $D_1N\perp AM$，则 $\overrightarrow{D_1N}\cdot\overrightarrow{AM}=2x-2=0$，解得 $x=1$，即存在 $M(0,1,2)$ 符合题意，**C 正确**.

选项 D，因为 $A_1(2,0,2)$，所以 $\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{A_1N}=(-2,2,-1)$，设平面 A_1BN 的法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$ 且 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0$，得 $2b-2c=0$ 且 $-2a+2b-c=0$，令 $a=1$ 可得平面 A_1BN 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$，若 $AM/\!/$平面 A_1BN，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=-2+2a+4=0$，解得 $a=-1$，不满足 $0\leqslant a\leqslant2$，即不存在符合题意的点 M，**D 错误**. 故选 BC.



11. **ABD** 【解析】本题考查直线与双曲线的位置关系、双曲线的离心率

对于 A，双曲线 $C_1:x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，因为 $k\neq\pm\sqrt{2}$，双曲线 $C_1:x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 与直线 $l:y=kx+m$（$k\neq\pm\sqrt{2}$）有唯一公共点 M，所以直线 l 与双曲线 C_1 相切. 联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1,\\y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y 得 $(2-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0$①，由 $\Delta=4k^2m^2+4(2-k^2)(m^2+2)=0$，化简得 $k^2=m^2+2$，故 **A 正确**.

对于 B，易知 $m\neq0$，$k\neq0$，将 $k^2=m^2+2$ 代入①式，得 $m^2x^2+2kmx+k^2=0$，即 $(mx+k)^2=0$，解得 $x=-\frac{k}{m}$，代入直线 l 的方程得 $y=m-\frac{k^2}{m}=-\frac{2}{m}$，即 $M\left(-\frac{k}{m},-\frac{2}{m}\right)$，由 $l\perp l_1$，得直线 l_1 的方程为 $y+\frac{2}{m}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{m}\right)$，即 $y=-\frac{1}{k}x-\frac{3}{m}$.

易知 $F_2(\sqrt{3},0)$，设 $N(x_0,y_0)$，由点 F_2，N 关于直线 l_1 对称，得 $\begin{cases}\dfrac{y_0-0}{x_0-\sqrt{3}}\cdot\left(-\dfrac{1}{k}\right)=-1,\\ \dfrac{y_0+0}{2}=-\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{x_0+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{m},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{\sqrt{3}k^2m-\sqrt{3}m-6k}{(k^2+1)m},\\ y_0=\dfrac{-2\sqrt{3}km-6k^2}{(k^2+1)m},\end{cases}$ 即 $N\left(\dfrac{\sqrt{3}k^2m-\sqrt{3}m-6k}{(k^2+1)m},\dfrac{-2\sqrt{3}km-6k^2}{(k^2+1)m}\right)$，

又 $F_1(-\sqrt{3},0)$，所以 $k_{MF_1}=\dfrac{-\dfrac{2}{m}}{-\dfrac{k}{m}+\sqrt{3}}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}m-k}$，

$k_{NF_1}=\dfrac{\dfrac{-2\sqrt{3}km-6k^2}{(k^2+1)m}}{\dfrac{\sqrt{3}k^2m-\sqrt{3}m-6k}{(k^2+1)m}+\sqrt{3}}=\dfrac{-km-\sqrt{3}k^2}{k^2m-\sqrt{3}k}=\dfrac{-m-\sqrt{3}k}{km-\sqrt{3}}$，$\dfrac{-m-\sqrt{3}k}{km-\sqrt{3}}-\dfrac{-2}{\sqrt{3}m-k}=\dfrac{-\sqrt{3}m^2+\sqrt{3}k^2-2\sqrt{3}}{(km-\sqrt{3})(\sqrt{3}m-k)}=0$，故 $k_{MF_1}=k_{NF_1}$，所以 M，N，F_1 三点共线，故 **B 正确**.

对于 C，由选项 B 知，l_1 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x-\dfrac{3}{m}$，易知 $A\left(-\dfrac{3k}{m},0\right)$，$B\left(0,-\dfrac{3}{m}\right)$，当 $k=2$ 时，$m=\pm\sqrt{2}$，不妨取 $m=\sqrt{2}$，则 $A(-3\sqrt{2},0)$，$B\left(0,-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，此时 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9}{2}$，故 **C 错误**.

对于 D，由选项 C 知，$P\left(-\dfrac{3k}{m},-\dfrac{3}{m}\right)$，得 $x_1^2=\dfrac{9k^2}{m^2}=9+2\cdot\dfrac{9}{m^2}$，$y_1^2=\dfrac{9}{m^2}$，所以 $x_1^2=9+2y_1^2$，整理得 $\dfrac{x_1^2}{9}-\dfrac{y_1^2}{\frac{9}{2}}=1$，故点 P 在双曲线上，该双曲线的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.



1 min 速解　西安交通大学——王紫蓬

（切线方程）对于 A，双曲线 $C_1:x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，因为 $k\neq\pm\sqrt{2}$，双曲线 $C_1:x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 与直线 $l:y=kx+m(k\neq\pm\sqrt{2})$ 有唯一公共点 M，所以直线 l 与双曲线 C_1 相切. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 在点 (x_T,y_T) 处的切线方程为 $\dfrac{x_Tx}{a^2}-\dfrac{y_Ty}{b^2}=1$，设 $M(x_0,y_0)$，则 $l:y=\dfrac{2x_0}{y_0}x-\dfrac{2}{y_0}$，$k=\dfrac{2x_0}{y_0}$，$m=-\dfrac{2}{y_0}$，由 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{2}=1$，可得 $k^2=m^2+2$，故 **A 正确**.

（双曲线的光学性质）对于 B，利用双曲线的光学性质：从双曲线的一支的焦点发出的光线，经该支双曲线反射后，反射光线的反向延长线会经过双曲线的另一支的焦点. MF_2 可视为从 F_2 发出的光线所在直线，其与反射光线所在直线的夹角被直线 l 平分，由直线 l_1 与直线 l 垂直，F_2 和 N 关于 l_1 对称，可知直线 MN 为反射光线所在直线，F_1 在此直线上，故 **B 正确**.

12. $y=-3x+3$ 【解析】本题考查曲线在某点处的切线方程.

由 $y=\ln x-2x^2+2$，可得 $y'=\frac{1}{x}-4x$，当 $x=1$ 时，$y'=-3$，则曲线 $y=\ln x-2x^2+2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=-3x+3$.

13. $2\sqrt{3}$ 【解析】本题考查三角形面积公式的应用.

分析：根据题干，发现 $\triangle ABC$ 被分成三个小三角形，且分别有一个角与已知条件对应，则可将面积也分为三部分研究.

记 $S_{\triangle ABC}=3S$，由 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$ 知 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADE}=S_{\triangle AEC}=S$，则 $AB\cdot AD\cdot\sin\alpha_1=AD\cdot AE\cdot\sin\alpha_2=AE\cdot AC\cdot\sin\alpha_3=2S$，$AB\cdot AC\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=6S$，

则 $\frac{AD\cdot AE\cdot\sin\alpha_2\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\frac{2\pi}{3}}{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha_1\cdot AE\cdot AC\cdot\sin\alpha_3}=\frac{\sin\alpha_2\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}=\frac{2S\cdot 6S}{2S\cdot 2S}=3$，所以 $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}=2\sqrt{3}$.

14. 8 【解析】本题考查三次函数图象的对称性、等差数列的性质.

依题意，$g'(x)=3x^2-12x$，$g''(x)=6x-12$，令 $g''(x)=0$，解得 $x=2$.

又 $g(2)=1$，所以 $g(x)$ 图象的对称中心为点 $(2,1)$，即 $g(x)+g(4-x)=2$.

由于 $a_n=-2n+11$，因此数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1+a_8=a_2+a_7=a_3+a_6=a_4+a_5=4$（提示：等差数列的性质）.

$g(a_i)+g(a_{9-i})=g(a_i)+g(4-a_i)=2$，$i=1,2,3,4$，

关键点

所以 $\sum_{i=1}^{8}g(a_i)=2\times4=8$.

限时小卷 ▸ 6

1. A 【解析】本题考查复数的乘方、复数的除法运算.

$\because z(1-i)=1+i$，$\therefore z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$，$\therefore z^{10}=(i^2)^5=-1$.

故选 A.

2. C 【解析】本题考查解分式不等式、集合的交集运算.

由题意可知，集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<4\}=\{0,1,2,3\}$，不等式 $\frac{x+1}{3-x}>0$ 可化为 $(x+1)(3-x)>0$，解得 $-1<x<3$，则 $B=\{x\mid -1<x<3\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$. 故选 C.

3. A 【解析】本题考查根据向量垂直求参数.

由平面向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,3)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m\times2+1\times3=0$，解得 $m=-\frac{3}{2}$.

4. A 【解析】本题考查充分、必要条件的判断，直线与抛物线交点个数的判断.

若直线 $y=kx+1$ 与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点，则方程 $(kx+1)^2=2x$ 只有一个解，即方程 $k^2x^2+(2k-2)x+1=0$ 只有一个解（提示：需讨论二次项系数是否为 0）.

当 $k=0$ 时，$-2x+1=0$ 恒有一个解；

当 $k\neq0$ 时，令 $(2k-2)^2-4k^2=0$，得 $k=\frac{1}{2}$，此时方程只有一个解.

由直线 $y=kx+1$ 与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点，可得 $k=0$ 或 $k=\frac{1}{2}$，故“$k=\frac{1}{2}$”是“直线 $y=kx+1$ 与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点”的充分不必要条件，故选 A.

5. C 【解析】本题考查残差的计算、根据经验回归方程进行

数据估计.

设新样本的均值为 $\overline{x'}$，$\overline{y'}$，$y_i(i=1,2,3,\cdots,6)$ 的均值为 $\overline{y}$，则 $\overline{y}=2\times6+0.5=12.5$，$\overline{x'}=\dfrac{6\overline{x}-1+5}{8}=5$，$\overline{y'}=\dfrac{6\overline{y}+3+10}{8}=11$，因为新样本的经验回归直线过点 $(5,11)$，所以 $11=2.5\times5+\hat{b}$，解得 $\hat{b}=-1.5$，所以新样本的经验回归方程为 $\hat{y}=2.5x-1.5$，预测值 $\hat{y}=2.5\times4-1.5=8.5$，所以残差为 $9-8.5=0.5$. 故选 C.

关键点

6. B 【解析】本题考查离散型随机变量的数学期望.

由题可知，$X\sim B\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$，$X$ 的可能取值为 0，1，2，3，概率分别为 $P(X=0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，$P(X=2)=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$，$P(X=3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$.

关键点

当 $X\leqslant1$ 时，$Y=1$，当 $X\geqslant2$ 时，$Y=X$，则 $E(Y)=1\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)=1\times\dfrac{1}{8}+1\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{3}{8}+3\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{13}{8}$. 故选 B.

7. A 【解析】本题考查根据分段函数的值域求参数的取值范围.

分析：求出 $f(x)=x^3-3x+2$ 的单调性，通过对参数分类讨论得到结果.

对于 $f(x)=x^3-3x+2$，$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减.

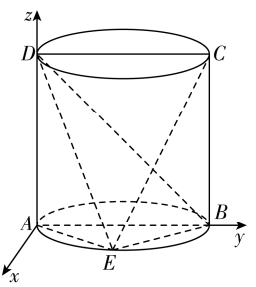
若 $a<0$，则当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，不合题意；

若 $a=0$，则 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2,x\geqslant0,\\1,x<0,\end{cases}$ $f(1)=0$，则 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，符合题意；

若 $a>0$，则当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$，在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，要使 $f(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$，则要求 $f(x)$ 的最小值为 0，则由 $-a^2+1\geqslant0$，得 $0<a\leqslant1$，此时 $f(x)=x^3-3x+2$ 在 $[a,+\infty)$ 上有最小值 $f(1)=0$，符合题意. 综上，$a\in[0,1]$，故选 A.

8. D 【解析】本题考查空间距离的求解.

分析：当三棱锥 $D-ABE$ 体积最大时，$\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 的面积最大，可得点 E 是弧 AB 的中点，建立空间直角坐标系，利用点到平面的距离公式计算. 因为三棱锥 $D-ABE$ 的高即为圆柱的高 $AD=4$，所以当三棱锥 $D-ABE$ 体积最大时，$\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 的面积最大，此时点 E 是弧 AB 的中点，$\triangle ABE$ 是等腰直角三角形. 以 A 为坐标原点，AB，AD 所在直线分别为 y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，可得 $E(2,2,0)$，$B(0,4,0)$，$D(0,0,4)$，$C(0,4,4)$，$\overrightarrow{DB}=(0,4,-4)$，$\overrightarrow{DE}=(2,2,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(0,0,4)$.



设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4y-4z=0,\\2x+2y-4z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=1$，$x=1$，所以

$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，

所以点 C 到平面 BDE 的距离 $h=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

（等体积转化）易知 $AD\perp$ 平面 ABE，因为 $BE\subset$ 平面 ABE，所以 $AD\perp BE$，又 $AE\perp BE$，$AD\cap AE=A$，AD，$AE\subset$ 平面 ADE，则 $BE\perp$ 平面 ADE，由 $DE\subset$ 平面 ADE 知 $DE\perp BE$. 当三棱锥 $D-ABE$ 体积最大时，E 为弧 AB 的中点，$BE=AE=2\sqrt{2}$，$DE=\sqrt{4^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$，则 $\triangle BED$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=4\sqrt{3}$. 连接 CE，因为 $V_{C-BDE}=V_{E-BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times4\times2=\dfrac{16}{3}$，所以点 C 到平面 BDE 的距离 $h=\dfrac{\frac{16}{3}\times3}{4\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

9. **AB**　【解析】本题考查根据三角函数的部分图象求解析式、正弦型函数的性质.

对于 A，由题图可知，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\left[\dfrac{5\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]=\pi$，故 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，**A 正确**；

对于 B，由题图可知函数 $f(x)$ 在 $x=-\dfrac{\pi}{12}$ 附近单调递增，且 $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，故 $\varphi-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

因为 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\times\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{3\pi}{2}=-2=f(x)_{\min}$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 对称，**B 正确**；

对于 C，当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{12}\right]$ 时，$\dfrac{\pi}{2}\leqslant2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant2\pi$，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{12}\right]$ 上不单调，**C 错误**；

对于 D，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{7\pi}{12}$ 个单位长度后得到函数 $h(x)$ 的图象，则 $h(x)=2\sin\left[2\left(x-\dfrac{7\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin(2x-\pi)=-2\sin2x$，函数 $h(x)$ 为奇函数，**D 错误**. 故选 AB.

10. **ACD**　【解析】本题考查抽象函数的奇偶性、周期性、图象对称性.

对于 A，因为 $g(2x+1)$ 为奇函数，所以 $g(-2x+1)=-g(2x+1)$，则 $g(1+x)=-g(1-x)$，故 **A 正确**；

对于 B，由 A 项可知，$g(1+x)+g(1-x)=0$，又 $g(x)=f(x-1)+2$，所以 $f(x)+2+f(-x)+2=0$，即 $f(x)+f(-x)=-4$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,-2)$ 对称，又由 $f(x-1)$ 为偶函数知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，所以 $f(x)$ 的一个周期为 $4\times|0-(-1)|=4$，且图象关于点 $(2,-2)$ 对称，不一定关于点 $(2,2)$ 对称，故 **B 错误**；

对于 C，由 A 项得 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，即 $g(1)=$

$0, g(3)=-g(-1), g(4)=-g(-2)$，因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，所以 $f(-x-2)=f(x)$，又 $g(x)=f(x-1)+2$，所以 $f(x)=g(x+1)-2$，所以 $g(-x-2+1)-2=g(x+1)-2$，即 $g(-x-1)=g(x+1)$，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称，即 $g(-x)=g(x)$，因此 $g(3)=-g(-1)=-g(1)=0, g(4)=-g(-2)=-g(2)$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)=g(2)-2+g(3)-2+g(4)-2=g(2)-2+0-2-g(2)-2=-6$，故 **C 正确**；

对于 D，易知 4 也是 $g(x)$ 的一个周期，所以 $g(2\,026)=g(4\times506+2)=g(2)$，又因为 $f(1)=3$，所以 $g(2)=f(1)+2=5$，所以 $g(2\,026)=g(2)=5$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

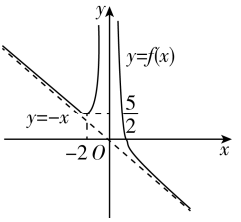
11. **ACD** 【解析】本题考查由方程研究新曲线的性质、利用导数求函数的最值.

对于 A，分析：通过分析 $x<0, y<0$ 时 $x^4(x+y)$ 的取值情况，判断曲线是否经过第三象限. 当 $x<0, y<0$ 时，$x^4>0, x+y<0$，$x^4(x+y)<0$，而曲线方程为 $x^4(x+y)=8$，所以曲线 Ω 不经过第三象限，**A 正确**.

对于 C，分析：对由曲线方程变形得到的函数求导，根据导数判断函数单调性，进而求出函数的最小值. 由 $x^4(x+y)=8$，可得 $y=\frac{8}{x^4}-x$，设 $f(x)=\frac{8}{x^4}-x\,(x<0)$，则 $f'(x)=\frac{-32}{x^5}-1=-\frac{32+x^5}{x^5}$.

令 $f'(x)=-\frac{32+x^5}{x^5}=0$，则 $32+x^5=0$，解得 $x=-2$. 当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$32+x^5<0, x^5<0$，所以 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(-2,0)$ 时，$32+x^5>0, x^5<0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. 则 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得最小值，$f(-2)=\frac{8}{(-2)^4}-(-2)=\frac{8}{16}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$，**C 正确**.

对于 B，分析：根据曲线方程找出其渐近线方程. 由 $x^4(x+y)=8$ 知当 $x\to0$ 时，$x+y\to+\infty$，所以 $x=0$ 是曲线 Ω 的渐近线方程；将 $x^4(x+y)=8$ 变形为 $y=-x+\frac{8}{x^4}$，当 $x\to\pm\infty$ 时，$\frac{8}{x^4}\to0, y\to-x$，所以 $y=-x$ 是曲线 Ω 的渐近线方程，曲线 Ω 如图所示，**B 错误**.



对于 D，分析：利用已知条件得到两交点横坐标之间的关系，进而求出直线 AB 斜率的范围. 由 C 项可知 A, B 两点均在 y 轴右侧，设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，且 $x_1^2+y_1^2=4, x_2^2+y_2^2=4$，两式相加得 $x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2=8$. 当 $x>0$ 时，$y=\frac{8}{x^4}-x$ 单调递减，所以 $x_1\neq x_2$.

根据基本不等式，可得 $2x_1x_2<x_1^2+x_2^2<8$，所以 $x_1x_2<4$.

关键点

直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\left(\frac{8}{x_1^4}-x_1\right)-\left(\frac{8}{x_2^4}-x_2\right)}{x_1-x_2}=-1+\frac{\frac{8}{x_1^4}-\frac{8}{x_2^4}}{x_1-x_2}=-1-\frac{8(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3)}{(x_1x_2)^4}$.

因为 $x_1, x_2>0, x_1x_2<4$，所以 $k_{AB}=-1-\frac{8(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)}{(x_1x_2)^4}<$

$-1-\dfrac{32(x_1x_2)^{\frac{3}{2}}}{(x_1x_2)^4}<-1-1=-2$，**D 正确**. 故选 ACD.

12. 62　【解析】本题考查等差、等比数列综合问题.

因为 $3a_1,a_2+3,a_3$ 成等差数列，所以 $2(a_2+3)=a_3+3a_1$（提示：等差中项的性质），

则 $2(2a_1+3)=4a_1+3a_1$，解得 $a_1=2$，则 $S_5=\dfrac{2(1-2^5)}{1-2}=62$.

13. $-\dfrac{4}{9}$　【解析】本题考查公切线问题.

由 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，可得 $f'(x)=x$，则 $f'(x_1)=x_1$，所以直线 l 的方程为 $y-\dfrac{1}{2}x_1^2=x_1(x-x_1)$，即 $y=x_1x-\dfrac{1}{2}x_1^2$.

由 $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3$，可得 $g'(x)=x^2$，则 $g'(x_2)=x_2^2$，所以直线 l 的方程为 $y-\dfrac{1}{3}x_2^3=x_2^2(x-x_2)$，即 $y=x_2^2x-\dfrac{2}{3}x_2^3$.

由题意可知 $\begin{cases}x_1=x_2^2,\\-\dfrac{1}{2}x_1^2=-\dfrac{2}{3}x_2^3,\end{cases}$ 解得 $x_2=\dfrac{4}{3}$，$x_1=\dfrac{16}{9}$，所以 $x_2-x_1=-\dfrac{4}{9}$.

14. $\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$　【解析】本题考查正弦定理、最值问题.

由正弦定理得 $2\sin C=\sin B(\sin A-\cos A)$，因为 $C=\pi-A-B$，所以 $2\sin(A+B)=\sin B(\sin A-\cos A)$，展开得 $2\sin A\cos B=\sin A\sin B-3\cos A\sin B$①.

当 $A=\dfrac{\pi}{2}$ 时，B 为锐角，由①式得 $\tan B=2=\dfrac{2\tan\dfrac{B}{2}}{1-\tan^2\dfrac{B}{2}}$，解得 $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$（负值舍去），则 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=1\cdot\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

当 $B=\dfrac{\pi}{2}$ 时，A 为锐角，同理可得 $\tan A=3=\dfrac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1-\tan^2\dfrac{A}{2}}$，解得 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$（负值舍去），$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=1\cdot\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$.

当 $A\neq\dfrac{\pi}{2}$，$B\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时，①式等号两侧同除以 $\cos A\cos B$，得 $2\tan A=\tan B(\tan A-3)$，则 $\tan B=\dfrac{2\tan A}{\tan A-3}$②，$\tan A\neq3$，设 $u=\tan\dfrac{A}{2}$，$v=\tan\dfrac{B}{2}$，则 $\tan A=\dfrac{2u}{1-u^2}$，$\tan B=\dfrac{2v}{1-v^2}$，代入②式可得 $\dfrac{2v}{1-v^2}=\dfrac{4u}{3u^2+2u-3}$，整理得 $2uv^2+(3u^2+2u-3)v-2u=0$，令 $p=uv>0$，消去 v 得关于 u 的方程 $(3p-2)u^2+2pu+(2p^2-3p)=0$.

当 $p=\dfrac{2}{3}$ 时，易知关于 u 的方程有正实数解.

当 $u=0$ 为关于 u 的方程的一个解时，$2p^2-3p=0$，解得 $p=0$（舍去）或 $p=\frac{3}{2}$.

当 $p=\frac{3}{2}$ 时，方程可化为 $\frac{5}{2}u^2+3u=0$，解得 $u=0$ 或 $u=-\frac{6}{5}$，不符合题意.

当关于 u 的方程有两个负实数解 u_1，u_2 时，$\begin{cases}u_1+u_2=-\frac{2p}{3p-2}<0,\\ u_1u_2=\frac{2p^2-3p}{3p-2}>0,\end{cases}$ 解得 $p>\frac{3}{2}$.

当 $p\neq\frac{2}{3}$ 时，由关于 u 的一元二次方程必须存在实数解，得 $3p^2-7p+3\leqslant 0$，解得 $\frac{7-\sqrt{13}}{6}\leqslant p\leqslant\frac{7+\sqrt{13}}{6}$ 且 $p\neq\frac{2}{3}$，则当关于 u 的一元二次方程有正实数解时，需满足 $\begin{cases}\frac{7-\sqrt{13}}{6}\leqslant p\leqslant\frac{7+\sqrt{13}}{6},\\ p\neq\frac{2}{3},\\ 0<p<\frac{3}{2},\end{cases}$ 即 $\frac{7-\sqrt{13}}{6}\leqslant p<\frac{3}{2}$.

综上，由于 $\frac{7-\sqrt{13}}{6}<\frac{2}{3}$，$\frac{7-\sqrt{13}}{6}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\frac{7-\sqrt{13}}{6}<\frac{\sqrt{10}-1}{3}$，所以 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$ 的最小值为 $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

限时小卷 ▸ 7

1. A 【解析】本题考查复数的四则运算，复数的几何意义.

由题可得 $z=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{5+5\mathrm{i}}{5}=1+\mathrm{i}$，所以 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(1,1)$，位于第一象限. 故选 A.

2. A 【解析】本题考查集合的交集、补集运算.

因为 $A=\{x\mid x^2\geqslant 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{x}>0\right\}=\{x\mid x>0\}$，所以 $\complement_U A=\{x\mid -1<x<1\}$，所以 $(\complement_U A)\cap B=(0,1)$. 故选 A.

3. C 【解析】本题考查抛物线的性质及定义.

抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，因为抛物线上一点 P 到焦点 F 的距离为 5，所以点 P 到准线 $x=-1$ 的距离也为 5（提示：抛物线的定义），即点 P 的横坐标 $x_P=4$，代入抛物线方程可得点 P 的纵坐标 $y_P=\pm 4$，因此 $S_{\triangle OFP}=\frac{1}{2}|OF||y_P|=\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$. 故选 C.

4. A 【解析】本题考查圆锥中截面的有关计算，求线面角.

分析：先利用题干条件求得圆锥母线长与高的关系. 设圆锥底面的半径为 r，母线长为 l，高为 h，则由题意得 $\frac{\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l}{\frac{1}{2}\times 2r\times h}=2\pi$，解得 $l=2h$. 分析：结合三角函数定义即可求得圆锥母线与底面所成角的大小. 设圆锥母线与底面所成角为 $\theta\left(0<\theta<\right.$

$\frac{\pi}{2}\Big)$，则 $\sin\theta=\frac{h}{l}=\frac{1}{2}$，则 $\theta=\frac{\pi}{6}$，所以圆锥母线与底面所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

5. D 【解析】本题考查平面向量的数量积，三角函数的性质.

分析：要求向量的数量积的最大值，题中给出了相关点坐标，考虑坐标法. 题中点 M 为动点，表示点 M 的坐标时尽量用一个未知量表示. 依题意，设 $M(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，则 $\overrightarrow{MP}=(-\cos\theta,2-\sin\theta)$，$\overrightarrow{MQ}=(2-\cos\theta,2-\sin\theta)$，

所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-2\cos\theta+\cos^2\theta+4-4\sin\theta+\sin^2\theta=5-(2\cos\theta+4\sin\theta)=5-2\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$（提示：转化为三角函数问题，利用三角函数的性质求最值），其中 $\tan\varphi=\frac{1}{2}$，又 $\sin(\theta+\varphi)\in[-1,1]$，则 $5-2\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\in[5-2\sqrt{5},5+2\sqrt{5}]$，所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最大值为 $5+2\sqrt{5}$. 故选 D.

6. C 【解析】本题考查条件概率的计算.

设事件 B 为“甲获胜”，事件 A 为“比赛进行了 3 局”，则 $P(AB)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$.

甲获胜有三种情况：

①比赛进行了 3 局，甲全胜，其概率 $P_1=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$；

②比赛进行了 4 局，即前 3 局甲胜 2 局，第 4 局甲胜，其概率 $P_2=C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$；

③比赛进行了 5 局，即前 4 局甲胜 2 局，第 5 局甲胜，其概率 $P_3=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{81}{512}$.

因此 $P(B)=P_1+P_2+P_3=\frac{27}{64}+\frac{81}{256}+\frac{81}{512}=\frac{459}{512}$，

所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{27}{64}}{\frac{459}{512}}=\frac{8}{17}$. 故选 C.

7. B 【解析】本题考查利用导数研究不等式恒成立问题.

分析：先转化为 $e^{\ln x+x}-a\geqslant\ln x+x-1$ 恒成立，令 $t=\ln x+x$，再构造函数 $\varphi(t)=e^t-t+1$，结合函数单调性求解.

因为 $xe^x-a\geqslant\ln x+x-1$，所以 $e^{\ln x+x}-a\geqslant\ln x+x-1$（提示：指、对同构问题），

令 $t=\ln x+x$，$t\in\mathbf{R}$，则 $e^t-a\geqslant t-1$ 恒成立，即 $a\leqslant e^t-t+1$ 恒成立（提示：参变分离）.

令 $\varphi(t)=e^t-t+1$，$t\in\mathbf{R}$，则 $\varphi'(t)=e^t-1$，

当 $t\in(-\infty,0)$ 时，$\varphi'(t)<0$，当 $t\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(t)_{\min}=\varphi(0)=2$，所以 $a\leqslant2$，故实数 a 的最大值为 2.

故选 B.

8. D 【解析】本题考查切线问题，裂项相消法求和.

分析：先根据导数的几何意义求出切线方程，再分别表示出直线 l_n 在 x，y 轴上的截距 x_n，y_n，进而可得出 $x_ny_{n+1}+x_{n+1}y_n$ 的表达式，再进行数列求和.

依题意，$y'=-\frac{1}{4x^2}$，当 $x=n(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，$y=\frac{1}{4n}$，$y'=-\frac{1}{4n^2}$，所以

曲线 $y=\frac{1}{4x}$ 在 $x=n(n\in\mathbf{N}^*)$ 处的切线 l_n 的方程为 $y-\frac{1}{4n}=-\frac{1}{4n^2}(x-n)$，即 $y=-\frac{1}{4n^2}x+\frac{1}{2n}$.

令 $y=0$，则 $x_n=2n$，令 $x=0$，则 $y_n=\frac{1}{2n}$，

所以 $x_ny_{n+1}+x_{n+1}y_n=\frac{2n}{2(n+1)}+\frac{2(n+1)}{2n}=2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

所以 $\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_{i+1}+x_{i+1}\cdot y_i)=2n+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{2n^2+3n}{n+1}$. 故选 D.

9. **AB** 【解析】本题考查由频率分布直方图求参数，用样本估计总体.

对于 A，由题意得 $(a+0.032+0.040+0.008+0.004)\times10=1$，解得 $a=0.016$，故 **A 正确**；

对于 B，估计该工厂竞赛成绩优秀的人数为 $1\ 000\times0.004\times10=40$，故 **B 正确**；

对于 C，第一组的频率为 $10\times0.016=0.16$，第二组的频率为 $10\times0.032=0.32$，第三组的频率为 $10\times0.040=0.4$，

前两组的频率之和为 $0.16+0.32=0.48<0.5$，前三组的频率之和为 $0.16+0.32+0.4=0.88>0.5$，故抽取的 50 人竞赛成绩的中位数位于 $[70,80)$ 内，设中位数为 x，则 $0.040\times(x-70)=0.5-0.48=0.02$，解得 $x=70.5$（分），所以估计该工厂竞赛成绩的中位数为 70.5 分，故 **C 错误**；

对于 D，估计该工厂竞赛成绩的平均数为 $(0.016\times55+0.032\times65+0.040\times75+0.008\times85+0.004\times95)\times10=70.2$（分），故 **D 错误**. 故选 AB.

10. **BC** 【解析】本题考查三角恒等变换，正弦型函数的图象与性质.

根据二倍角的正弦公式，可得 $f(x)=\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

对于 A，$f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$，而不是 1，故 **A 错误**.

对于 B，正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. 令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，又 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故 **B 正确**.

对于 C，正弦函数 $y=\sin x$ 的图象的对称轴为直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. 令 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称，故 **C 正确**.

对于 D，$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，而不是 $\frac{\pi}{2}$，故 **D 错误**. 故选 BC.

11. **ACD**　【解析】本题考查椭圆的离心率，焦点三角形的面积及内切圆半径.

对于 A，因为 $1\leqslant|PF_1|\leqslant5$，所以 $\begin{cases}a-c=1,\\a+c=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\c=2,\end{cases}$ 此时椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$，故 **A 正确**；

对于 B，因为 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，所以 $PF_1\perp PF_2$，即 $\angle F_1PF_2=90°$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}=2^2\times\tan 45°=4$（记忆：已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$P$ 为椭圆上一点，F_1，F_2 分别是该椭圆的左、右焦点，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$），故 **B 错误**；

对于 C，由题意知，$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}=9\times\tan 30°=3\sqrt{3}$，

由 $a=5$，$b=3$，得 $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$，所以 $\triangle F_1PF_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c$，设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r，则 $r=\dfrac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{2a+2c}=\dfrac{6\sqrt{3}}{10+8}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（记忆：已知三角形的内切圆半径为 r，周长为 C，面积为 S，则 $r=\dfrac{2S}{C}$），故 **C 正确**；

对于 D，由 $\angle PF_1F_2=15°$，$\angle PF_2F_1=105°$，可得 $\angle F_1PF_2=60°$，

由正弦定理得 $\dfrac{|PF_1|}{\sin 105°}=\dfrac{|PF_2|}{\sin 15°}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin 60°}$，所以 $\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin 105°+\sin 15°}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin 60°}$，即 $\dfrac{2a}{\sin 105°+\sin 15°}=\dfrac{2c}{\sin 60°}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin 60°}{\sin 105°+\sin 15°}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

12. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　【解析】本题考查三角函数的定义.

依题意，$x<0$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{2}x$，

$\therefore\sqrt{x^2+1}=2$，解得 $x=-\sqrt{3}$（正值舍去），

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

13. $\dfrac{76\pi}{27}$　【解析】本题考查正三棱柱的体积及其外接球表面积，利用导数求最值.

设正三棱柱的底面边长为 a，高为 h，则 $a+h=2$，可得 $h=2-a$，$0<a<2$，

三棱柱的体积 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2(2-a)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(-a^3+2a^2)$.

设 $h(a)=-a^3+2a^2$，$0<a<2$，则 $h'(a)=-3a^2+4a$，

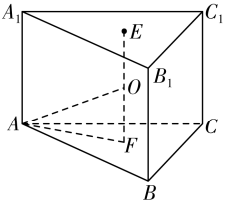
由 $h'(a)=-3a^2+4a>0$，解得 $0<a<\dfrac{4}{3}$，

由 $h'(a)=-3a^2+4a<0$，解得 $\dfrac{4}{3}<a<2$，

所以 $h(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{4}{3},2\right)$ 上单调递减，

所以当 $a=\dfrac{4}{3}$，即 $h=\dfrac{2}{3}$ 时，正三棱柱的体积最大.

设正三棱柱上、下底面中心分别为 E,F，如图，连接 AF,EF，取 EF 中点为 O，则 O 为正三棱柱外接球球心（提示：直三棱柱外接球的球心是上、下底面外心连线的中点）.



连接 OA，设正三棱柱外接球半径为 R，则 $R=OA$，

$$R^2=OA^2=FA^2+FO^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\times\frac{16}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{19}{27},$$

球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{19}{27}=\frac{76\pi}{27}$.

14. $[1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 【解析】本题考查函数与方程，复合函数.

分析：本题中含有复合函数，考虑利用换元法分层分析. 令 $t=f(x)$，考虑方程 $f(t)=t$ 的解.

令 $t=f(x)$，则 $t-a\sqrt{t}+1=t$，即 $a\sqrt{t}=1$.

若 $a\leqslant 0$，此时 $a\sqrt{t}=1$ 无解，故 $f(t)=t$ 无解，故 $f(f(x))=f(x)$ 的实数根的个数为零.

若 $a>0$，则方程 $f(t)=t$ 的解为 $t=\frac{1}{a^2}$，所以方程 $f(f(x))=f(x)$ 的实数根个数可以转化为 $f(x)=\frac{1}{a^2}$ 的实数根个数，

即方程 $x-a\sqrt{x}+1-\frac{1}{a^2}=0$ 的实数根个数.

若 $f(f(x))=f(x)$ 的实数根的个数最多，则 $x-a\sqrt{x}+1-\frac{1}{a^2}=0$ 有两个不同的实数根，

令 $s=\sqrt{x}$（提示：含有根式，再次考虑换元），$s\geqslant 0$，故 $s^2-as+1-\frac{1}{a^2}=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个不同的实数根，故

$$\begin{cases}\frac{a}{2}>0,\\ 1-\frac{1}{a^2}\geqslant 0,\\ a^2-4\left(1-\frac{1}{a^2}\right)>0,\end{cases}$$ 故 $1\leqslant a<\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$.

所以 a 的取值范围是 $[1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

限时小卷 ▸ 8

1. B 【解析】本题考查中位数的计算.

这组数据的中位数为 $\frac{3+4}{2}=3.5$. 故选 B.

2. A 【解析】本题考查充分、必要条件的判断.

$ab<a^2$ 等价于 $ab-a^2<0$，即 $a(b-a)<0$，所以当 $a<b<0$ 时，$a<0,b-a>0,ab<a^2$ 成立，

当 $ab<a^2$ 时，$a<b<0$ 不一定成立，如 $a=-1,b=2$，满足 $ab<a^2$，但不满足 $a<b<0$.

故“$a<b<0$”是“$ab<a^2$”的充分不必要条件. 故选 A.

3. A 【解析】本题考查根据函数的奇偶性求参.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，所以 $3^x+\frac{1}{(2a)^{-x}}=3^{-x}+\frac{1}{(2a)^x}$，即 $3^x+(2a)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{2a}\right)^x$，所以 $2a=$

$\frac{1}{3}$且$\frac{1}{2a}=3$，故$a=\frac{1}{6}$. 故选 A.

4. A 【解析】本题考查椭圆的离心率、椭圆的定义、余弦定理.

设等边三角形F_1PQ的边长为m，易知$|PF_1|+|QF_1|+|PQ|=4a$（提示：椭圆的定义），所以$3m=4a$，解得$m=\frac{4}{3}a$，则$|PF_2|=2a-|PF_1|=2a-m=2a-\frac{4}{3}a=\frac{2}{3}a$. 在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，即$4c^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-2\times\frac{4}{3}a\times\frac{2}{3}a\times\frac{1}{2}$，整理得$a^2=3c^2$，即$a=\sqrt{3}c$，所以椭圆$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

5. C 【解析】本题考查集合中元素的互异性、二次函数的性质.

分析：由题知$f(t)=f(t+1)\neq f(t+2)$或$f(t+1)=f(t+2)\neq f(t)$或$f(t)=f(t+2)\neq f(t+1)$，分类讨论后可求满足条件的实数t的和.

由$f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$可得函数$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称.

因为集合$\{f(x)\mid x\in\{t,t+1,t+2\}\}$中恰有两个元素，所以$f(t)=f(t+1)\neq f(t+2)$或$f(t+1)=f(t+2)\neq f(t)$或$f(t)=f(t+2)\neq f(t+1)$.

若$f(t)=f(t+1)\neq f(t+2)$，则$\frac{t+t+1}{2}=2$，故$t=\frac{3}{2}$，此时$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)$（提示：考虑二次函数图象的对称性），满足题设要求；

若$f(t+1)=f(t+2)\neq f(t)$，则$\frac{t+1+t+2}{2}=2$，故$t=\frac{1}{2}$，此时$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，满足题设要求；

若$f(t)=f(t+2)\neq f(t+1)$，则$\frac{t+t+2}{2}=2$，故$t=1$，此时$f(1)=f(3)>f(2)$，满足题设要求.

所以所有满足条件的实数t的和为$\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$. 故选 C.

6. C 【解析】本题考查余弦型函数的性质，求三角函数中ω的最值.

分析：利用三角函数的有界性，考虑满足$\exists x_1,x_2\in[0,\pi]$，使得$f(x_1)f(x_2)=-4$的情况. 由于$f(x)$的值域是$[-2,2]$，$f(x_1)f(x_2)=-4$，所以$f(x_1)$与$f(x_2)$中，其中一个的值为 2，另一个为$-2$.

因为$x\in[0,\pi]$，所以$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，要使$f(x)$在$[0,\pi]$上能取到 2，则$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$能取到的值中，至少有一个在区间$\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right]$内，其中最小的值可能为$2\pi$（当$k=1$时）（提示：左端点固定，考虑右端点），故需满足$\omega\pi+\frac{\pi}{4}\geqslant 2\pi$，解得$\omega\geqslant\frac{7}{4}$.

要使$f(x)$在$[0,\pi]$上能取到-2，则$(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$能取到的值中，至少有一个在区间$\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right]$内，其中最小的可

能值为 π（当 $k=0$ 时），故需满足 $\omega\pi+\frac{\pi}{4}\geqslant\pi$，解得 $\omega\geqslant\frac{3}{4}$.

综上所述，$\omega\geqslant\frac{7}{4}$，$\omega_{\min}=\frac{7}{4}$. 故选 C.

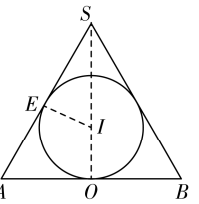
7. B 【解析】本题考查圆锥的体积及圆锥内切球的表面积.

分析：根据已知先求圆锥的高和母线长，再结合轴截面求出圆锥内切球半径，利用球的表面积公式即可求解.

设圆锥的高为 h，由圆锥 SO 的底面半径为 2，体积为 $\frac{32\pi}{9}$，可得圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times h=\frac{32\pi}{9}$，解得 $h=\frac{8}{3}$，则圆锥的母线长为 $\sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}$.

作出圆锥 SO 的轴截面 SAB，易知 $\triangle SAB$ 是等腰三角形（关键：求解旋转体的外接球和内切球相关问题，作轴截面是关键，由对称性可知球心一定在轴截面上，将空间问题平面化）.

如图，连接 SO，设圆锥内切球半径为 R，SA 与内切球切于 E，球心 I 在 SO 上，连接 IE，由切线长定理可得 $AE=AO=2$，故 $SE=SA-AE=\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$，又 $SI=h-R=\frac{8}{3}-R$，所以在 Rt $\triangle SIE$ 中，由勾股定理得 $SE^2+IE^2=SI^2$，即 $\left(\frac{4}{3}\right)^2+R^2=\left(\frac{8}{3}-R\right)^2$，解得 $R=1$，则圆锥内切球表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times1^2=4\pi$. 故选 B.



1 min 速解　西安交通大学——王紫蓬

学霸提示：圆锥内切球半径公式 $R=\frac{3V}{S_{表}}$，R 为圆锥内切球半径，$S_{表}$ 为圆锥表面积，V 为圆锥体积.

由题知圆锥底面半径 $r=2$，则底面积 $S_1=\pi r^2=4\pi$，又圆锥体积 $V=\frac{32\pi}{9}$，设圆锥高为 h，则 $\frac{1}{3}S_1h=\frac{32}{9}\pi$，解得 $h=\frac{8}{3}$，则由勾股定理得母线 $l=\sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}$，则圆锥侧面积 $S_2=\frac{10}{3}\times\pi\times2=\frac{20}{3}\pi$，所以圆锥的表面积 $S_{表}=\frac{20}{3}\pi+4\pi=\frac{32\pi}{3}$，则圆锥内切球半径 $R=\frac{3V}{S_{表}}=1$，所以圆锥内切球的表面积 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi$. 故选 B.

8. C 【解析】本题考查数列的递推关系，组合数.

由 $2a_{k+1}^2-5a_ka_{k+1}+2a_k^2=0(k=1,2,3,\cdots,9)$ 可得 $(2a_{k+1}-a_k)\cdot(a_{k+1}-2a_k)=0$，

所以 $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k$ 或 $a_{k+1}=2a_k$，设 $q_1=\frac{1}{2}$，$q_2=2$，

$a_{10}=a_1\cdot q_1^m\cdot q_2^{9-m}(m\in\mathbf{N}$ 且 $m\leqslant9)$（提示：从 a_1 到 a_{10} 共经过 9 次变换），

即 $16=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot2^{9-m}$，整理可得 $2^{10-2m}=16$，所以 $10-2m=4$，解得 $m=3$，所以从 a_1 到 a_{10} 的 9 次变换过程中，需要乘 3 个 $\frac{1}{2}$，6 个 2，所以满足这种条件的不同数列 $\{a_n\}$ 的个数为 $C_9^3=84$. 故选 C.

9. BCD 【解析】本题考查复数的运算，复数的模，与复数的模相关的轨迹问题.

对于 A，设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，则 $z-\bar{z}=a+bi-(a-$

$bi)=2bi$，当 $b=0$ 时，$z-\bar{z}=0$ 为实数，故 **A 错误**；

对于 B，设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$，则 $z_1z_2=(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$，$z_1\overline{z_2}=(a+bi)(c-di)=ac+bd+(bc-ad)i$，则 $|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(bc)^2+(ad)^2}$，$|z_1\overline{z_2}|=\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}=\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(bc)^2+(ad)^2}$，所以 $|z_1z_2|=|z_1\overline{z_2}|$，故 **B 正确**；

对于 C，设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z+i=a+(b+1)i$，所以 $|z+i|=\sqrt{a^2+(b+1)^2}=1$，即 $a^2+(b+1)^2=1$，所以 Z 的轨迹为以 $(0,-1)$ 为圆心，1 为半径的圆，故 **C 正确**；

对于 D，对于方程 $x^2-2x+5=0$，判别式 $\Delta=(-2)^2-4\times5=-16<0$，所以方程的根为 $x=\frac{2\pm\sqrt{16}i}{2}=1\pm2i$，不妨令 $z_1=1+2i$，$z_2=1-2i$，则 $z_1^2+z_2^2=(1+2i)^2+(1-2i)^2=-6$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

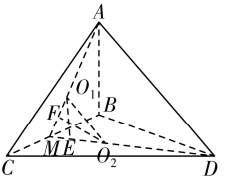
刷有所得 ①根据复数的模的运算有 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|=|z_1||\overline{z_2}|=|z_1\overline{z_2}|$，同理可得 $|z_1z_2|=|z_1\overline{z_2}|=|\overline{z_1}z_2|=|\overline{z_1}\,\overline{z_2}|$. 遇到含复数的模的等式时，可用该性质简化计算.

②当复数 z 满足 $|z-z_0|=r$ 时，z 在复平面内对应的点 Z 的轨迹为以复数 z_0 在复平面内对应的点为圆心，r 为半径的圆.

10. **BCD** 【解析】本题考查线面平行的判定，面面垂直的判定，三棱锥的体积.

对于 A，假设 $AO_1\parallel CO_2$（提示：反证法），因为 $CO_2\subset$ 平面 BCD，$AO_1\not\subset$ 平面 BCD，所以 $AO_1\parallel$ 平面 BCD，但是 AO_1 与平面 BCD 显然有交点，故假设不成立，**A 错误**.

对于 B，如图，取 BC 的中点 M，连接 AM，DM，O_1O_2，因为 O_1，O_2 分别为 $\triangle ABC$，$\triangle BCD$ 的重心，所以 AM，DM 分别过点 O_1，O_2，且 $\frac{MO_1}{MA}=\frac{MO_2}{MD}=\frac{1}{3}$，所以 $O_1O_2\parallel AD$，又 $AD\subset$ 平面 ABD，$O_1O_2\not\subset$ 平面 ABD，故 $O_1O_2\parallel$ 平面 ABD（提示：线面平行的判定定理），**B 正确**.



对于 C，由 B 的分析知，平面 AO_1O_2D 即为平面 ADM，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 均为等边三角形，则 $BC\perp AM$，$BC\perp DM$，又 $AM\cap DM=M$，AM，$DM\subset$ 平面 ADM，所以 $BC\perp$ 平面 ADM（提示：线面垂直的判定定理），又 $BC\subset$ 平面 ABC，故平面 $ABC\perp$ 平面 AO_1O_2D（提示：面面垂直的判定定理），**C 正确**.

对于 D，易知 $MO_1=MO_2$，所以 $\triangle MO_1O_2$ 为等腰三角形，过点 O_1 作 $O_1E\perp MD$ 于点 E，过点 O_2 作 $O_2F\perp AM$ 于点 F，则 $O_1E=O_2F$，由 C 的分析可知，$BC\perp$ 平面 ADM，又 $O_1E\subset$ 平面 ADM，所以 $BC\perp O_1E$，又 $BC\cap MD=M$，BC，$MD\subset$ 平面 BCD，所以 $O_1E\perp$ 平面 BCD，同理可得 $O_2F\perp$ 平面 ABC，

所以 $V_{O_1-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot O_1E$，$V_{O_2-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot O_2F$，

又 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，$O_1E=O_2F$，所以 $V_{O_1-BCD}=V_{O_2-ABC}$，**D 正确**. 故选 BCD.

11. **AC** 【解析】本题考查正态分布的性质.

因为 $Y\sim N(2,2^2)$，所以均值 $\mu=2$，标准差 $\sigma=2$.

对于 A，$P(\mu-\sigma\leqslant Y\leqslant\mu+\sigma)\approx0.68$，

代入 $\mu=2$，$\sigma=2$，得 $P(0\leqslant Y\leqslant4)\approx0.68$，由正态分布的性质得 $P(2\leqslant Y\leqslant4)=P(0\leqslant Y\leqslant2)$，所以 $f(2)=P(2\leqslant Y\leqslant4)\approx\frac{0.68}{2}=0.34$，所以 **A 正确**.

对于 B，由 A 的分析可知 $P(0\leqslant Y\leqslant4)\approx0.68$，由正态分布的对称性可知 $P(Y<0)=P(Y>4)$，

又 $P(Y<0)+P(0\leqslant Y\leqslant4)+P(Y>4)=1$，所以 $2P(Y<0)\approx1-$

关键点

$0.68=0.32$，解得 $P(Y<0)\approx0.16$，因此 $g(0)=P(Y\geqslant0)=1-P(Y<0)\approx1-0.16=0.84$，所以 **B 错误**.

对于 C，$f(1+t)=P(1+t\leqslant Y\leqslant3+t)$，$f(1-t)=P(1-t\leqslant Y\leqslant3-t)$，而 $Y\sim N(2,2^2)$，区间 $[1+t,3+t]$ 和 $[1-t,3-t]$ 关于直线 $x=2$ 对称（关键点），故 $f(1+t)=f(1-t)$，即 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 **C 正确**.

对于 D，若 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 对称，则 $g(1+t)+g(1-t)=1$，即 $g(1+t)+g(1-t)=P(Y\geqslant1+t)+P(Y\geqslant1-t)=1$，而 Y 服从正态分布 $N(2,2^2)$，则 $P(Y\geqslant1+t)=P(Y\leqslant3-t)$，故 $g(1+t)+g(1-t)=P(Y\leqslant3-t)+P(Y\geqslant1-t)$，当 $t=1$ 时，$g(2)+g(0)=P(Y\leqslant2)+P(Y\geqslant0)\approx0.5+0.84=1.34\neq1$，即 $g(x)$ 的图象不关于点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 对称，所以 **D 错误**. 故选 AC.

12. $y=2ex-e$　【解析】本题考查曲线在某点处的切线方程.

由题意得 $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$，当 $x=1$ 时，$y'=2e$，所以曲线在 $(1,e)$ 处的切线方程是 $y-e=2e(x-1)$，即 $y=2ex-e$.

13. 5　【解析】本题考查平面向量与基本不等式的综合.

因为 $\boldsymbol{e}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}=(1,n)$，$25\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+24\boldsymbol{e}$，所以 $\boldsymbol{b}=\frac{1}{25}(\boldsymbol{a}+24\boldsymbol{e})=\left(1,\frac{n}{25}\right)$，设 α 为 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正方向的夹角，β 为 $\boldsymbol{b}$ 与 x 轴正方向的夹角，由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标可知，$\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\alpha\geqslant\beta$，则 $\tan\alpha=\frac{|n|}{1}=|n|$，$\tan\beta=\frac{|n|}{25}$. $\tan\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{|n|-\frac{|n|}{25}}{1+|n|\cdot\frac{|n|}{25}}=\frac{24|n|}{25+n^2}$. 令 $f(n)=\frac{24|n|}{25+n^2}$，当 $n=0$ 时，$f(0)=0$，当 $n\neq0$ 时，$f(n)=\frac{24}{\frac{25}{|n|}+|n|}\leqslant\frac{24}{2\sqrt{\frac{25}{|n|}\cdot|n|}}=\frac{12}{5}$，当且仅当 $\frac{25}{|n|}=|n|$，即 $|n|=5$ 时，等号成立. 故当 $\tan\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 取到最大值 $\frac{12}{5}$ 时，$|n|=5$.

14. $\frac{3}{4}$　【解析】本题考查双曲线的渐近线、点到直线的距离.

因为 $1^2+(\sqrt{3})^2=4$，所以点 $P(1,\sqrt{3})$ 在圆 O 上，直线 OP 的斜率 $k_{OP}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，由垂直关系可得切线 l 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为双曲线的渐近线的斜率为 $\pm\frac{b}{a}$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由双曲线的定义可知 $2a=2\sqrt{3}$，解得 $a=\sqrt{3}$，则 $b=1$，故双曲线方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

设点 $M(m,n)$，则 $\frac{m^2}{3}-n^2=1$（提示：点在曲线上，必要回代），点 M 到双曲线的两条渐近线的距离之积为 $\frac{\left|n+\frac{\sqrt{3}}{3}m\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}\cdot\frac{\left|n-\frac{\sqrt{3}}{3}m\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=\frac{\left|n^2-\frac{1}{3}m^2\right|}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$.

限时小卷 ▸ 9

1. B 【解析】本题考查集合间的关系.

因为集合 $A=\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=6k-1,k\in\mathbf{Z}\}=\{x\mid x=3\times2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，所以 $B\subseteq A$，故选 B.

2. B 【解析】本题考查复数的四则运算、复数的模.

由 $\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{i}$，可得 $z_1=\mathrm{i}\cdot z_2$，代入 $z_1+z_2=1-\mathrm{i}$，得 $\mathrm{i}\cdot z_2+z_2=1-\mathrm{i}$，则 $z_2=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}$，所以 $z_1=\mathrm{i}\cdot z_2=\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}^2=1$，则 $|z_1|=1$. 故选 B.

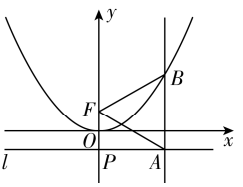
3. C 【解析】本题考查利用函数的单调性、奇偶性求参.

分析：通过偶函数的定义，将 $a-1$ 转化到区间 $[0,+\infty)$ 上，进而利用单调性解不等式.

由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，知 $f(-x)=f(x)$，则不等式 $f(a-1)>f(2)$ 可以转化为 $f(|a-1|)>f(2)$. 又函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $|a-1|>2$，解得 $a<-1$ 或 $a>3$. 故选 C.

4. D 【解析】本题考查抛物线的定义及几何性质.

由抛物线定义可知 $|BF|=|AB|$，因为 $\angle AFB=60°$，所以 $\triangle ABF$ 为等边三角形（关键：通过抛物线的定义得到 $\triangle ABF$ 为等边三角形），故 $|AF|=|AB|=|BF|$，$\angle BAF=60°$，所以 $\angle AFO=60°$，设准线 l 与 y 轴的交点为 P，则 $|PF|=2$，故 $|AF|=\frac{|PF|}{\cos 60°}=4$，所以 $|AB|=4$. 故选 D.



5. D 【解析】本题考查正弦定理在边角互化中的应用、同角三角函数的基本关系.

因为 $\frac{\cos C}{c}=\frac{\cos A}{3b-a}$，所以由正弦定理可得 $\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A}{3\sin B-\sin A}$，所以 $3\sin B\cos C-\sin A\cos C=\cos A\sin C$，即 $3\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)$，又因为 $\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$，$0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，故 $3\cos C=1$，解得 $\cos C=\frac{1}{3}$.

又因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$. 故选 D.

6. B 【解析】本题考查动点的轨迹问题、圆与圆的位置关系.

设点 $P(x,y)$，已知 $A(1,0)$，$B(4,0)$，且 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，所以 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，

化简得 $x^2-2x+1+y^2=2(x^2-8x+16+y^2)\Rightarrow(x-7)^2+y^2=18$，所以点 P 的轨迹是以 $(7,0)$ 为圆心，$3\sqrt{2}$ 为半径的圆.

因为圆 C 上总存在点 P 满足 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，即圆 C 与圆 $(x-7)^2+y^2=18$ 有公共点（关键点），所以两圆的圆心距 d 满足 $|r_1-r_2|\leqslant d\leqslant r_1+r_2$（$r_1$，$r_2$ 为两圆的半径），即 $|3\sqrt{2}-2\sqrt{2}|\leqslant\sqrt{(a-7)^2+(a+1-0)^2}\leqslant 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$，化简得 $\sqrt{2}\leqslant\sqrt{(a-7)^2+(a+1)^2}\leqslant 5\sqrt{2}\Rightarrow 2\leqslant(a-7)^2+(a+1)^2\leqslant 50$，即 $2\leqslant 2a^2-12a+50\leqslant 50\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant 6$. 故选 B.

7. C 【解析】本题考查平面向量基本定理，等比数列的判定、通项公式、前 n 项和公式.

分析：根据向量的线性表示得到有关 a_n 的递推式，求得 $\{a_n+3\}$ 是等比数列，进而求出 $\{a_n\}$ 的通项公式，即可求得 a_3，S_n.

$\because E$ 为 AB 的中点，$\therefore 2\overrightarrow{G_nE}=\overrightarrow{G_nA}+\overrightarrow{G_nB}$，$\therefore \overrightarrow{G_nB}=-\overrightarrow{G_nA}+2\overrightarrow{G_nE}$，

又 D,G_n,B 三点共线，$\therefore \overrightarrow{G_nD}=\lambda\overrightarrow{G_nB}=-\lambda\overrightarrow{G_nA}+2\lambda\overrightarrow{G_nE}$.

又 $\overrightarrow{G_nD}=a_{n+1}\overrightarrow{G_nA}-2(2a_n+3)\overrightarrow{G_nE}$，$\therefore \begin{cases}-\lambda=a_{n+1},\\ 2\lambda=-2(2a_n+3),\end{cases}$ 化简可得 $a_{n+1}=2a_n+3$，$\therefore a_{n+1}+3=2(a_n+3)$，又 $a_1=1$，$a_1+3=4$，$\therefore$ 数列 $\{a_n+3\}$ 是首项为 4，公比为 2 的等比数列，故 **B 正确**.

$a_n+3=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$，$a_n=2^{n+1}-3$，$\therefore a_3=13$，故 **A 正确，C 错误**.

$S_n=\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$，故 **D 正确**. 故选 C.

8. **A** 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性、最值.

由题意可得 $\forall x>0$，$b\leqslant\dfrac{1}{2}ax^2-\ln x\ (a>0)$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-\ln x\ (x>0)$，则 $g'(x)=ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^2-1}{x}$.

关键点

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$，当 $0<x<\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x>\dfrac{\sqrt{a}}{a}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln a$，即 $b\leqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln a$，所以 $\dfrac{b}{a}\leqslant\dfrac{1}{2a}+\dfrac{\ln a}{2a}$.

令 $h(a)=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{\ln a}{2a}\ (a>0)$，则 $h'(a)=\dfrac{-\ln a}{2a^2}$，

关键点

令 $h'(a)=0$，得 $a=1$，

所以当 $0<a<1$ 时，$h'(a)>0$，$h(a)$ 单调递增，当 $a>1$ 时，$h'(a)<0$，$h(a)$ 单调递减，

所以 $h(a)_{\max}=h(1)=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{b}{a}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$. 故选 A.

9. **AC** 【解析】本题考查条件概率公式，相互独立事件的概率乘法公式，并事件的概率公式.

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，代入已知得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{15}$.

对于选项 A，事件 A,B 相互独立的充要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$，计算得 $P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{15}=P(AB)$，因此事件 A,B 相互独立，故 **A 正确**.

对于选项 B，根据条件概率公式得 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{3}$，$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{5}$，显然 $\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{2}{5}$，故 **B 错误**.

对于选项 C，已知 $P(AC)=P(\overline{A}C)$，又 $P(C)=P(AC)+P(\overline{A}C)=2P(AC)$，

因此 $P(A\mid C)=\dfrac{P(AC)}{P(C)}=\dfrac{P(AC)}{2P(AC)}=\dfrac{1}{2}$，故 **C 正确**.

对于选项 D，已知 $P(C\mid A)+P(C\mid\overline{A})=\dfrac{P(AC)}{P(A)}+\dfrac{P(\overline{A}C)}{P(\overline{A})}=\dfrac{2}{3}$，

代入 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(\overline{A})=\dfrac{2}{3}$ 得 $3P(AC)+\dfrac{3}{2}P(\overline{A}C)=\dfrac{2}{3}$，由 $\begin{cases}3P(AC)+\dfrac{3}{2}P(\overline{A}C)=\dfrac{2}{3},\\ P(AC)+P(\overline{A}C)=P(C)=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 解得 $P(AC)=\dfrac{1}{9}\neq\dfrac{1}{6}$，故 **D 错误**. 故选 AC.

10. AB 【解析】本题考查正弦型函数的图象与性质.

对于 A，因为 $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f\left(\frac{2\pi}{9}\right)=2\sin\left(3\times\frac{2\pi}{9}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{9}$ 对称，故 **A 正确**；

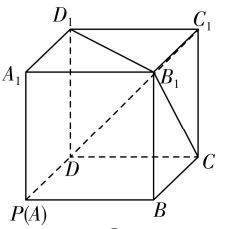
对于 B，令 $3x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{18}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{18},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，故 **B 正确**；

对于 C，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$3x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，则 $f(x)\in[-1,2]$，故 **C 错误**；

对于 D，当 $x\in\left(-\frac{7\pi}{36},\frac{5\pi}{9}\right)$ 时，令 $t=3x-\frac{\pi}{6}$，则 $t\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$（易错：一定要求整体范围，也就是 t 的范围，再利用数形结合法求解），结合 $y=\sin t$ 的图象可知，此时 $f(x)$ 恰有 2 个极值点，故 **D 错误**. 故选 AB.

11. ABD 【解析】本题考查正方体的空间动态问题，判定线面垂直，三棱锥的体积，线段的长度的最值，点到直线的距离的最值.

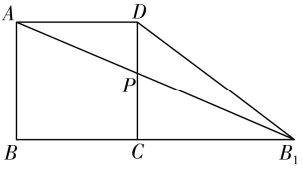
对于 A，如图①，当 P 与 A 重合时（提示：找特殊位置），根据三垂线定理易证 $AC_1\perp B_1D_1$，$AC_1\perp B_1C$，又 $B_1D_1\cap B_1C=B_1$，B_1D_1，$B_1C\subset$ 平面 B_1CD_1，$\therefore AC_1\perp$ 平面 B_1CD_1，即 $C_1P\perp$ 平面 B_1CD_1，故 **A 正确**.



图①

对于 B，∵ 正方体中上、下底面相互平行，P 为底面正方形 $ABCD$ 内（含边界）的一动点，$\therefore P$ 到上底面的距离为定值，又 $\triangle B_1A_1D_1$ 的面积也为定值，$\therefore$ 三棱锥 $B_1-A_1D_1P$ 的体积为定值（提示：三棱锥 $B_1-A_1D_1P$ 的体积即为三棱锥 $P-A_1B_1D_1$ 的体积），故 **B 正确**.

对于 C，将正方形 $ABCD$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle B_1DC$ 展开铺平，如图②所示，则 $PA+PB_1\geqslant AB_1=\sqrt{2^2+(2+2\sqrt{2})^2}=\sqrt{16+8\sqrt{2}}\neq2\sqrt{2}+2$（提示：将立体图形平面化，两点之间线段最短），故 **C 错误**.

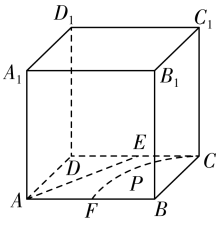


图②

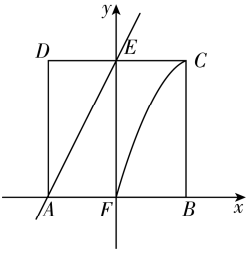
对于 D，如图③，根据题意可得 P 到 B 的距离等于 P 到 AD 的距离，$\therefore P$ 的轨迹为正方形 $ABCD$ 内以 B 为焦点，AD 为准线的抛物线的部分曲线 FC，其中 F 为 AB 的中点.

在平面 $ABCD$ 内，以 F 为坐标原点，AB，FE 所在直线分别为 x，y 轴，建立如图④所示的平面直角坐标系，则焦点 $B(1,0)$，准线 AD 的方程为 $x=-1$，$A(-1,0)$，$E(0,2)$，$\therefore P$ 的轨迹所在的抛物线方程为 $y^2=4x$，$x\in[0,1]$，$y\in[0,2]$，直线 AE 的方程为 $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1$，即为 $2x-y+2=0$.

设 $P(x,y)$，则 P 到直线 AE：$2x-y+2=0$ 的距离 $d=\frac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\frac{y^2}{2}-y+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|(y-1)^2+3|}{2\sqrt{5}}$，$\therefore$ 当 $y=1\in[0,2]$，$x=\frac{1}{4}\in[0,1]$ 时，d 取得最小值 $\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.



图③



图④

12. 0　【解析】本题考查三角恒等变换.

依题意，若 $\sin\beta=0$，则 $\cos 2\alpha=0$，$\sin 2\alpha=2\sin 2\beta=4\sin\beta\cos\beta=0$，与 $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$ 矛盾，所以 $\sin\beta\neq 0$，$\cos 2\alpha\neq 0$，所以 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin 2\beta}{4\sin^2\beta}=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$，则 $\cos 2\alpha\cos\beta-\sin 2\alpha\sin\beta=0$，即 $\cos(2\alpha+\beta)=0$.

关键点

13. $\dfrac{3}{10}$　【解析】本题考查古典概型.

任意相邻两数之积不超过 20，则 6 不能与 4 或 5 相邻，故只考虑与 6 相邻的两数即可. 6 的两侧可以为 1，2，可以为 1，3，也可以为 2，3. 又 6 的两侧共有 $C_5^2=10$（种）情况，所以任意相邻两数之积不超过 20 的概率为 $\dfrac{3}{10}$.

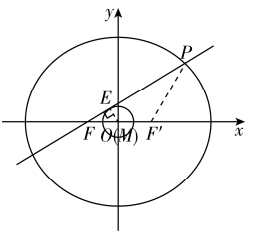
14. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　【解析】本题考查椭圆的定义及几何性质，求椭圆的离心率. 如图，连接 ME，易知 $|ME|=\dfrac{c}{2}$，且 $ME\perp FP$，又 $|MF|=c$，$\therefore\angle PFM=\dfrac{\pi}{6}$，则 $|EF|=\dfrac{\sqrt{3}c}{2}$. $\because|PE|=3|EF|$，$\therefore|PE|=\dfrac{3\sqrt{3}c}{2}$，$\therefore|PF|=2\sqrt{3}c$.

设椭圆 C 的右焦点为 F'，则 $|F'F|=2c$.

连接 PF'，在 $\triangle PFF'$ 中，由余弦定理得 $|PF'|=\sqrt{|PF|^2+|F'F|^2-2|PF|\times|F'F|\cos\dfrac{\pi}{6}}=2c$.

由椭圆的定义得 $2a=|PF|+|PF'|=2\sqrt{3}c+2c$，

$\therefore$ 椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.



1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

连接 ME，设椭圆 C 的右焦点为 F'，连接 PF'，过点 F' 作 $F'H\perp PF$ 于 H，易知 $|EF|=|EH|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，$\therefore|PE|=3|EF|=\dfrac{3\sqrt{3}c}{2}$，$\therefore|PH|=\sqrt{3}c$，$|HF'|=c$，$|PF|=2\sqrt{3}c$，$\therefore|PF'|=2a-|PF|=2a-2\sqrt{3}c$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PHF'$ 中，$c^2+(\sqrt{3}c)^2=(2a-2\sqrt{3}c)^2$，即 $2e^2-2\sqrt{3}e+1=0$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $e=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$（舍去）.

