小卷提速·满分

满分小卷 ▸ 1

1. D 【解析】本题考查并集的概念及运算.

由题知 $M=\{x|\sqrt{x}<2\}=\{x|0\leqslant x<4\}$，且 $N=\{x|1<x<5\}$，所以 $M\cup N=\{x|0\leqslant x<5\}$. 故选 D.

2. C 【解析】本题考查复数的四则运算及几何意义.

由 $z_2=\dfrac{-3+i}{1-2i}=\dfrac{(-3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{-5-5i}{5}=-1-i$，所以 $z_1=-1+i$（提示：若两点关于实轴对称，则它们的实部相等，虚部互为相反数）. 故选 C.

3. D 【解析】本题考查回归分析、残差的计算.

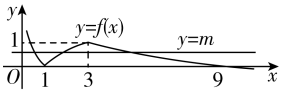
由 $\bar{x}=5$，$\bar{y}=60$ 知样本点的中心为 $(5,60)$，其必在经验回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+27.5$ 上，则 $60=\hat{b}\times5+27.5$，解得 $\hat{b}=6.5$，因此经验回归方程为 $\hat{y}=6.5x+27.5$. 当 $x=4$ 时，$\hat{y}=6.5\times4+27.5=53.5$（万元），根据残差定义（提示：残差等于观测值减去预测值），得第 4 个月收益的残差为 $60-53.5=6.5$（万元）. 故选 D.

4. D 【解析】本题考查等比数列前 n 项和的性质.

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，易知 $q\neq\pm1$，根据等比数列前 n 项和的性质，S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等比数列，且公比为 q^3，又 $S_9+7S_6=8S_3$，即 $S_9-S_6=-8(S_6-S_3)$，所以 $q^3=-8$，解得 $q=-2$. 故选 D.

5. A 【解析】本题考查函数的零点问题.

令 $g(x)=0$ 得 $f(x)=m$. 作出函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$，如图所示，由题可知函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有三个交点，由图可知 $0<m<1$. 故选 A.



一题多解 当 $m=0$ 时，$g(x)=f(x)$. 令 $g(x)=0$，得 $\begin{cases}|\log_3x|=0,\\0<x\leqslant3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-\log_3x=0,\\x>3,\end{cases}$ 解得 $x=1$ 或 $x=9$，不满足题意，因此排除 B，D 选项. 当 $m=1$ 时，$g(x)=f(x)-1$，令 $g(x)=0$，得 $\begin{cases}|\log_3x|=1,\\0<x\leqslant3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-\log_3x=1,\\x>3,\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}$ 或 $x=3$，不满足题意，故排除 C 选项. 故选 A.

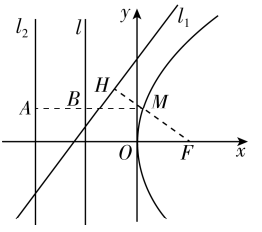
6. B 【解析】本题考查由正切型函数的奇偶性、周期性求参数.

因为函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\varphi>0)$ 的图象与直线 $y=a$ 的两个相邻交点之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期

$T=\frac{\pi}{2}$，又 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=2$，所以 $f(x)=\tan(2x+\varphi)$，则 $f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(2x+\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$，又 $f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$ 为奇函数且 $\varphi>0$，所以 $\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{N}^*)$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{N}^*)$，所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

7. **D** 【解析】本题考查抛物线中的最值问题.

由 $y^2=4x$ 可知抛物线的焦点为 $F(1,0)$，准线 $l:x=-1$，如图，过点 M 作 $MH\perp l_1$ 于点 H，作 $MA\perp l_2$ 于点 A，交直线 l 于点 B，连接 MF，则 $|MF|=|MB|$（关键：应用抛物线定义进行转化）.



由图知，$|MA|=|MB|+1$，则点 M 到直线 $l_1:4x-3y+5=0$ 和 $l_2:x=-2$ 的距离之和为 $|MH|+|MA|=|MH|+|MB|+1=|MH|+|MF|+1$，

因为点 M 是抛物线上的动点，所以当且仅当 F,M,H 三点共线时，$|MH|+|MF|$ 取得最小值，即为点 F 到直线 l_1 的距离，为 $\frac{4+5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$，此时 $|MH|+|MA|$ 取得最小值 $\frac{14}{5}$，即 M 到直线 $l_1:4x-3y+5=0$ 和 $l_2:x=-2$ 的距离之和的最小值为 $\frac{14}{5}$. 故选 D.

8. **C** 【解析】本题考查赋值法的应用、等差数列的前 n 项和.

分析：对 $f(x)-f(-x)=2x$ 求导，结合 $f'(x)+f'(2-x)=0$ 和赋值法推出 $\{f'(n)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列，求出 $\sum_{n=1}^{8}f'(n)$ 的值.

由 $f(x)-f(-x)=2x$ 求导得 $f'(x)+f'(-x)=2$.

又 $f'(x)+f'(2-x)=0$，两式相减可得 $f'(2-x)-f'(-x)=-2$，令 $n=-x$，可得 $f'(2+n)-f'(n)=-2$，则 $\{f'(n)\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的奇数项构成公差为 -2 的等差数列，偶数项也构成公差为 -2 的等差数列.

在 $f'(x)+f'(-x)=2$ 中，取 $x=0$，可得 $f'(0)+f'(0)=2$，解得 $f'(0)=1$.

在 $f'(x)+f'(2-x)=0$ 中，令 $x=1$，可得 $f'(1)+f'(2-1)=0$，所以 $f'(1)=0$.

在 $f'(2-x)-f'(-x)=-2$ 中，令 $x=0$，可得 $f'(2)-f'(0)=-2$，所以 $f'(2)=-2+f'(0)=-2+1=-1$.

故 $\{f'(n)\}$ 是以 0 为首项，-1 为公差的等差数列，

所以 $\sum_{n=1}^{8}f'(n)=8\times0+\frac{8\times7}{2}\times(-1)=-28$.

分析：根据 $f'(x)+f'(2-x)=0$ 得 $f(x)$ 满足的关系式，结合 $f(x)-f(-x)=2x$，依次赋值求出需要的函数值.

由 $f'(x)+f'(2-x)=0$ 得 $[f(x)-f(2-x)]'=0$，则 $f(x)-f(2-$

$x)=C(C$ 为常数$)$，

令 $x=1$，可得 $C=f(1)-f(1)=0$，故 $f(x)-f(2-x)=0$，即 $f(x)=f(2-x)$，

又 $f(x)-f(-x)=2x$，所以 $f(2-x)-f(-x)=2x$，则 $f(2+x)=f(x)-2x$.

因为 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，所以 $f(2)=f(0)-2\times0=0$，$f(4)=f(2)-2\times2=-4$，

$f(6)=f(4)-2\times4=-12$，$f(8)=f(6)-2\times6=-24$，

$f(3)=f(1)-2=-\frac{3}{2}$，$f(5)=f(3)-2\times3=-\frac{15}{2}$，$f(7)=f(5)-2\times5=-\frac{35}{2}$，则 $\sum_{n=1}^{8}f(n)=\frac{1}{2}+0-\frac{3}{2}-4-\frac{15}{2}-12-\frac{35}{2}-24=-66$.

所以 $\sum_{n=1}^{8}f(n)-\sum_{n=1}^{8}f'(n)=-66+28=-38$. 故选 C.

1 min 速解　武汉大学——王梓秋

学霸提示：由题知 $f(x)-x=f(-x)+x$，则 $y=f(x)-x(x\in\mathbf{R})$ 为偶函数. 又 $f'(x)+f'(2-x)=0$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，由此联想 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+c(c\in\mathbf{R})$. 设 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+c(c\in\mathbf{R})$，由于 $f(1)=\frac{1}{2}$，可得 $c=0$，此时满足题设条件，所以 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$，则 $f(x)-f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$，则 $\sum_{n=1}^{8}f(n)-\sum_{n=1}^{8}f'(n)=\sum_{n=1}^{8}[f(n)-f'(n)]=-\frac{1}{2}\times(1+4+9+\cdots+64)+2\times(1+2+3+\cdots+8)-8=-38$. 故选 C.

9. BCD　**【解析】**本题考查利用函数单调性求值域、基本不等式.

分析：利用基本不等式判断 B，C；根据 $b=\frac{3}{a}$，将问题转化为利用函数单调性求值域，进而判断 A，D.

A：由条件可知，$b=\frac{3}{a}$，$a\in(0,6]$，则 $b\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，故 **A 错误**；

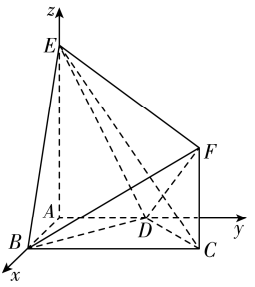
B：由题意可知，$a>0$，$b>0$，则 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}=2\sqrt{3}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{3}$ 时等号成立，则 $a+b$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$，故 **B 正确**；

C：$\frac{2}{a}+\frac{1}{4b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{4b}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{4b}$，即 $a=8b=2\sqrt{6}$ 时等号成立，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{4b}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 **C 正确**；

D：$a-2b=a-\frac{6}{a}$，当 $a\in(0,6]$ 时，函数 $y=a$，$y=-\frac{6}{a}$ 均单调递增，则 $y=a-\frac{6}{a}$ 在区间 $(0,6]$ 上单调递增，∴ 当 $a=6$ 时，$a-2b$ 取得最大值 5，且当 $a\to0^+$ 时，$y\to-\infty$，即 $a-2b\to-\infty$，∴ $a-2b$ 的取值范围为 $(-\infty,5]$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

10. **BC**　【解析】本题考查向量法判断线线、线面位置关系，求线面角与面面角.

根据题意可知 $AD\perp AB$，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，不妨以 A 为原点建立空间直角坐标系，如图所示，



可得 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$，$F\left(1,2,\frac{8}{7}\right)$，则 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{EC}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{BF}=\left(0,2,\frac{8}{7}\right)$.

对于 A，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC}=-1\times1+1\times2+0\times(-2)=1\neq0$，所以 BD，EC 不垂直，故 **A 错误**；

对于 B，易知 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 是平面 ADE 的一个法向量，又 $\overrightarrow{BF}=\left(0,2,\frac{8}{7}\right)$，可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则 $BF\perp AB$，又因为直线 $BF\not\subset$ 平面 ADE，所以 BF//平面 ADE，故 **B 正确**；

对于 C，设 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$ 为平面 BDE 的一个法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-a+b=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-a+2c=0,\end{cases}$ 令 $b=2$，则 $a=2$，$c=1$，可得 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$，设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDF 的一个法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=2y+\frac{8}{7}z=0,\end{cases}$ 令 $z=-7$，则 $x=4$，$y=4$，可得 $\boldsymbol{n}=(4,4,-7)$，所以平面 BDE 与平面 BDF 的夹角的余弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{9}{\sqrt{9}\times\sqrt{81}}=\frac{1}{3}$，故 **C 正确**；

对于 D，设直线 CE 与平面 BDE 所成角为 θ，而 $\overrightarrow{EC}=(1,2,-2)$，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EC},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{EC}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{4}{\sqrt{9}\times\sqrt{9}}=\frac{4}{9}$（提示：线面角 θ 的正弦值等于直线的方向向量 $\boldsymbol{a}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 所成角的余弦值的绝对值，即 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle|$），故 **D 错误**. 故选 BC.

11. **ABD**　【解析】本题考查椭圆的离心率及椭圆中的最值问题.

对于 A，直线 l 垂直于 x 轴时，设 $|AF_2|=n$，则 $|AF_1|=2n$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}n$，又 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，因此离心率 $e=\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|+|AF_2|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 **A 正确**.

对于 B，设 T 为椭圆短轴端点，则 $|F_1T|=|F_2T|=a=\sqrt{3}c$，又 $|F_1F_2|=2c$，则 $\cos\angle F_1TF_2=\frac{3c^2+3c^2-4c^2}{2\cdot\sqrt{3}c\cdot\sqrt{3}c}>0$，又 $\angle F_1TF_2\in(0,\pi)$，所以 $0<\angle F_1TF_2<\frac{\pi}{2}$（提示：若 F_1，F_2 为椭圆的左、右焦点，P 为椭圆上的动点，设 $\angle F_1PF_2=\gamma$，则当 P 为短轴

端点时，γ 最大），所以若 $\triangle AF_1F_2$ 为直角三角形，直角只能是 $\angle AF_1F_2$ 或 $\angle AF_2F_1$，当 $\angle AF_1F_2=90°$ 时，点 A 在过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线上，该直线与椭圆有 2 个交点，当 $\angle AF_2F_1=90°$ 时，点 A 在过点 F_2 且垂直于 x 轴的直线上，该直线与椭圆有 2 个交点，所以椭圆上存在 4 个点使得 $\triangle AF_1F_2$ 为直角三角形，故 **B 正确**.

对于 C，由上知，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，且 $a=\sqrt{3}$，则 $c=1$，在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{|AF_2|}{\sin\alpha}=\dfrac{|AF_1|}{\sin\beta}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]}=\dfrac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$，根据比例关系得 $\dfrac{|AF_1|+|AF_2|}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$，其中 $|AF_2|+|AF_1|=2a$，则有 $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{e}=\sqrt{3}$，设 $\theta=\angle F_1AF_2$，则 $\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{3}\sin(\pi-\theta)=\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}$，故需求 $\cos^2\theta$ 的最小值，

因为 $\cos\theta=\dfrac{|AF_1|^2+|AF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|AF_1||AF_2|}=\dfrac{(|AF_1|+|AF_2|)^2-2|AF_1||AF_2|-4}{2|AF_1||AF_2|}=\dfrac{8-2|AF_1||AF_2|}{2|AF_1||AF_2|}=\dfrac{4}{|AF_1||AF_2|}-1$，其中 $|AF_1||AF_2|\leqslant\dfrac{(|AF_1|+|AF_2|)^2}{4}=3$，所以 $\cos\theta=\dfrac{4}{|AF_1||AF_2|}-1\geqslant\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$，当且仅当 $|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{3}$ 时取等号，故 $\cos^2\theta$ 的最小值为 $\dfrac{1}{9}$，所以 $\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，故 **C 错误**.

对于 D，由正弦定理知 $2R=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$，则 $R=\dfrac{1}{\sin\theta}$.

$\triangle AF_1F_2$ 的周长为 $|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=2\sqrt{3}+2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}(2+2\sqrt{3})\times r=\dfrac{1}{2}|AF_1||AF_2|\sin\theta$，得 $r=\dfrac{|AF_1||AF_2|\sin\theta}{2+2\sqrt{3}}$，因此 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{|AF_1||AF_2|\sin^2\theta}$，又 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=-\dfrac{16}{(|AF_1||AF_2|)^2}+\dfrac{8}{|AF_1||AF_2|}$，则 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4-\dfrac{8}{|AF_1||AF_2|}}\geqslant\dfrac{3}{4}(1+\sqrt{3})$，当且仅当 $|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{3}$ 时取等号，故 **D 正确**. 故选 ABD.

12. $\dfrac{2}{3}$　【解析】本题考查两角差的余弦公式、正弦的二倍角公式.

因为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin2\alpha\sin2\beta=2\sin\alpha\cos\alpha\times2\cos\beta\sin\beta=4\sin\alpha\sin\beta\times\cos\alpha\cos\beta=4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}$.

13. $\frac{9}{32}$ 【解析】本题考查锥体、球体体积的有关计算.

设圆锥底面半径为 r，因为圆锥的轴截面是等边三角形，所以圆锥母线长为 $2r$，圆锥的高 $h=\sqrt{3}r$. 设球 O 的半径为 R，球心 O 到圆锥底面圆心的距离为 d，则 $d=h-R=\sqrt{3}r-R$，所以 $R^2=(\sqrt{3}r-R)^2+r^2$，化简得 $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$. 该圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$，球 O 的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi r^3$，故圆锥与球 O 的体积的比值为 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3}{\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi r^3}=\frac{9}{32}$.

14. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 【解析】本题考查根据极值点求参数.

分析：求导后令导函数为 0，可得 $x=0$ 或 $x=\frac{2a-1}{a}$，分类讨论 0 和 $\frac{2a-1}{a}$ 的大小，确定函数的单调性，进而求解.

由 $f(x)=\frac{ax^2+x+1}{e^x}$（$a>0$），求导可得 $f'(x)=\frac{(2ax+1)e^x-(ax^2+x+1)e^x}{e^{2x}}=\frac{-ax^2+2ax-x}{e^x}=\frac{-ax^2+(2a-1)x}{e^x}$（$a>0$）.

令 $f'(x)=0$，可得 $x=0$ 或 $x=\frac{2a-1}{a}$.

①当 $\frac{2a-1}{a}=0$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=-\frac{x^2}{2e^x}\leqslant 0$ 恒成立，$f(x)=\frac{ax^2+x+1}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，不符合题意；

②当 $\frac{2a-1}{a}>0$ 时，因为 $a>0$，所以 $a>\frac{1}{2}$，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{2a-1}{a}$，由 $f'(x)<0$，得 $x<0$ 或 $x>\frac{2a-1}{a}$，即 $f(x)=\frac{ax^2+x+1}{e^x}$ 在 $(-\infty,0)$，$\left(\frac{2a-1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,\frac{2a-1}{a}\right)$ 上单调递增，即函数 $f(x)=\frac{ax^2+x+1}{e^x}$ 在 $x=0$ 处取得极小值，不符合题意；

③当 $\frac{2a-1}{a}<0$ 时，因为 $a>0$，所以 $0<a<\frac{1}{2}$，由 $f'(x)>0$，得 $\frac{2a-1}{a}<x<0$，由 $f'(x)<0$，得 $x<\frac{2a-1}{a}$ 或 $x>0$，即 $f(x)=\frac{ax^2+x+1}{e^x}$ 在 $\left(-\infty,\frac{2a-1}{a}\right)$，$(0,+\infty)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{2a-1}{a},0\right)$ 上单调递增，即函数 $f(x)=\frac{ax^2+x+1}{e^x}$ 在 $x=0$ 处取得极大值，符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

满分小卷 ▸ 2

1. B 【解析】本题考查复数的乘方运算、复数的模.

复数 $z=-\mathrm{i}$，则 $|z^{2\,025}-z^{2\,026}|=|(-\mathrm{i})^{2\,025}-(-\mathrm{i})^{2\,026}|=|(-\mathrm{i})-(-1)|=|-\mathrm{i}+1|=\sqrt{2}$. 故选 B.

2. D 【解析】本题考查等差数列的性质.

数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $a_2+a_6=2a_4=a_4+4$，得 $a_4=4$，又 $a_3+a_4=7$，所以 $a_3=3$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=1$，则 $a_7=a_4+3d=7$. 故选 D.

3. B 【解析】本题考查集合的交集运算.

由 $A\cap B=\{(1,3)\}$，可得 $(1,3)\in A$，$(1,3)\in B$. 将 $(1,3)$ 代入 $y=2ax$，得 $3=2a\cdot 1$，解得 $a=\dfrac{3}{2}$；将 $(1,3)$ 和 $a=\dfrac{3}{2}$ 代入 $y=ax-b$，得 $3=\dfrac{3}{2}\times 1-b$，解得 $b=\dfrac{3}{2}-3=-\dfrac{3}{2}$. 故选 B.

4. C 【解析】本题考查诱导公式、二倍角的余弦公式.

$\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{10}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{5}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]=-\cos\left[2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{5}\right)\right]=2\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{5}\right)-1=2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-1=\dfrac{7}{25}$. 故选 C.

5. C 【解析】本题考查频率分布直方图的应用.

对于 A，由频率分布直方图可得 $(0.01+n+0.035+m+0.01)\times 10=1$（提示：频率分布直方图中小矩形面积之和为 1），又 $m=2n$，解得 $n=0.015$，$m=0.03$，故 **A 正确**；

对于 B，满意度计分的众数的估计值为最高小矩形底边中点的横坐标 75，故 **B 正确**；

对于 C，满意度计分的平均分约为 $(55\times 0.01+65\times 0.015+75\times 0.035+85\times 0.03+95\times 0.01)\times 10=76.5$，故 **C 错误**；

对于 D，前两组的频率之和为 0.25，所以满意度计分的第 25 百分位数约为 70，故 **D 正确**. 故选 C.

6. A 【解析】本题考查已知分段函数存在最小值求参数的取值范围.

设 $g(x)=x\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g(-x)=-x\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$，因为 $g(x)-g(-x)=x\ln 1=0$，所以 $g(x)$ 为偶函数.

关键点

当 $x>0$ 时，$y=x$ 单调递增，$\ln(\sqrt{1+x^2}+x)>0$ 且 $y=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 单调递增，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

关键点

所以函数 $y=x\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+a(x\in\mathbf{R})$ 的最小值为 a，此时 $x=0$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)>a$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\cos x$，因此 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，因为 $f(x)$ 存在最小值，所以 $a\geqslant -1$. 故选 A.

7. A 【解析】本题考查向量的坐标运算.

分析：设无人机主动飞行对应的向量为 $\boldsymbol{v}$，依题意可得 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{v}+|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\omega}$，列方程求解即可.

设无人机主动飞行对应的向量为 $\boldsymbol{v}=(x,y)$，则飞行路程为 $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{x^2+y^2}$，由题意可得 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{v}+|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\omega}=\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{v}|,y-\right.$

关键点

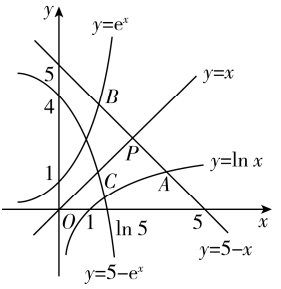
$\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{v}|\Big)=(-1,-2)$，则$\begin{cases}x+\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{v}|=-1,\\ y-\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{v}|=-2,\end{cases}$可得 $x+y=-3$，即 $y=-3-x$，由 $x+\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{v}|=-1$，可得 $x+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{v}|=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，则 $(x+1)^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}[x^2+(-3-x)^2]$，解得 $x=-\frac{7}{2}$，则 $y=\frac{1}{2}$，所以无人机主动飞行对应的向量为$\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. 故选 A.

8. D 【解析】本题考查对数、指数函数图象的应用.

易知 $e^x>x$，∴ $5-e^x<5-x$，故 $y=5-e^x$ 的图象在直线 $y=5-x$ 的下方. 关键点

∵ $x+\ln x=y+e^y=e^z+\ln z=5$，∴ $\ln x=5-x$，$e^y=5-y$，$\ln z=5-e^z$.

如图，x 为函数 $y=\ln x$ 的图象与直线 $y=5-x$ 的交点 A 的横坐标，y 为函数 $y=e^x$ 的图象与直线 $y=5-x$ 的交点 B 的横坐标，z 为函数 $y=\ln x$ 的图象与函数 $y=5-e^x$ 的图象的交点 C 的横坐标，由图知，$y<x$，$z<x$，而 $e^y+y=e^z+\ln z=5<e^z+z$，由 $y=e^x+x$ 为增函数得 $y<z$，故 $y<z<x$，故 **A，B 错误**.



由$\begin{cases}y=x,\\ y=5-x,\end{cases}$得 $P\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.

∵ $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，∴ 点 $A(x,\ln x)$ 和点 $B(y,e^y)$ 关于点 $P\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ 对称，且 $\frac{5}{2}<x<5$，$0<y<\frac{5}{2}$，∴ $x+y=5$ 且 $\ln x=y$，即 $e^y=x$，∴ $\ln x+y=2y<5$，故 **C 错误**.

∵ $e^y=x$，∴ $e^y+z=x+z>x+y=5$，故 **D 正确**. 故选 D.

9. ACD 【解析】本题考查条件概率、相互独立事件的概率乘法公式.

对于 A，因为 $A\subseteq B$，所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$，由于 $0<P(B)\leqslant 1$，则 $P(A)\leqslant P(A|B)$，故 **A 正确**；

对于 B，因为 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1.4-P(AB)$，

由于$\begin{cases}P(A)\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1,\\ P(B)\leqslant P(A\cup B)\leqslant 1,\end{cases}$则 $0.4\leqslant P(AB)\leqslant 0.6$，所以 $P(AB)$ 的最小值不可能为 0.38，故 **B 不正确**；

对于 C，若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，A，B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，则 $AB\neq\varnothing$，故 **C 正确**；

对于 D，若 $AB=\varnothing$，则 $A\subseteq\overline{B}$，所以 $P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)}{P(\overline{B})}$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

10. BCD 【解析】本题考查椭圆的标准方程、椭圆的对称性.

分析：本题要抓住椭圆进行的是旋转变换，其基本量大小不改变这一点.

由题意可知，“斜椭圆”C 关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 对称，联立$\begin{cases}y=x,\\ x^2+y^2+xy=1,\end{cases}$可得 $x^2=\frac{1}{3}$，联立$\begin{cases}y=-x,\\ x^2+y^2+xy=1,\end{cases}$可得 $x^2=1>$

$\frac{1}{3}$，所以“斜椭圆”C 的两焦点所在的直线方程为 $y=-x$（提示：长轴是过焦点的最长的弦），**A 错误**；

由 A 可知，直线 $y=x$ 与“斜椭圆”C 相交的两点之间的距离等于短轴长，其长为 $2\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，直线 $y=-x$ 与“斜椭圆”C 相交的两点之间的距离等于长轴长，其长为 $2\times\sqrt{2}\times\sqrt{1}=2\sqrt{2}$，故焦距为 $2\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 C 的离心率为 $\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，**B 正确**；

旋转不改变椭圆的长、短轴大小，旋转前的椭圆的焦点在 x 轴上，则旋转前的椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1$，**C 正确**；

因为关于 x 的方程 $x^2+xy+y^2-1=0$ 有解，所以 $y^2-4(y^2-1)\geqslant 0$（提示：$\Delta\geqslant 0$），解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，**D 正确**. 故选 BCD.

1 min 速解　武汉大学——王梓秋

学霸提示：图象旋转问题可以使用转轴公式来快速求解原图象对应的方程.

设 (x',y') 为旋转前椭圆上的点，(x,y) 为“斜椭圆”C 上的点，则 $\begin{cases}x=x'\cos(-45°)-y'\sin(-45°),\\ y=x'\sin(-45°)+y'\cos(-45°),\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}y=\frac{y'-x'}{\sqrt{2}},\\ x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\end{cases}$

将 $\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\frac{y'-x'}{\sqrt{2}}\right)$ 代入“斜椭圆”C 的方程可得 $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{\frac{2}{3}}=1$，故 **C 正确**.

由此可知，该椭圆的长半轴长 $a=\sqrt{2}$，短半轴长 $b=\sqrt{\frac{2}{3}}$，半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2-\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 **B 正确**.

学霸点拨：**转轴公式**：设原坐标系绕原点逆时针旋转角度 θ 得到新坐标系，点 P 在原坐标系中的坐标为 (x,y)，在新坐标系中的坐标为 (x',y')，则 $\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}$

11. **BCD**　【解析】本题考查利用导数研究函数的图象与性质.

对于选项 A，B，分析：将 $f(x)$ 的表达式写成分段函数形式，分类讨论 $f(x)$ 的单调性即可求解.

$f(x)=(x-2)\ln|x|=\begin{cases}(x-2)\ln(-x),x<0,\\ (x-2)\ln x,x>0\end{cases}$（提示：去掉绝对值号后分类讨论）. 当 $x<0$ 时，$f'(x)=1-\frac{2}{x}+\ln(-x)$，设 $y=$

$1-\frac{2}{x}+\ln(-x)$，则 $y'=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{2+x}{x^2}$，当 $x<-2$ 时，$y'<0$，当 $-2<x<0$ 时，$y'>0$，因此当 $x=-2$ 时，y 取得最小值，则 $y\geqslant y_{\min}=1+1+\ln 2>0$，即当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，则在 $(-\infty,0)$ 上无极值. 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\ln x+\frac{x-2}{x}=\ln x-\frac{2}{x}+1$，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，注意到 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}>0$（提示：因为 $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}>3>(e^{\frac{1}{3}})^3$，所以 $\ln\frac{3}{2}>\ln e^{\frac{1}{3}}$，则 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}>\ln e^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}=0$），$f'(1)=-1<0$，所以存在唯一的 $x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 使得 $f'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 x_0 为 $f(x)$ 唯一的极小值点，故 **A 错误，B 正确.**

对于 C，分析：写出 $f(x_0)$ 的表达式，结合 x_0 的范围判断.

$f'(x_0)=\ln x_0-\frac{2}{x_0}+1=0$，因此 $\ln x_0=\frac{2}{x_0}-1$，所以 $f(x_0)=(x_0-2)\ln x_0=(x_0-2)\left(\frac{2}{x_0}-1\right)=4-\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)$，因为 $1<x_0<\frac{3}{2}$，所以 $\frac{25}{6}<x_0+\frac{4}{x_0}<5$（提示：对于对勾函数 $y=x_0+\frac{4}{x_0}$，当 $x_0>0$ 时，最小值点为 2，函数在 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，因此分别代入 $x_0=1$ 和 $x_0=\frac{3}{2}$ 即可得到 $x_0+\frac{4}{x_0}$ 的范围），则 $-1<4-\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)<-\frac{1}{6}$，故 $f(x_0)<-\frac{1}{6}$，故 **C 正确.**

对于 D，分析：分 $x<0$，$x>0$ 两种情况分析 $f'(x)=4$ 的解的个数，即可判断.

当 $x<0$ 时，令 $f'(x)=1-\frac{2}{x}+\ln(-x)=4$，设 $-x=t$，$t>0$，则 $\ln t+\frac{2}{t}-3=0$，令 $g(t)=\ln t+\frac{2}{t}-3$（提示：构造函数，从而将方程根的问题转化为对应函数的零点问题），所以 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}=\frac{t-2}{t^2}$，当 $t\in(0,2)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减；当 $t\in(2,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，$g(t)_{\min}=g(2)=\ln 2-2<0$，$g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-3>0$，当 $t\to+\infty$ 时，$g(t)\to+\infty$，所以 $g(t)$ 在 $(0,2)$，$(2,+\infty)$ 上各有一个零点 t_1，t_2，所以 $f'(x)=4$ 在 $(-\infty,0)$ 上的两根为 $-t_1$，$-t_2$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\ln x-\frac{2}{x}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to0^+$ 时，$f'(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，存在唯一的 $x_1\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(x_1)=4$，所以函数 $f(x)$ 的图象有且只有 3 条斜率为 4 的切线，故 **D 正确.** 故选 BCD.

12. -4 【解析】本题考查函数值的求解.

因为 $f(1)+f(-1)=(\tan 1+a-1)+[\tan(-1)-a-1]=-2$，所以 $f(-1)=-2-f(1)=-2-2=-4$.

一题多解 由题知 $f(1)=\tan 1+a-1=2$，则 $a=3-\tan 1$，所以 $f(-1)=\tan(-1)-3+\tan 1-1=-4$.

13. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　【解析】本题考查四面体的外接球问题，空间线、面的位置关系.

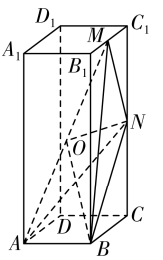
分析：通过垂直及棱长关系找出与四面体四个顶点距离相等的点，即为外接球球心，进而求解外接球半径.

在 Rt△BCN 与 Rt△MC_1N 中，可得 $\tan\angle BNC=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\tan\angle C_1MN=\sqrt{2}$，即$\angle BNC=\angle C_1MN$，因为$\angle C_1MN+\angle C_1NM=90°$，所以 $\angle BNC+\angle C_1NM=90°$，故 $\angle MNB=90°$，即 $BN\perp MN$.

又 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，BM，$MN\subset$ 平面 BCC_1B_1，则 $AB\perp BM$，$AB\perp MN$.

因为 $BN\cap AB=B$，BN，$AB\subset$ 平面 ABN，所以 $MN\perp$ 平面 ABN，而 $AN\subset$ 平面 ABN，故 $MN\perp AN$.

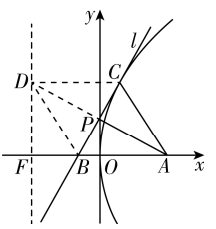
如图，取 AM 的中点为 O，连接 OB，ON，在 Rt△ANM 中，$OA=ON=\frac{1}{2}AM$，在 Rt△ABM 中，$OB=OM=\frac{1}{2}AM$，所以 $OA=OB=OM=ON$（提示：根据直角三角形的性质确定外接球球心的位置），即点 O 到 A，B，M，N 的距离相等，所以点 O 为四面体 $A-BMN$ 的外接球的球心，可得外接球的直径 $AM=\sqrt{BB_1^2+B_1M^2+AB^2}=\sqrt{10}$，所以四面体 $A-BMN$ 的外接球的半径为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.



14. $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=\frac{9}{4},-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ y^2=3-2x,\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{2}\end{cases}$　【解析】本题考查动点轨迹问题.

分析：根据给定条件，借助几何关系及抛物线定义求出点 C 的轨迹方程，再按 Q 是否在点 C 的轨迹内分类求解.

当 P 与 O 不重合时，延长 AP 到 D 使 $|AP|=|DP|$，连接 DC，DB. 由 $|PB|=|PC|$，得四边形 $DCAB$ 为平行四边形，又 $BC\perp AD$，则四边形 $DCAB$ 为菱形，过点 D 作 $DF\perp x$ 轴，垂足为 F，直线 DF：$x=-1$，则 $|OF|=|OA|=1$，又 $|CD|=|CA|$，$CD\perp DF$，则 C 的轨迹为曲线 $y^2=4x(x\neq0)$（提示：由抛物线的定义得到 C 所在的曲线的方程）.



当 P 与 O 重合时，C 点坐标为 $(0,0)$. 综上，C 的轨迹方程为 $y^2=4x$.

①若 Q 在抛物线 $y^2=4x$ 内部，$|CD|=|CA|$，$|QA|$ 为定值，则 关键点 当 Q，C，D 共线时，$|QA|+|AC|+|CQ|$ 有最小值 $|QA|+|QD|=3$，设 $Q(x,y)$ $(x>0)$，则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x+1|=3$ $(x>0,y^2<4x)$，整理得 $y^2=3-2x\left(\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{2}\right)$.

②若 Q 在抛物线 $y^2=4x$ 上或其外部，当 Q，C，A 共线时，关键点 $|QA|+|AC|+|CQ|$ 有最小值 3，即 $2|QA|=3$，设 $Q(x_1,y_1)$，则 $\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\frac{3}{2}$（$y_1^2\geqslant4x_1$），整理得 $(x_1-1)^2+y_1^2=\frac{9}{4}\left(-\frac{1}{2}\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

综上，E 的方程为 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=\dfrac{9}{4}, -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ y^2=3-2x, \dfrac{1}{2}<x\leqslant\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

满分小卷 ▸ 3

1. C 【解析】本题考查散点图、样本相关性.

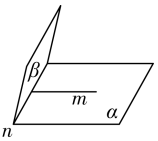
由散点图可得 BMI 增大时，身体脂肪百分比或变大或变小，故 **A，B 错误**；根据散点图的分布可得 BMI 与身体脂肪百分比正相关，故 **C 正确，D 错误**. 故选 C.

2. C 【解析】本题考查全称量词命题与存在量词命题真假的判断.

令 $x=4$，则 $x>\sqrt{x}$ 显然成立，p 是真命题. $\neg q$：$\exists x\in\mathbf{R}, x+|x|\leqslant 0$，当 $x=0$ 时，$x+|x|=0$，故 $\neg q$ 是真命题，q 是假命题. 故选 C.

3. C 【解析】本题考查空间线面位置关系的判断、充分条件的应用.

对于 A，当 $m\perp\alpha, m\perp\beta$ 时，$\alpha/\!/\beta$，故 **A 错误**；对于 B，当 $\alpha\perp\gamma, \beta\perp\gamma$ 时，平面 α,β 可能平行或相交，故 **B 错误**；对于 C，当 $m\perp\beta, m\subset\alpha$ 时，由面面垂直的判定定理可得 $\alpha\perp\beta$，故 **C 正确**；对于 D，如图，设 α,β 的夹角为锐角，此时满足 $\alpha\cap\beta=n, m\subset\alpha, m\perp n$，但 α 与 β 不垂直，故 **D 错误**. 故选 C.



4. C 【解析】本题考查两角和与差的正弦公式.

$\sin[(\alpha+\gamma)+\beta]=\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta+\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta=\dfrac{1}{3}$.

设 $\sin(\alpha-\beta+\gamma)=x$，即 $\sin[(\alpha+\gamma)-\beta]=\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta=x$，

则 $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta+\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta}=\dfrac{1}{3x}$，

得 $\dfrac{\tan(\alpha+\gamma)+\tan\beta}{\tan(\alpha+\gamma)-\tan\beta}=\dfrac{1}{3x}$.

又 $\tan(\alpha+\gamma)=3\tan\beta$，所以 $x=\dfrac{1}{6}$. 故选 C.

5. D 【解析】本题考查三角函数中 ω 的取值范围.

函数 $f(x)=\left|2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$ 的图象相当于把 $y=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象中位于 x 轴下方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴上方后所形成的图象，

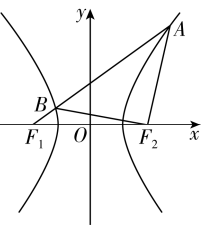
则由题意有 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{3}\geqslant\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\\ \pi\omega+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\pi+k\pi,\\ \pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega},\\ \omega>0,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}\Rightarrow\begin{cases}\omega\geqslant 2k+\dfrac{1}{3},\\ \omega\leqslant\dfrac{2}{3}+k,\\ 0<\omega\leqslant 1,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,

则 $\dfrac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{2}{3}$. 故选 D.

6. C 【解析】本题考查双曲线的离心率.

设 $|AF_2|=m$，则 $|BF_2|=m$，由双曲线定义可知 $|AF_1|=m+2a$，$|BF_1|=m-2a$，则 $|AB|=|AF_1|-|BF_1|=4a$.

又 $\triangle ABF_2$ 为等腰直角三角形，则



$|AB|=\sqrt{2}|AF_2|$，即 $4a=\sqrt{2}m$，得 $m=2\sqrt{2}a$，则 $|AF_2|=2\sqrt{2}a$，$|AF_1|=(2\sqrt{2}+2)a$.

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理知 $\cos\angle F_1AF_2=\dfrac{|AF_2|^2+|AF_1|^2-|F_1F_2|^2}{2|AF_2|\cdot|AF_1|}$，

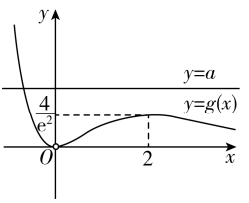
关键点

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{(2\sqrt{2}a)^2+[(2\sqrt{2}+2)a]^2-4c^2}{2\cdot2\sqrt{2}a\cdot(2\sqrt{2}+2)a}$，整理可得 $c^2=3a^2$，所以 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=3$，$e=\sqrt{3}$，故选 C.

7. A 【解析】本题考查函数的零点.

分析：将零点问题转化为函数图象交点问题，然后利用导数知识分析函数性质，画出大致图象，数形结合可得答案.

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $f(x)$ 有且只有一个零点，所以方程 $\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{a}{x}=0$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上有且只有一个根，即函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的图象与直线 $y=a$ 有且只有一个交点. $g'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$，令 $g'(x)>0$，解得 $x\in(0,2)$，令 $g'(x)<0$，解得 $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，则 $g(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $g(2)=\dfrac{4}{e^2}$，当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0^+$，作出 $g(x)$ 的大致图象和直线 $y=a$ 如图所示.



由图可得，若函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的图象与直线 $y=a$ 有且只有一个交点，则 $a>\dfrac{4}{e^2}$. 故选 A.

8. C 【解析】本题考查等比数列、概率的综合.

分析：由题意可列出经过 n 次传球后，球在甲手中的概率的递推关系式，构造数列，由于甲传球时等可能地将球传给另外两个人中的任何一人，故由对称性结合对立事件的概率计算公式求解.

设事件 $A_n=$“经过 n 次传球后，球在甲手中”，$B_n=$“经过 n 次传球后，球在乙手中”，$C_n=$“经过 n 次传球后，球在丙手中”，由题意可知，$P(A_{n+1})=\dfrac{1}{2}P(B_n)+\dfrac{1}{2}P(C_n)$.

又 $P(A_n)+P(B_n)+P(C_n)=1$，所以 $P(A_{n+1})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}P(A_n)$，即 $P(A_{n+1})-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left[P(A_n)-\dfrac{1}{3}\right]$.

因为第 1 次由甲传球，所以 $P(A_1)=0$，所以 $\left\{P(A_n)-\dfrac{1}{3}\right\}$ 是以 $P(A_1)-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$ 为首项，$-\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故 $P(A_n)-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow P(A_n)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

因为甲传球时等可能地将球传给另外两个人中的任何一人，

关键点

所以 $P(B_n)=P(C_n)$，

所以经过 6 次传球后，球恰在乙手中的概率 $P(B_6)=\frac{1}{2}[1-P(A_6)]=\frac{21}{64}$. 故选 C.

9. BC 【解析】本题考查由所给定义判断元素与集合的关系.

对于 A，若 $-1\in M$，令 $x=y=-1$，则 $\frac{x}{y}=1\in M$，令 $x=-1,y=1$，则 $x+y=0\in M$，令 $x=1,y=0$，不存在 $\frac{x}{y}$，即 $y\neq 0$，矛盾，所以 $-1\notin M$，故 **A 错误**；

对于 B，由于集合 M 非空，取任意元素 $x\in M$，根据性质①，得 $\frac{x}{x}=1\in M$，再根据性质②，得 $1+1=2\in M$，进而 $1+2=3\in M$，$\cdots$，$2\,024\in M$，$2\,025\in M$，故 **B 正确**；

对于 C，因为 $1\in M,x\in M$，所以 $\frac{1}{x}\in M$，因为 $y\in M$，$\frac{1}{x}\in M$，所以 $\frac{y}{\frac{1}{x}}=xy\in M$，故 **C 正确**；

对于 D，若 $x=1,y=2$，则 $x-y=-1\notin M$，故 **D 错误**. 故选 BC.

10. ABD 【解析】本题考查绝对值函数的奇偶性、零点、单调性、最值.

$f(x)$ 的定义域为 **R**.

对于 A，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=2^{|-x|}-|-x-a|-a=f(x)=2^{|x|}-|x-a|-a$，即 $|x-a|=|x+a|$ 恒成立，则 $a=0$，经检验，$a=0$ 时，$f(x)$ 为偶函数，**A 正确**.

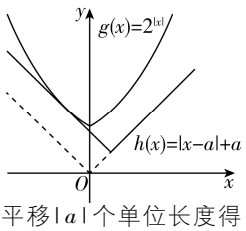
对于 B，当 $a=2$ 时，$f(x)=2^{|x|}-(|x-2|+2)$，

当 $x\in(0,2)$ 时，$y=2^{|x|}$ 单调递增，$y=|x-2|+2=4-x$ 单调递减，因此 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，

又 $f(0)=-3<0,f(2)=2>0$，由函数零点存在定理知，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上必然存在零点，**B 正确**.

对于 C，当 $a=2$ 时，$f(-4)=16-8=8,f(-3)=1<f(-4)$，此时 $f(x)$ 不是增函数，**C 错误**.

对于 D，设 $g(x)=2^{|x|},h(x)=|x-a|+a$，则 $f(x)=g(x)-h(x)$，在坐标系中作出 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的大致图象，易知 $h(x)$ 的图象是由 $y=|x|$ 的图象向右（当 $a>0$ 时）或向左（当 $a<0$ 时）平移 $|a|$ 个单位长度，再向上（当 $a>0$ 时）或向下（当 $a<0$ 时）平移 $|a|$ 个单位长度得到的.

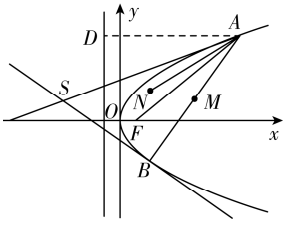


如图所示，当 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象在第二象限相切时，$f(x)$ 的最小值为 0，**D 正确**. 故选 ABD.

11. BCD 【解析】本题考查抛物线的定义、直线与抛物线的位置关系、三角形面积.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线 AB 的方程为 $x=ny+m$.

对于 A，因为抛物线 C 的焦点为 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以 $p=1$，抛物线 C 的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$. 如图，过点 A 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 D，点 N 在抛物线内部，



由抛物线的定义可知，$|AF|=|AD|$，则 $|AN|+|AF|=|AN|+$

$|AD|\geqslant|ND|=\frac{3}{2}$，当且仅当 N 在直线 AD 上时取等号，故 **A 错误**.

对于 B，设过点 A 的切线方程为 $x=t(y-y_1)+x_1$，与抛物线方程 $y^2=2x$ 联立，化简并整理得 $y^2-2ty+2ty_1-2x_1=0$.

又 $y_1^2=2x_1$，所以 $y^2-2ty+2ty_1-y_1^2=0$，令 $\Delta=4t^2-8ty_1+4y_1^2=4(t-y_1)^2=0$，得 $t=y_1$，所以过点 A 的切线方程为 $x=y_1(y-y_1)+x_1$，即 $y_1y=x+x_1$.

同理可得，过点 B 的切线方程为 $y_2y=x+x_2$.

联立 $\begin{cases}y_1y=x+x_1,\\y_2y=x+x_2,\end{cases}$ 得 $S\left(\frac{y_1y_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 因为线段 AB 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以点 S,M 的纵坐标相等，故 **B 正确**.

对于 C，将直线 AB 的方程 $x=ny+m$ 与 $y^2=2x$ 联立，化简并整理得 $y^2-2ny-2m=0$，则 $y_1y_2=-2m,y_1+y_2=2n$. 因为点 S 在直线 $x=-2$ 上，所以 $\frac{y_1y_2}{2}=-2$，所以 $m=2$，即直线 AB 的方程为 $x=ny+2$，则直线 AB 过点 $(2,0)$，故 **C 正确**.

对于 D，因为 A,F,B 三点共线，所以 $\frac{y_1y_2}{2}=-m=-\frac{1}{2}$（提示：过抛物线焦点 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，分别以 A,B 为切点，作抛物线的切线，则这两条切线的交点的轨迹为抛物线的准线），则 $m=\frac{1}{2}$，即直线 AB 的方程为 $x-ny-\frac{1}{2}=0$，$S\left(-\frac{1}{2},n\right)$，所以点 S 到直线 AB 的距离 $d=\frac{\left|-\frac{1}{2}-n^2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+n^2}}=\sqrt{1+n^2}$，$|AB|=\sqrt{1+n^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+n^2}\cdot\sqrt{4n^2+4}=2n^2+2$，

所以 $S_{\triangle ABS}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\sqrt{(1+n^2)^3}$，当 $n=0$ 时取最小值 1，故 **D 正确**. 故选 BCD.

12. -2　**【解析】**本题考查平面向量线性运算的坐标表示、由向量平行求参数.

已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1),\boldsymbol{b}=(0,2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,1),2\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=(2,-2-2k)$，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 平行，则 $1\times(-2-2k)-2\times1=0$，即 $k=-2$.

13. $-\frac{1}{2}(1+\ln 2)$　**【解析】**本题考查公切线问题.

由题意得 $f'(x)=\frac{1}{x},g'(x)=2x$.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的公共点的横坐标为 $x_0(x_0>0)$，则 $\ln x_0+a=x_0^2+b$，

根据切线斜率相等可得 $\frac{1}{x_0}=2x_0$，解得 $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$（负值舍去），

则 $b-a=\ln x_0-x_0^2=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(1+\ln 2)$.

14. 8π　$12\pi+16$　**【解析】**本题考查几何体的体积和表面积.

设 $\overset{\frown}{BC}$ 对应的圆的半径为 r，$\overset{\frown}{AD}$ 对应的圆的半径为 R，根据弧长公式可知，$\overset{\frown}{BC}=\frac{\pi}{3}r,\overset{\frown}{AD}=\frac{\pi}{3}R$.

因为 $\overset{\frown}{AD}$ 的长度为 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度的 2 倍，即 $\overset{\frown}{AD}=2\overset{\frown}{BC}$，所以 $R=2r$.

又 $CD=R-r=2$，所以 $r=2,R=4$.

根据扇环面积公式可得曲池的底面 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times$

$\frac{\pi}{3}\times(16-4)=2\pi$,

则该曲池的体积 $V=2\pi\times AA_1=8\pi$.

侧面 BB_1C_1C 的面积 $S_1=\overset{\frown}{BC}\times BB_1=\frac{2\pi}{3}\times4=\frac{8\pi}{3}$,

侧面 AA_1D_1D 的面积 $S_2=\overset{\frown}{AD}\times AA_1=\frac{4\pi}{3}\times4=\frac{16\pi}{3}$,

侧面 CC_1D_1D 与 AA_1B_1B 的面积和 $S_3=2\times CD\times CC_1=2\times2\times4=16$,

故该曲池的表面积为 $2S+S_1+S_2+S_3=4\pi+\frac{8\pi}{3}+\frac{16\pi}{3}+16=12\pi+16$.

满分小卷 ▸ 4

1. C 【解析】本题考查由复数相等求参数的值.

由题意得$\begin{cases}a=b+2,\\1=-a,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-3,\\a=-1,\end{cases}$所以 $a+b=-4$. 故选 C.

2. C 【解析】本题考查等差数列基本量的计算.

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意得$\begin{cases}a_1+d=4,\\5a_1+10d=3a_1+9d+6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_8=a_1+7d=16$. 故选 C.

3. B 【解析】本题考查二项展开式中各项的系数.

二项式$(x-1)^4$的展开式中 x 的系数为 $C_4^3(-1)^3=-4$,因此 $(x+2)+(x-1)^4$ 对应的 x 的系数 $a_1=1-4=-3$. 将 $x=1$ 代入 $(x+2)+(x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ 中,得 $3+0=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$,从而 $a_0+2a_1+a_2+a_3+a_4=3-3=0$. 故选 B.

4. D 【解析】本题考查由函数在区间上的单调性求参数取值范围.

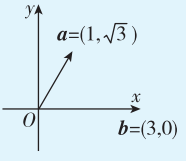
由题知$f'(x)=3ax^2-4x-3\leqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,又 $a=0$ 显然不符合题意,所以$\begin{cases}a<0,\\\Delta=16+12\times3a\leqslant0,\end{cases}$解得 $a\leqslant-\frac{4}{9}$. 故选 D.

5. B 【解析】本题考查投影向量的计算及向量的模.

由题意得$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,则$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{4-4\times3+4\times3^2}=2\sqrt{7}$. 故选 B.

15 s 速解　武汉大学——王梓秋

如图,设 $\boldsymbol{b}=(3,0)$,$\boldsymbol{a}=(x,y)$,由题知 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上投影向量的模为 1,则 $x=1$. 又由于 $\boldsymbol{a}$ 的模为 2,则可取 $y=\sqrt{3}$,于是 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$,所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-5,\sqrt{3})$,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$. 故选 B.



6. D 【解析】本题考查动点的轨迹方程问题.

分析:设出点 A,B,M 的坐标,由题意可得 A,B 两点坐标间的关系式,用 M 点的坐标表示 A,B 的坐标并代入关系式化简即可.

设 $A(x_1,0)$,$B(0,y_2)$,$M(x,y)$,则有 $x+x_1=0$,$y+0=2y_2$,即 $x_1=-x$,$y_2=\frac{y}{2}$,由题意可得 $x_1^2+y_2^2=4$,即$(-x)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=4$,化简得点 M 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$. 故选 D.

7. C 【解析】本题考查三角恒等变换及三角函数的单调性.

分析：先利用辅助角公式化简 $f(x)$ 的表达式，再利用整体代换法与正弦函数的单调性，求解 ω 的取值范围.

$f(x)=\sin\ \omega x+\sqrt{3}\cos\ \omega x=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$，令 $u=\omega x+\dfrac{\pi}{3}$，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，$u\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi(\omega+1)}{3}\right]$. 因为正弦函数 $y=\sin u$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以若 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上不单调，则 $\dfrac{\pi(\omega+1)}{3}>\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\omega>\dfrac{1}{2}$，故 ω 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. 故选 C.

8. C 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性、零点与最值问题.

分析：不等式左边可分为含指数函数的部分和二次函数部分，要使乘积大于等于零恒成立，则两部分应始终同为负或同为非负，先研究含指数函数部分的单调性.

设 $f(x)=e^x-ax$，$a>e$，则 $f'(x)=e^x-a$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a>1$，当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)<0$.

因为 $f(0)=1>0$，$f(x)_{\min}=f(\ln a)<0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$ 有两个不同的零点，记为 x_1，x_2，$0<x_1<\ln a<x_2$，则 $e^{x_1}=ax_1$，$e^{x_2}=ax_2$.

分析：$f(x)$ 与二次函数部分同时先减后增，则只有二次函数有两个零点，且恰是 $f(x)$ 的零点时才能满足题意.

又关于 x 的不等式 $(e^x-ax)(x^2-bx+c)\geqslant 0$ 恒成立，所以 x_1，x_2 恰为函数 $y=x^2-bx+c$ 的零点，则 $b=x_1+x_2$，$c=x_1x_2$，所以

$$\frac{ae^{b-a}}{c}=\frac{ae^{x_1+x_2-a}}{x_1x_2}=\frac{ae^{x_1}e^{x_2}}{e^a x_1x_2}=\frac{a\cdot(ax_1)\cdot(ax_2)}{e^a x_1x_2}=\frac{a^3}{e^a}.$$

令 $g(a)=\dfrac{a^3}{e^a}$，$a>e$，则 $g'(a)=\dfrac{3a^2e^a-a^3e^a}{(e^a)^2}=\dfrac{a^2(3-a)}{e^a}$. 当 $a\in(e,3)$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增；当 $a\in(3,+\infty)$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减. 所以 $g(a)$ 在 $a=3$ 处取得极大值，也是最大值，最大值为 $g(3)=\dfrac{27}{e^3}$，故 $\dfrac{ae^{b-a}}{c}$ 的最大值为 $\dfrac{27}{e^3}$. 故选 C.

9. BC 【解析】本题考查极差、标准差、平均数及中位数性质的应用.

$Y=|a|\cdot X$，故 **A 错误**；$t=|a|s$，故 **D 错误**；由平均值、中位数定义可知 $\bar{y}=a\bar{x}+b$，$p=ma+b$，故 **B，C 正确**. 故选 BC.

10. AC 【解析】本题考查抛物线的光学性质，直线与抛物线的位置关系.

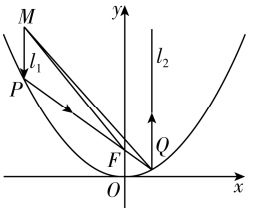
抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 的焦点为 $F(0,1)$，由 $MP/\!/y$ 轴，$M(-4,6)$，得 $P(-4,4)$，直线 PQ 的斜率 $k=\dfrac{4-1}{-4-0}=-\dfrac{3}{4}$，所以直线 PQ 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4}x+1$，由 $\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}x+1,\\ y=\dfrac{1}{4}x^2,\end{cases}$ 得 $Q\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$.

对于 A，$y_1=4$，$y_2=\dfrac{1}{4}$，则 $y_1y_2=1$，**A 正确**；

对于 B，$\tan\ \theta=-\dfrac{3}{4}$，由 $\begin{cases}\cos\ \theta=-\dfrac{4}{3}\sin\ \theta,\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}$ 以及 $\sin\ \theta>0$，得 $\sin\ \theta=\dfrac{3}{5}$，**B 错误**；

对于 C，$\dfrac{S_{\triangle MPF}}{S_{\triangle MQF}}=\dfrac{|PF|}{|QF|}=\dfrac{y_1+1}{y_2+1}=4$，**C 正确**；

对于 D，l_1 与 l_2 之间的距离为 $x_2-x_1=5$，**D 错误**. 故选 AC.



11. **BC**　【解析】本题考查面面平行、面面垂直、异面直线的判断，求异面直线所成角.

分析：翻折问题，先分析翻折前后哪些量变了，哪些量不变.

翻折前，在△BGM 中，因为 $BG=2\sqrt{3}$，$BM=4$，$\angle ABM=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理得 $GM=\sqrt{BG^2+BM^2-2BG\cdot BM\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{12+16-2\times2\sqrt{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以 $BG^2+GM^2=BM^2$，所以 $BG\perp GM$，又 $BG\perp BE$，所以 $BE/\!/GM$，又因为 $CD/\!/BE$，所以 $CD/\!/GM/\!/BH$，且 $CD=GM=BH=2$，所以四边形 $CGMD$ 为矩形，所以翻折后，$BH/\!/C'D'/\!/GM$，$BC'/\!/HD'$，$BG/\!/HM$，$BH=C'D'=GM=2$，$BE\perp BC'$，$BE\perp AB$.

关键点

对于 A，因为 $C'D'/\!/GM$，所以 G，M，D'，C' 四点共面，故 **A 错误**；

对于 B，因为 $BE\perp BC'$，$BE\perp AB$，$BC'\cap AB=B$，BC'，$AB\subset$ 平面 GBC'，所以 $BE\perp$ 平面 GBC'，

关键点

又 $BE\subset$ 平面 $C'BE$，所以平面 $GBC'\perp$ 平面 $C'BE$，故 **B 正确**；

对于 C，因为 $BC'/\!/HD'$，又 $HD'\subset$ 平面 HMD'，$BC'\not\subset$ 平面 HMD'，所以 $BC'/\!/$平面 HMD'，同理 $BG/\!/$平面 HMD'，又 $BC'\cap BG=B$，BC'，$BG\subset$ 平面 $C'BG$，所以平面 $HMD'/\!/$平面 $C'BG$，故 **C 正确**；

关键点

对于 D，因为 $C'D'/\!/GM$，$C'D'=GM$，所以四边形 $GMD'C'$ 为平行四边形，所以 $C'G/\!/D'M$，所以 $\angle BC'G$（或其补角）为异面直线 $D'M$ 与 BC' 所成的角，因为 $BC'=2$，$BG=2\sqrt{3}$，$\angle C'BA=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理得 $C'G=\sqrt{BC'^2+BG^2-2BC'\cdot BG\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{4+12-2\times2\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以 $C'G=BC'$，故 $\angle BGC'=\angle C'BA=\frac{\pi}{6}$，故 $\angle BC'G=\frac{2\pi}{3}$，所以异面直线 $D'M$ 与 BC' 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，故 **D 错误**. 故选 BC.

12. $y=x+\sqrt{2}-1$ 或 $y=x-\sqrt{2}-1$　【解析】本题考查直线与圆相交的弦长问题.

设直线方程为 $y=x+b$，即 $x-y+b=0$，圆 $(x-1)^2+y^2=9$ 的圆心坐标为 $(1,0)$，半径 $r=3$，圆心到直线的距离 $d=\frac{|1+b|}{\sqrt{2}}$，由 $\frac{|1+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}$，解得 $b=\sqrt{2}-1$ 或 $b=-\sqrt{2}-1$，则直线方程为 $y=x+\sqrt{2}-1$ 或 $y=x-\sqrt{2}-1$.

关键点

13. $\left(0,\frac{4}{e^2}\right]$　【解析】本题考查已知曲线过某点的切线条数求参数范围.

设切点坐标为 (x_0,y_0)，则 $\frac{y_0-b}{x_0-a}=f'(x_0)$，即 $\frac{x_0e^{-x_0}-b}{x_0-a}=(1-x_0)\cdot e^{-x_0}$，整理得 $(x_0^2-ax_0+a)e^{-x_0}-b=0$，令 $h(x)=(x^2-ax+a)e^{-x}-b$，则

$h'(x)=-e^{-x}\cdot[x^2-(a+2)x+2a]=-e^{-x}(x-2)(x-a)$，$a<0$.

当 $x\in(-\infty,a)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调递减，函数值的取值范围为 $(h(a),+\infty)$；当 $x\in(a,2)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(a,2)$ 上单调递增，函数值的取值范围为 $(h(a),h(2))$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，函数值的取值范围为 $(-b,h(2))$.

依题意可知函数 $h(x)$ 有 3 个不同的零点，

则 $\begin{cases}h(a)<0,\\h(2)>0,\\-b<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ae^{-a}-b<0,\\(4-a)e^{-2}-b>0,\\-b<0,\end{cases}$ 即 $0<b<\dfrac{4-a}{e^2}$ 恒成立，

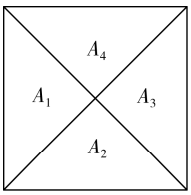
又 $a<0$，则 $0<b\leqslant\dfrac{4}{e^2}$，所以 b 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{4}{e^2}\right]$.

14. 2 040　【解析】本题考查排列组合与数列的综合应用.

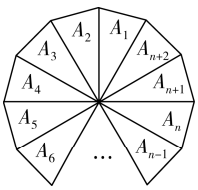
当 $n=3$ 时，3 个区域两两相邻，则 3 种颜色都要使用，所以 $a_3=3\times2\times1=6$.

当 $n=4$ 时，如图①，若 A_1 和 A_3 区域同色，则不同的方案有 $3\times2\times2=12$（种），

若 A_1 和 A_3 区域不同色，则不同的方案有 $3\times2\times1\times1=6$（种），所以 $a_4=12+6=18$.



图①



图②

当有 $(n+2)$ 个区域时，如图②，若 A_{n+1} 和 A_1 区域同色，可以理解为先给只有 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 这 n 个区域的情况（即假设 A_1 与 A_n 相邻）涂色，有 a_n 种方案，再给 A_{n+2} 区域涂色，此时 A_{n+2} 区域有 2 种不同的颜色可用，即共有 $2a_n$ 种方案；若 A_{n+1} 和 A_1 区域不同色，可以理解为先给只有 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,A_{n+1}$ 这 $(n+1)$ 个区域的情况涂色，有 a_{n+1} 种方案，再给 A_{n+2} 区域涂色，此时 A_{n+2} 区域有 1 种颜色可用，即共有 a_{n+1} 种方案.

综上，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$（$n\geqslant3$，$n\in\mathbf{N}^*$），则 $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$，又 $a_3+a_4=24\neq0$，所以数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$（$n\geqslant3$，$n\in\mathbf{N}^*$）是以 2 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}+a_n=24\times2^{n-3}$（$n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*$），

关键点

则 $\sum_{i=3}^{10}a_i=(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+(a_7+a_8)+(a_9+a_{10})=24\times(2^0+2^2+2^4+2^6)=24\times85=2\,040$.

1 min 速解　武汉大学——王梓秋

考虑 $(n+2)$ 边形，从 A_1 开始按照相邻区域不同颜色的方法涂色，涂到 A_{n+2}，忽略 A_{n+2} 与 A_1 是否同色，此时有 $3\times2^{n+1}$ 种涂色方式.

若 A_{n+2} 与 A_1 不同色，则一共有 a_{n+2} 种方法；若 A_{n+2} 与 A_1 同色，则将两者合并为同一个区域，此时有 a_{n+1} 种方法.

于是，$3\times2^{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}$，又 $a_3+a_4=24\neq0$，所以 $\{a_{n+2}+a_{n+1}\}$（$n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$）是公比为 2，首项为 24 的等比数列，后同解析.

满分小卷 ▸ 5

1. D　【解析】本题考查集合的补集、交集运算.

因为 $A=\{x\mid|x-1|>1\}=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，故 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap\mathbf{N}^*=\{1,2\}$. 故选 D.

2. C 【解析】本题考查三角恒等变换.

$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，故角 α 和角 $\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的终边相同，故 $\alpha=\frac{\pi}{4}+\theta+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则

关键点

$\tan(\alpha-\theta)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta+2k\pi-\theta\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$. 故选 C.

3. B 【解析】本题考查样本的数字特征.

由已知得 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-6)^2=24n$，因为删除某个数据后，平均数没有变化，所以删除的数据为 6，因为去掉数据 6 后方差变为 30，所以 $\frac{24n}{n-1}=30$，解得 $n=5$. 故选 B.

4. C 【解析】本题考查双曲线的几何性质.

由题知 C 的渐近线上存在一点 P，使 $\triangle OPF$ 为等边三角形，则 $\frac{b}{a}=\tan 60°=\sqrt{3}$（提示：$\angle POF$ 既是一条渐近线的倾斜角，又是等边三角形的一个内角），所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$. 故选 C.

5. D 【解析】本题考查异面直线所成的角.

设三棱柱棱长为 1，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，易知 $\triangle ABC$ 为正三角形，$\angle BAC=60°$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BB_1}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$|\overrightarrow{B_1C}|^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $|\overrightarrow{B_1C}|=\sqrt{2}$.

设异面直线 AB 与 B_1C 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}\right|=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. 故选 D.

6. A 【解析】本题考查正弦型三角函数的图象与性质、三角函数的图象变换.

由图可知 $A=3$.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，解得 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

将 $\left(\frac{\pi}{12},3\right)$ 代入 $f(x)=3\sin(2x+\varphi)$，得 $2\cdot\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，结合 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得 $g(x)=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\sin 2x$ 的图象.

对于 A，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，正弦函数 $y=\sin u$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，故 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故 **A 正确**.

对于 B，$g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi\neq\frac{\pi}{2}$，故 **B 错误**.

对于 C，$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\neq0$，则 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 不是 $g(x)$ 图象的对称中心，故 **C 错误**.

对于 D，$g(\pi)=3\sin 2\pi=0\neq\pm3$，故直线 $x=\pi$ 不是 $g(x)$ 图象的对称轴，故 **D 错误**. 故选 A.

7. C 【解析】本题考查导数的综合应用.

分析：观察 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}<0$ 的结构特征，可将其转化为同构形式，从而构造函数，结合单调性求 a 的取值范围.

由 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}<0,0<x_1<x_2$，得 $x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$（提示：转化为同构形式）.

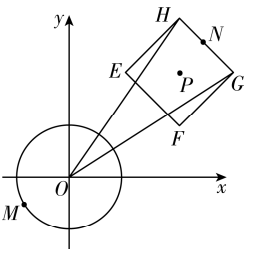
设 $g(x)=xf(x)=x\left(\frac{ae^x}{x}-x\right)=ae^x-x^2,x>0$，$g'(x)=ae^x-2x$，由题意得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $g'(x)\geqslant0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{2x}{e^x}$ 对任意 $x>0$ 恒成立（提示：将不等式恒成立问题转化为函数的最值问题）.

令 $h(x)=\frac{2x}{e^x},x>0$，则 $h'(x)=\frac{2e^x-2xe^x}{e^{2x}}=\frac{2(1-x)}{e^x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)$ 的最大值为 $h(1)=\frac{2}{e}$，因此 $a\geqslant\frac{2}{e}$. 故选 C.

8. D 【解析】本题考查利用给定的定义结合圆的性质求最大值.

分析：利用给定的定义求出点 M,N 的轨迹并画出图形，结合圆的性质求出最大值.

设 $M(x,y)$，由 $d(M,O)\leqslant1$，得 $x^2+y^2\leqslant1$，因此点 M 在以原点为圆心，1 为半径的圆的圆周上或其内部（关键：确定 M 的轨迹）. 设 $N(x',y')$，由 $D(N,P)\leqslant1$，得 $|x'-2|+|y'-2|\leqslant1$，点 N 在以 $E(1,2),F(2,1),G(3,2),H(2,3)$ 为顶点的正方形 $EFGH$ 的边上或其内部（关键：确定 N 的轨迹），当且仅当点 N 与 G 或 H 重合时，$|ON|_{\max}=\sqrt{13}$，所以 $|MN|_{\max}=1+|ON|_{\max}=\sqrt{13}+1$. 故选 D.



9. AD 【解析】本题考查复数的运算、复数的几何意义.

方程 $x^2=-4$ 的复数解为 $2i,-2i$.

对于 A，$z_1+z_2=2i+(-2i)=0$，故 **A 正确**；

对于 B，$z_1^2+z_2^2=-4+(-4)=-8$，故 **B 错误**；

对于 C，若 $z_1=a+bi$，其中 $b>0$，则 $z_1=2i$，所以 $z=\frac{2+i}{z_1}=\frac{2+i}{2i}=\frac{(2+i)i}{(2i)i}=\frac{2i-1}{-2}=\frac{1}{2}-i$，

所以 z 在复平面内对应的点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 在第四象限，故 **C 错误**；

对于 D，$z_1\cdot z_2=(2\mathrm{i})\cdot(-2\mathrm{i})=4$，由 $|z|=1$ 得 z 在复平面内对应的点在单位圆上，

则 $|z-z_1\cdot z_2|=|z-4|$ 等价于单位圆上的点到点 $(4,0)$ 的距离，所以最小值为 $4-1=3$，故 **D 正确**. 故选 AD.

10. ABD 【解析】本题考查利用函数的单调性与奇偶性求最值、解不等式.

选项 A，$f(-x)=\mathrm{e}^{2|-x|}+\cos(-2x)=\mathrm{e}^{2|x|}+\cos 2x$，即 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 **A 正确**；

关键点

选项 B，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+\cos 2x$，$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2\sin 2x>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$f(0)=2$，又 $f(x)$ 是偶函数，所以函数 $f(x)$ 的最小值为 2，无最大值，故 **B 正确**；

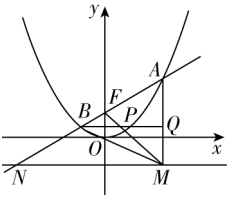
关键点

选项 C，由 A，B 可知，$f(x)$ 在 $(-\pi,0]$ 上单调递减，在 $(0,\pi)$ 上单调递增，故 **C 错误**；

选项 D，不等式 $f(x-1)<f(x)\Leftrightarrow|x-1|<|x|$（提示：由函数的奇偶性和单调性可求得），两边平方得 $-2x+1<0$，得 $x>\frac{1}{2}$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

11. BCD 【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系.

依题意，$p=1$，$F\left(0,\frac{1}{2}\right)$，易知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}(k>0)$.



对于 A，把 $y=kx+\frac{1}{2}$ 代入 $x^2=2y$，得 $x^2-2kx-1=0$，$\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-1$，所以 $|AF|+|BF|=y_1+y_2+1=k(x_1+x_2)+2=2k^2+2>2$（快解：通径长为 2，此时是过焦点的最短弦长，对应直线的倾斜角为零，不符合题意），故 **A 错误**；

对于 B，当直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$ 时，$|AB|=|AF|+|BF|=y_1+y_2+1=k(x_1+x_2)+2=2k^2+2=8$（另解：设直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，所以利用抛物线焦点弦公式可得 $|AB|=\frac{2p}{\cos^2\theta}=8$），**B 正确**；

对于 C，由题意知 $M\left(x_1,-\frac{1}{2}\right)$，则 $k_1=\frac{y_2+\frac{1}{2}}{x_2-x_1}=\frac{\frac{x_2^2}{2}+\frac{1}{2}}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2+1}{2(x_2-x_1)}$，$k_2=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{0-x_1}=-\frac{1}{x_1}$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{x_2^2+1}{2(x_2-x_1)}}{-\frac{1}{x_1}}=-\frac{x_1x_2^2+x_1}{2(x_2-x_1)}=-\frac{-x_2+x_1}{2(x_2-x_1)}=\frac{1}{2}$，**C 正确**；

对于 D，由 $B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2}\right)$，得 $Q\left(x_1,\frac{x_2^2}{2}\right)$，因为 MF 的方程为 $y=$

$-\frac{1}{x_1}x+\frac{1}{2}$，令 $y=\frac{x_2^2}{2}$，得 $x=\frac{x_1-x_1x_2^2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$，所以点 P 为 BQ 的中点，即 $|BP|=|PQ|$，**D 正确**. 故选 BCD.

12. $3-\frac{1}{2^{n-2}}$　【解析】本题考查利用 a_n 与 S_n 的关系求前 n 项和.

由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，$S_n+2a_{n+1}=3$，得 $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+\frac{3}{2}$，则 $S_{n+1}-3=\frac{1}{2}(S_n-3)$，

而 $S_1-3=a_1-3=-2\neq0$，因此数列 $\{S_n-3\}$ 是首项为 -2，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

则 $S_n-3=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $S_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}$.

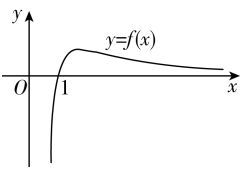
一题多解　将 $n=1$ 代入 $S_n+2a_{n+1}=3$ 中，得 $S_1+2a_2=a_1+2a_2=3$，所以 $a_2=1$.

由 $S_n+2a_{n+1}=3$ 得当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}+2a_n=3$，则 $S_n+2a_{n+1}-S_{n-1}-2a_n=0$，即 $2a_{n+1}-a_n=0$，又 $a_2=1\neq0$，所以 $\{a_n\}$ 从第二项起是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，则 $S_n=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-2}}(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时也符合上式，故 $S_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}$.

13. $\frac{1}{2e}$　$\left[\frac{\ln2}{8},\frac{\ln3}{9}\right)$　【解析】本题考查构造函数法求极值，根据不等式解的个数求参数取值范围.

由 $2f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，可得 $2xf(x)+x^2f'(x)=\frac{1}{x}$，

即 $(x^2f(x))'=\frac{1}{x}$，故 $x^2f(x)=\ln x+C$，C 为常数（关键：由导函数逆求原函数）. 又 $f(1)=0$，解得 $C=0$，故 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，故当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，



所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的极大值为 $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$.

由 $k<f(x)$ 可得 $k<\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，因为 $f(1)=0$，且 $f(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(2)>f(3)>f(4)>0$，

所以若 $k<f(x)$ 恰有 2 个整数解，则整数解为 2，3（关键：确定 2 个整数解的具体取值，进而求得 k 的取值范围），

所以 $f(4)\leqslant k<f(3)$，即 $\frac{\ln4}{4^2}\leqslant k<\frac{\ln3}{3^2}$，化简得 $\frac{\ln2}{8}\leqslant k<\frac{\ln3}{9}$，

故实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{\ln2}{8},\frac{\ln3}{9}\right)$.

14. $\frac{11}{23}$　【解析】本题考查向量的数量积、古典概型.

分析：根据 $|\overrightarrow{OP}|<\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，计算出 x,y 的取值范围，列举所有可能的情况.

已知 $P(x,y)$，$A(1,2^x)$，$B(4,2^{-x})$，$x,y\in\mathbf{Z}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times$

$4+2^x\times2^{-x}=5$,

由$|\overrightarrow{OP}|<\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$可得$\sqrt{x^2+y^2}<5$,即$x^2+y^2<25$,

因为$x,y\in\mathbf{Z}$,所以x只能取$0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$.

当$x=0$时,y可取$-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$,共9种情况;

当$x=\pm1$时,y可取$-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$,共18种情况;

当$x=\pm2$时,y可取$-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$,共18种情况;

当$x=\pm3$时,y可取$-3,-2,-1,0,1,2,3$,共14种情况;

当$x=\pm4$时,y可取$-2,-1,0,1,2$,共10种情况,故共有$9+18+18+14+10=69$(种)情况.

选取的点P满足$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})<0$,即$(x,y)\cdot(5,2^x+2^{-x})=5x+y\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)<0$.

当$x=0$时,$y<0$,则有$y=-4,-3,-2,-1$,共4种情况;

当$x=1$时,$y<-2$,则有$y=-4,-3$,共2种情况;

当$x=-1$时,$y<2$,则有$y=-4,-3,-2,-1,0,1$,共6种情况;

当$x=2$时,$y<-\frac{40}{17}$,则有$y=-4,-3$,共2种情况;

当$x=-2$时,$y<\frac{40}{17}$,则有$y=-4,-3,-2,-1,0,1,2$,共7种情况;

当$x=3$时,$y<-\frac{24}{13}$,则有$y=-3,-2$,共2种情况;

当$x=-3$时,$y<\frac{24}{13}$,则有$y=-3,-2,-1,0,1$,共5种情况;

当$x=4$时,$y<-\frac{320}{257}$,则有$y=-2$,共1种情况;

当$x=-4$时,$y<\frac{320}{257}$,则有$y=-2,-1,0,1$,共4种情况.

综上,满足条件的点P共有$4+2+6+2+7+2+5+1+4=33$(个),

故所求概率为$\frac{33}{69}=\frac{11}{23}$.

满分小卷 ▸ 6

1. **B** 【解析】本题考查集合相等及解一元二次方程.

已知$A=B$,$A=\{-1,0\}$,所以一元二次方程$x^2+ax+b=0$的两个根就是-1和0,所以$a=1$,$b=0$,因此$a^b=1$. 故选B.

2. **A** 【解析】本题考查共轭复数、复数的几何意义、充分必要条件.

设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.

若A在第二象限,则$a<0,b>0$,则$a<0,-b<0$,所以B在第三象限.

反之亦成立,所以"A在第二象限"是"B在第三象限"的充要条件. 故选A.

3. **C** 【解析】本题考查利用对数性质求解指数方程.

由题意得$1-0.5x^{0.06}=0.25$,即$x^{0.06}=1.5$,两边同时取以10为底的对数,得$0.06\lg x=\lg3-\lg2\approx0.48-0.30=0.18$,所以$\lg x\approx3$,$x\approx1\,000$. 故选C.

4. **C** 【解析】本题考查正态曲线的性质.

令$\xi_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$\xi_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$对应的正态密度函数分别为$f(x)$,$g(x)$,则函数$f(x)$,$g(x)$图象的对称轴分别为直线$x=\mu_1$,$x=\mu_2$,且$f(x)_{\max}=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}$,$g(x)_{\max}=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}$,观察题图,得$\mu_1<\mu_2$,$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}<\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}$,所以$\mu_1<\mu_2$,$\sigma_1>\sigma_2$. 故选C.

5. **A** 【解析】本题考查平面向量的数量积.

由已知条件可知$AP\perp BD$,因此$AP=\frac{2\times4}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=2|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{32}{5}$. 故选A.

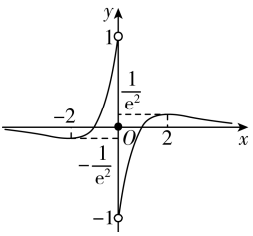
6. A 【解析】本题考查正切型函数的图象与性质.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由题可得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，$T=\pi$，又 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{\pi}{T}=1$，所以 $f(x)=\tan(x+\varphi)$，又 $f(\pi)=\tan(\pi+\varphi)=\tan\varphi=1$，则 $\varphi=m\pi+\frac{\pi}{4}$，$m\in\mathbf{Z}$. 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，故 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，结合选项可得当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{4}$，故 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心，其余选项皆不符合. 故选 A.

7. C 【解析】本题考查利用函数的奇偶性、单调性求参数范围.

分析：通过求导判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的单调性和最值，求得值域，再利用奇函数图象的对称性，求出函数在 $\mathbf{R}$ 上的值域，进而可求出 a 的范围. 由 $f(x)=(x+1)e^x$ $(x<0)$，求导得 $f'(x)=(x+2)e^x$，则当 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$，当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,0)$ 上单调递增，所以此时 $f(x)\geqslant f(-2)=-\frac{1}{e^2}$，当 $x\to0^-$ 时，$f(x)\to1$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to0$，即当 $x<0$ 时，$f(x)\in\left[-\frac{1}{e^2},1\right)$.



由奇函数的性质可知 $x>0$ 时，$f(x)\in\left(-1,\frac{1}{e^2}\right]$，又 $f(0)=0$，故对 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)\in(-1,1)$.

如图所示，$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $\begin{cases}-1<f(x_1)<1,\\-1<-f(x_2)<1,\end{cases}$ 所以 $|f(x_1)-f(x_2)|<2$，故由 $|f(x_1)-f(x_2)|<a$ 恒成立可得 $a\geqslant2$. 故选 C.

8. D 【解析】本题考查离散型随机变量的数学期望与方差.

由题可知方案(1)中这 4 位同学抽到自己准备的书的概率均为 $\frac{1}{4}$，则 $X\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$，

由二项分布的数学期望公式与方差公式可知，

$E(X)=4\times\frac{1}{4}=1$，$D(X)=4\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

由题可知 Y 的所有可能取值为 $0,1,2,4$，

$P(Y=0)=\frac{3\times3\times1\times1}{A_4^4}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$，$P(Y=1)=\frac{C_4^1\times2\times1\times1}{A_4^4}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$，$P(Y=2)=\frac{C_4^2\times1\times1}{A_4^4}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$，$P(Y=4)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$，

则 $E(Y)=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{24}=1$，

$D(Y)=(0-1)^2\times\frac{3}{8}+(1-1)^2\times\frac{1}{3}+(2-1)^2\times\frac{1}{4}+(4-1)^2\times\frac{1}{24}=1$，

所以 $E(X)=E(Y)$，$D(X)<D(Y)$. 故选 D.

9. BC 【解析】本题考查两角和与差的正弦公式、二倍角公式、同角三角函数的基本关系.

A 选项，已知 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{1}{6}$，$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，**A 错误**；

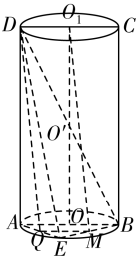
B 选项，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，**B 正确**；

C 选项，$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，所以 $3\tan\alpha=2\tan\beta$，**C 正确**；

D 选项，$\sin 2\alpha\sin 2\beta=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\cos\beta\sin\beta=4\sin\alpha\cos\beta\cdot\cos\alpha\sin\beta=4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$，**D 错误**. 故选 BC.

10. AD 【解析】本题考查空间线面位置关系的判断、圆柱的侧面积、三棱锥的体积、圆柱的外接球表面积.

对于 A，分析：根据线面平行的判定定理在平面 ADE 中找到一条直线与 O_1M 平行即可判断线面平行. 取 AE 的中点 Q，连接 DQ，MQ，因为 M 为 BE 的中点，所以 $MQ\parallel AB$，且 $MQ=\frac{1}{2}AB$，又因为 $DO_1\parallel AB$ 且 $DO_1=\frac{1}{2}AB$，所以 $MQ=DO_1$ 且 $MQ\parallel DO_1$，故四边形 $MQDO_1$ 为平行四边形，故 $DQ\parallel O_1M$，因为 $DQ\subset$ 平面 ADE，$O_1M\not\subset$ 平面 ADE，所以 $O_1M\parallel$ 平面 ADE，故 **A 正确**.



对于 B，分析：利用圆柱的侧面积公式计算即可. 设圆柱底面半径为 r，高为 h，因为 $AB=2r=\sqrt{5}$，$AD=h=2\sqrt{5}$，所以圆柱的侧面积为 $2\pi rh=\pi\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=10\pi$，故 **B 错误**.

对于 C，分析：利用换顶点的方式转化为已知底与高的三棱锥计算体积即可. $V_{B-ADE}=V_{D-ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABE}\times AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times r\times AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times 2\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$，故 **C 错误**.

对于 D，分析：圆柱外接球的球心是圆柱上、下底面圆心连线的中点，通过构造直角三角形计算球半径即可计算表面积. 圆柱外接球的球心为 OO_1 的中点 O'，则球半径 $R=O'D$，在直角三角形 $O'O_1D$ 中，$O'O_1=\frac{1}{2}AD=\sqrt{5}$，$O_1D=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $R=\sqrt{O'O_1^2+O_1D^2}=\sqrt{5+\frac{5}{4}}=\frac{5}{2}$，故外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\frac{25}{4}=25\pi$，故 **D 正确**. 故选 AD.

11. BC 【解析】本题考查抽象函数的奇偶性、周期性、对称性.

对于 A，由题意 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，且 $g(0)=0$，又 $f(2+x)+g(-x)=1$，即 $f(2+x)-g(x)=1$①，

用 $-x$ 替换 $f(2+x)+g(-x)=1$ 中的 x，得 $f(2-x)+g(x)=1$②，

由①+②得 $f(2+x)+f(2-x)=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 对称，故 **A 错误**.

对于 B，由 $f(2+x)+f(2-x)=2$，可得 $f(4+x)+f(-x)=2$，即 $f(4+x)=2-f(-x)=2-f(x)$，所以 $f(8+x)=2-f(4+x)=2-[2-f(x)]=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数，故 **B 正确**.

对于 C，由①可得 $g(x)=f(2+x)-1$，则 $g(x+8)=f(2+x+8)-1=f(2+x)-1=g(x)$，故 **C 正确**.

对于 D，因为 $f(4+x)+f(-x)=2$，$f(x)$ 为偶函数，

所以 $f(4+x)+f(x)=2$，

令 $x=2$，则有 $f(6)+f(2)=2$，

令 $x=10$，则有 $f(14)+f(10)=2$，

令 $x=18$，则有 $f(22)+f(18)=2$，

……

令 $x=8\,090$，则有 $f(8\,094)+f(8\,090)=2$，

所以 $\sum_{k=1}^{2\,024}f(4k-2)=f(2)+f(6)+f(10)+f(14)+f(18)+$

$f(22)+\cdots+f(8\,090)+f(8\,094)=\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{1\,012个}=2\times1\,012=2\,024$，故 **D 错误**. 故选 BC.

1 min 速解　武汉大学——王梓秋

学霸提示：由题知，$g(x)$ 为奇函数，则题目条件可化为 $f(x+2)-1=g(x)$. 又 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，联想到三角函数的诱导公式可以实现奇偶性的转换，令 $f(x)=t\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1$，$g(x)=-t\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$，$t\neq0$.

令 $f(x)=t\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1$，$g(x)=-t\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$，$t\neq0$，代入验证可知符合题目要求.

对于 A，$f(x)$ 图象的对称中心为 $(4m+2,1)$，$m\in\mathbf{Z}$，故 **A 错误**；

对于 B，C，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，故 **B，C 正确**；

对于 D，$\sum_{k=1}^{2\,024}f(4k-2)=1+1+1+1+\cdots+1=2\,024$，故 **D 错误**. 故选 BC.

12. **7（答案不唯一，满足 $n=7m(m\in\mathbf{N}^*)$ 即可）**　【解析】本题考查二项式定理.

$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}\right)^n$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_n^k x^{\frac{n-k}{3}}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=2^kC_n^k\cdot x^{\frac{n-7k}{3}}$，

若 $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式含有常数项，则 $\frac{n-7k}{3}=0$，即 $k=\frac{n}{7}$ 有解，则 $n=7m(m\in\mathbf{N}^*)$，

可得满足题意的一个正整数 $n=7$（答案不唯一，满足 $n=7m(m\in\mathbf{N}^*)$ 即可）.

13. **$\frac{8}{3}$　3**　【解析】本题考查等比数列前 n 项和公式与解不等式.

$\because a_1=1$，$2S_n=3a_{n+1}-3$，当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$，则 $2=3a_2-3$，

$\therefore a_2=\frac{5}{3}$，$\therefore S_2=a_1+a_2=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$.

$\because\{a_n\}$ 是等比数列，设其公比为 q，$\therefore q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{3}$，

$\therefore S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^n}{1-\frac{5}{3}}=\frac{3}{2}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^n-1\right]$.

令 $S_n>5$，即 $\frac{3}{2}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^n-1\right]>5$，化简得 $\left(\frac{5}{3}\right)^n>\frac{13}{3}$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，当 $n=1$ 或 2 时，上述不等式不成立，当 $n=3$ 时，上述不等式成立，故满足 $S_n>5$ 的最小正整数 $n=3$.

14. **$\sqrt{1+k}$**　【解析】本题考查点差法、求椭圆的离心率.

分析：将题干给出的线段长乘积的关系转化为一条直线上的比例关系，再通过点差法求解. 由 $|PA||PD|=|PB||PC|$，则 $\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|PB|}{|PD|}$，设 $\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|PB|}{|PD|}=\lambda$，$\lambda>0$，则 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{PD}$.

由题意可设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，且 $x_1\neq x_2$，$x_3\neq x_4$，

因为 $P(1,1)$，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PC}$，所以 $(1-x_1,1-y_1)=\lambda(x_3-1,y_3-1)$，即 $\begin{cases}x_1+\lambda x_3=1+\lambda,\\y_1+\lambda y_3=1+\lambda,\end{cases}$ 同理有 $\begin{cases}x_2+\lambda x_4=1+\lambda,\\y_2+\lambda y_4=1+\lambda,\end{cases}$

将 A，B 两点坐标代入椭圆方程得 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减并化简得 $b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

即 $b^2(x_1+x_2)+a^2(y_1+y_2)k_{AB}=0$，同理，$b^2(x_3+x_4)+a^2(y_3+y_4)k_{CD}=0$.

由于 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{PD}$，连接 AB（图略），则 $AB/\!/CD$，所以 $k_{AB}=k_{CD}=k$，即 $\begin{cases}b^2(x_1+x_2)+a^2k(y_1+y_2)=0,\\ b^2(x_3+x_4)+a^2k(y_3+y_4)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}b^2(x_1+x_2)+a^2k(y_1+y_2)=0,\\ b^2\lambda(x_3+x_4)+a^2\lambda k(y_3+y_4)=0,\end{cases}$ 两式相加得 $b^2(x_1+\lambda x_3+x_2+\lambda x_4)+a^2k(y_1+\lambda y_3+y_2+\lambda y_4)=0$，

即 $b^2(2+2\lambda)+a^2k(2+2\lambda)=0$，化简可得 $\frac{b^2}{a^2}=-k$，所以 $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+k}$.



1 min 速解　　武汉大学——王梓秋

学霸提示：本题给了线段比例，考虑到仿射变换后线段比例不变，可尝试利用仿射变换，结合等腰梯形中的垂直条件求解.

设仿射变换 $x=aX$，$y=bY$，椭圆变为单位圆 $X^2+Y^2=1$，点 $P(1,1)$ 变为 $P'\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$.

连接 AB（图略），由题设 $|PA|\cdot|PD|=|PB|\cdot|PC|$，可得 $\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|PB|}{|PD|}$，又 $\angle APB=\angle CPD$，所以 $\triangle PAB\backsim\triangle PCD$，从而 $AB/\!/CD$，结合比例关系知变换后的四边形 $A'B'C'D'$ 是等腰梯形，故 $C'D'\perp OP'$.

直线 OP' 的斜率为 $\frac{a}{b}$，所以直线 $C'D'$ 的斜率为 $-\frac{b}{a}$. 回到变换前，斜率为变换后的 $\frac{b}{a}$ 倍，因此 $k=\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^2}{a^2}$. 故离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+k}$.

满分小卷 ▸ 7

1. D　【解析】本题考查平均数、百分位数的计算.

已知一组数据 $1,2,x,6,7$ 的平均数为 4，则 $\frac{1+2+x+6+7}{5}=4$，解得 $x=4$. 将这组数据按照从小到大的顺序排列，得 $1,2,4,6,7$，共 5 个数据，$5\times70\%=3.5$，所以该组数据的第 70 百分位数为 6. 故选 D.

2. B　【解析】本题考查集合的运算、集合间的关系.

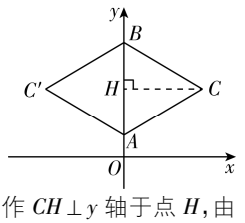
由题得 $M=(0,8)$，$N=[-1,3)$，则 $N\subsetneq M$，$M\cap N=(0,3)$，$M\cup N=[-1,8)$，$\complement_{\mathbf{R}}N=(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$，所以 **A，C，D 错误**，**B 正确**. 故选 B.

3. C　【解析】本题考查向量垂直的坐标运算.

由题设知 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，且 $\overrightarrow{AB}=(x+1,1-x)$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2(x+1)-3(1-x)=0$，即 $5x-1=0$，$x=\frac{1}{5}$. 故选 C.

4. B　【解析】本题考查复数的模、复数的几何意义.

由题意得，复数 z_1，z_2 在复平面内对应的点分别为 $A(0,1)$，$B(0,5)$，由于 z_1,z_2,z_3 在复平面内对应的点构成一个正三角形，如图所示，复数 z_3 在复平面内对应的点为 C 或 C'.



显然两种情况对应 $|z_3|$ 的值相等，不妨只考虑 z_3 对应点 C 的情况，过点 C 作 $CH\perp y$ 轴于点 H，由 $AB=4$，得 $AH=2$，$CH=2\sqrt{3}$，故点 C 的坐标为 $(2\sqrt{3},3)$，因此 $|z_3|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{21}$.

5. **D** 【解析】本题考查对数函数模型的应用.

设人与人交谈时的声强为 x_0 W/m^2，依题意，$10\lg\frac{x_0}{\alpha}=45$，即 $\lg\frac{x_0}{\alpha}=\frac{9}{2}$. 依题意，该火箭发射时的声强约为 $10^{19}x_0$ W/m^2，$d(10^{19}x_0)=10\lg\frac{10^{19}x_0}{\alpha}=10\left(19+\lg\frac{x_0}{\alpha}\right)=10\times\left(19+\frac{9}{2}\right)=235$(dB)，即这种火箭发射时的声强级约为 235 dB. 故选 D.

6. **C** 【解析】本题考查二项展开式中特定项的系数、二项式系数之和、二项展开式各项的系数之和.

分析：根据二项式系数之和以及二项展开式各项系数之和求 n,a，再根据二项式定理求解即可. 由题意，展开式中二项式系数之和为 16，则 $2^n=16$，解得 $n=4$，即二项式为 $\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)^4$.

由 $\left(a^2x+\frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式中各项系数之和为 81，令 $x=1$ 可得 $(a^2+1)^4=81$，解得 $a^2=2$，此二项式为 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4$，其展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_4^r\cdot(2x)^{4-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_4^r\cdot2^{4-r}\cdot x^{4-2r}$，$r=0,1,2,3,4$. 令 $4-2r=2$，得 $r=1$，所以展开式中 x^2 的系数是 $C_4^1\cdot2^3=32$. 故选 C.

7. **A** 【解析】本题考查利用正、余弦定理解三角形.

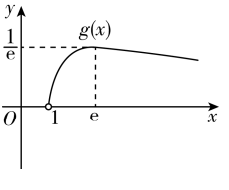
由 $\triangle ACF\backsim\triangle BAD\backsim\triangle CBE$，知 $\angle AFC=\angle BDA=\angle CEB$，所以 $\triangle DEF$ 为等边三角形，$\angle ADB=120°$.

设 $AF=BD=t(t>0)$，则 $AD=2+t$，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即 $\frac{t}{\frac{3\sqrt{3}}{14}}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，则 $AB=\frac{7}{3}t$. 在 $\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$，即 $\frac{49}{9}t^2=(2+t)^2+t^2-2t(2+t)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，解得 $t=3$（负值舍去），即 $BD=3$. 故选 A.

8. **A** 【解析】本题考查导数的综合应用.

因为平行四边形以原点 O 为对称中心，所以若顶点 A 在 $f(x)$ 的图象上，则其关于原点对称的点 A' 也在 $f(x)$ 的图象上，设该平行四边形的四个顶点分别为 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$A'(-x_1,-f(x_1))$，$B'(-x_2,-f(x_2))$，其中 $x_1>0,x_2>0$，$x_1\neq x_2$. 当 $x>0$ 时，$f(x)=-\ln x$，则点 $(x,-\ln x)$ 关于原点对称的点为 $(-x,\ln x)$，该点位于 $f(x)$ $(x<0)$ 的图象上，故 $f(-x)=me^{-m\cdot(-x)}=me^{mx}=\ln x$，则问题等价于方程 $me^{mx}=\ln x$ 有两个不同的正实根. 关键点 将方程变形得 $\ln x\cdot e^{\ln x}=mx\cdot e^{mx}$（提示：变为同构形式，从而构造函数）. 设 $h(t)=te^t,t>0$，则 $h'(t)=e^t(1+t)>0$，故 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 当 $0<x\leqslant1$ 时，$\ln x\leqslant0,me^{mx}>0$，方程 $me^{mx}=\ln x$ 无解. 当 $x>1$ 时，$\ln x>0,mx>0$，结合 $h(t)$ 的单调性，得 $h(\ln x)=h(mx)$ 等价于 $\ln x=mx$，则方程 $m=\frac{\ln x}{x}$ 有两个不同的大于 1 的实数解. 设 $g(x)=\frac{\ln x}{x},x>1$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $x\in(1,e)$ 时，$g'(x)>0,g(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0,g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$.

又当 $x\to1^+$ 时，$g(x)\to0$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0^+$，作出 $g(x)$ 的大致图象如图所示.



由图知，要使 $m=\frac{\ln x}{x}$ $(x>1)$ 有两个不同的实数解，需满足 $0<m<\frac{1}{e}$，即实数 m

的取值范围为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$. 故选 A.

刷有所得 处理函数图象上存在两点关于某点中心对称的问题时,优先利用中心对称的性质,将几何问题转化为方程根的个数问题.

9. **BD** 【解析】本题考查正弦型函数的图象与性质.

用辅助角公式化简得$f(x)=\sqrt{1+b^2}\sin(2x+\varphi)$,其中$\tan\varphi=b,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

已知$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{12}$对称,根据正弦型函数的性质有$2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即$\varphi=k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,则$\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

又$b=\tan\varphi=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

A 选项,$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 **A 错误**;

B 选项,$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$,为奇函数,故 **B 正确**;

C 选项,$f\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+f(x)=2\sin\left[2\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-\frac{\pi}{3}\right]+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-2x+\frac{4\pi}{3}\right)+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,不恒为 0,故 **C 错误**;

D 选项,若$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{17\pi}{12}\right)$,则$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{5\pi}{2}\right)$,当且仅当$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$时,$f(x)$取得极小值,因此$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{17\pi}{12}\right)$内有唯一极小值点$x=\frac{11\pi}{12}$,故 **D 正确**. 故选 BD.

10. **BCD** 【解析】本题考查点与圆的位置关系、直线方程、三角形的内切圆.

对于 A,$(-2)^2+(-2)^2=8>4$,则点 A 在圆 O 外,故 **A 错误**.

对于 B,直线 BC 的方程为$y-6=\frac{6+2}{-2-4}(x+2)$,

整理得$4x+3y-10=0$,故 **B 正确**.

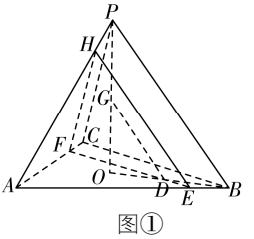
对于 C,分析:分别判断出直线 AB,AC,BC 与圆 O 的位置关系,结合圆心 O 在$\triangle ABC$内即可判断. 直线 AB 的方程为$x=-2$,与圆 O 相切;直线 AC 的方程为$y=-2$,与圆 O 相切;直线 BC 的方程为$4x+3y-10=0$,圆心 O 到直线 BC 的距离$d=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$,则圆 O 与直线 BC 相切,又圆心 O 在$\triangle ABC$内,所以圆 O 为$\triangle ABC$的内切圆,故 **C 正确**.

对于 D,分析:设$P(x,y)$,进而可得$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$的表达式,化简后结合点 P 在圆 O 上即可判断. 设$P(x,y)$,则$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=(x+2)^2+(y+2)^2+(x+2)^2+(y-6)^2+(x-4)^2+(y+2)^2=3x^2+3y^2-4y+68$,因为点 P 在圆 $O:x^2+y^2=4$ 上运动,所以$3x^2+3y^2-4y+68=3(x^2+y^2)-4y+68=-4y+80$,$-2\leqslant y\leqslant 2$,当$y=-2$时,$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$取得最大值 88,故 **D 正确**. 故选 BCD.

11. **ACD** 【解析】本题考查三棱锥的内切球、动点的轨迹长度、截面问题.

对于 A，分析：从 G 出发，利用平行线法得到平面 α 截三棱锥 $P-ABC$ 所得截面，从而根据相似性质求出其面积.

如图①，连接 BO，过 G 作 $GD/\!/PB$ 交 BO 于 D，由 $GD\not\subset$ 平面 PBC，$PB\subset$ 平面 PBC，可得 $GD/\!/$平面 PBC，又平面 $\alpha/\!/$平面 PBC，$G\in$ 平面 α，则 $GD\subset$ 平面 α，同理过 D 作 $l/\!/BC$，直线 l 分别交 AB，AC 于点 E，F，过 E 作 $EH/\!/PB$ 交 PA 于 H，



图①

连接 FH，则 $\triangle HEF$ 为平面 α 截三棱锥 $P-ABC$ 所得的截面.

由题意，得 $\triangle HEF\backsim\triangle PBC$. 由 G 为 PO 中点，$GD/\!/PB$ 可知 D 为 BO 中点，则 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$，又 $\overrightarrow{BE}/\!/\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{ED}/\!/\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}$，即 $AE=\frac{5}{6}AB$，所以 $\frac{S_{\triangle HEF}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{25}{36}$，

所以 $S_{\triangle HEF}=\frac{25}{36}S_{\triangle PBC}=\frac{25}{36}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=\frac{25\sqrt{3}}{4}$，故 **A 正确**.

对于 B，分析：利用等体积法求三棱锥的内切球半径，再求其表面积.

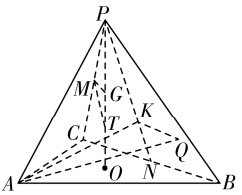
因为 $PB=6$，$OB=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=2\sqrt{3}$，所以 $PO=\sqrt{PB^2-OB^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$，设三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的半径为 r，

由等体积法得 $\frac{1}{3}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2r=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2\times2\sqrt{6}$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故内切球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=6\pi$，故 **B 错误**.

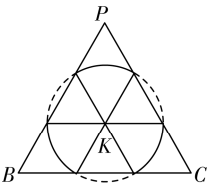
对于 C，如图②，过 A 作平面 PBC 的垂线，垂足为 K，连接 KQ，则 K 为 $\triangle PBC$ 的中心，且 $AK=PO=2\sqrt{6}$，所以 $KQ=\sqrt{AQ^2-AK^2}=2$，

所以点 Q 的轨迹是以 K 为圆心，2 为半径的圆在 $\triangle PBC$ 内（含边界）的部分（三段弧，如图③），

易知每段弧的圆心角均为 $\frac{\pi}{3}$，所以点 Q 的轨迹长度为 $3\times\frac{\pi}{3}\times2=2\pi$，故 **C 正确**.



图②



图③

对于 D，设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，球心为 T，连接 MT，GM，如图②.

由 $R^2=(2\sqrt{6}-R)^2+(2\sqrt{3})^2$，解得 $R=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，则 $GT=\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. 易知 $MG=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，$MG\perp GT$.

当截面与 TM 垂直时，所得的截面圆的面积最小，

又 $TM=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}$，

则截面圆半径的最小值为 $\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2}=3$，

故截面面积的最小值为 9π，故 **D 正确**. 故选 ACD.

拓展归纳　作多面体截面的方法

(1)直接法:确定截面与多面体的棱的交点并顺次连接.

(2)平行线法:截面与多面体中两个平行的面相交,或者截面上有一条直线与多面体的某个面平行,利用平行线的性质作截面.

(3)截面经过的三个已知点 A,B,C 在多面体的棱上,且其中有两点 A,B 在同一个面的两条边上,延长 AB 及几何体的棱得交点,连接交点与点 C 的直线与棱的交点即为截面与对应棱的交点.

12. $\frac{1}{2}$　【解析】本题考查导数的几何意义、直线与直线平行.

由 $y=\ln(ax+1)$,可得 $y'=\frac{a}{ax+1}$. 当 $x=0$ 时,$y'=a$. 由题知曲线 $y=\ln(ax+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线与直线 $x-2y-1=0$,即直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 平行,所以 $a=\frac{1}{2}$.

13. $\frac{(n-1)^2}{4}+a_1$　2　【解析】本题考查数列递推公式的应用、数列求和.

当 n 为奇数时,$a_{n+2}-a_n=n$,

所以 $a_n=(a_n-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-4})+\cdots+(a_3-a_1)+a_1=(n-2)+(n-4)+\cdots+1+a_1=\frac{(1+n-2)\times\frac{n-1}{2}}{2}+a_1=\frac{(n-1)^2}{4}+a_1(n\geqslant 3)$,

当 $n=1$ 时,上式也成立,所以当 n 为奇数时,$a_n=\frac{(n-1)^2}{4}+a_1$.

当 n 为偶数时,$a_{n+2}+a_n=n$(提示:已知偶数项的相邻两项之和,可直接并项求前 20 项中偶数项之和),

所以 $(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\cdots+(a_{18}+a_{20})=2+6+10+14+18=50$,

又因为 $S_{20}=355$,所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=355-50=305$.

即 $a_1+\left(a_1+\frac{2^2}{4}\right)+\left(a_1+\frac{4^2}{4}\right)+\cdots+\left(a_1+\frac{18^2}{4}\right)=10a_1+(1+4+9+16+25+36+49+64+81)=10a_1+285=305$,解得 $a_1=2$.

14. $\left(\frac{1}{3},\sqrt{2}-1\right)$　【解析】本题考查求椭圆的离心率的取值范围.

分析:不妨设点 $P(x,y)$,根据题意求出 x 的取值范围,结合椭圆方程可得出 $|PF_2|$ 的取值范围,由此可得出关于 a,c 的齐次不等式,即可解出椭圆的离心率的取值范围. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的半焦距为 c,则 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,因为 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形,且 $\angle PF_2F_1$ 为钝角,所以 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$.

设点 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{F_2P}=(x-c,y)$,$\overrightarrow{F_2F_1}=(-2c,0)$,则 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2F_1}=-2c(x-c)<0$,可得 $x>c$,又因为 $-a<x<a$,故 $c<x<a$,所以 $|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|=a-\frac{c}{a}x\in\left(a-c,\frac{a^2-c^2}{a}\right)$,

所以 $a-c<2c<\frac{a^2-c^2}{a}$,即 $\begin{cases}3e>1,\\e^2+2e-1<0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3}<e<\sqrt{2}-1$.

满分小卷 ▸ 8

1. B　【解析】本题考查复数的模、复数的除法运算.

由 $(1+i)z=2$,得 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. 故选 B.

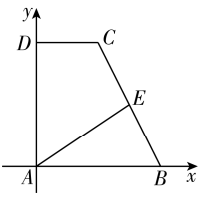
2. D　【解析】本题考查残差的计算、根据经验回归方程进行

数据估计.

将 $x=70$ 代入 $\hat{y}=0.8x+12.5$ 得 $\hat{y}=0.8\times70+12.5=68.5$，则样本点 $(70,66)$ 的残差为 $66-68.5=-2.5$. 故选 D.

3. B 【解析】本题考查平面向量的数量积的计算.

以 A 为原点，AB，AD 所在直线分别为 x，y 轴建立平面直角坐标系，如图所示.



设 $AD=h$，则有 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(1,h)$，$D(0,h)$，因为 E 为 BC 的中点，所以 $E\left(\frac{3}{2},\frac{h}{2}\right)$，得 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{3}{2},\frac{h}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\times(-1)+\frac{h}{2}\times0=-\frac{3}{2}$. 故选 B.

4. A 【解析】本题考查等差数列的通项公式及前 n 项和公式.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_3+a_8+a_{13}=3a_8=-120$，解得 $a_8=-40$，即 $a_1+7d=-40$. ①

由 $5S_7-7S_5=5\left(7a_1+\frac{7\times6}{2}d\right)-7\left(5a_1+\frac{5\times4}{2}d\right)=70$，

解得 $d=2$，代入①中得 $a_1=-54$.

$\because S_k=S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$，即 $a_{k+1}=0$，$\therefore a_1+kd=0$，即 $-54+2k=0$，解得 $k=27$. 故选 A.

5. D 【解析】本题考查辅助角公式、三角函数的性质.

$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为 2，故 **A，B 错误**；

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$ 的图象，$g(x)$ 为偶函数，故 **C 错误**；

令 $2k\pi\leqslant2x\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，又 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\subsetneq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，故 **D 正确**. 故选 D.

6. B 【解析】本题考查直线与圆的位置关系、两点间的距离公式.

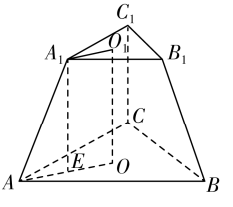
分析：求出圆 C 的圆心坐标和半径，设出点 P 的坐标，利用两点间的距离公式求出 $|PC|$ 的表达式，利用勾股定理得出 $|PE|$ 的表达式，借助二次函数的性质即可求出 $|PE|$ 的最小值.

由题意，圆 C 的方程可化为 $(x-3)^2+y^2=1$，则圆心 $C(3,0)$，半径 $R=1$. 设 $P(x,y)$，$x\geqslant0$. 连接 PC，CE（图略），易知 $\angle PEC=90°$，$|CE|=1$，因为 $|PC|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2-6x+9+12x}=\sqrt{x^2+6x+9}=x+3\ (x\geqslant0)$，所以由勾股定理得，$|PE|=\sqrt{PC^2-R^2}=\sqrt{(x+3)^2-1}\ (x\geqslant0)$.

又函数 $y=(x+3)^2-1$ 的图象的对称轴方程为 $x=-3$，图象开口向上，所以函数 $y=(x+3)^2-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x=0$ 时，$|PD|$，$|PE|$ 取最小值，$|PD|_{\min}=|PE|_{\min}=\sqrt{(0+3)^2-1}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$. 故选 B.

7. A 【解析】本题考查三棱台的体积、线面角.

如图，设正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面中心分别为 O_1，O，连接 A_1O_1，AO，OO_1，过 A_1 作 AO 的垂线，垂足为 E，则 $A_1E/\!/O_1O$.



因为 $OO_1\perp$ 平面 ABC，所以 $A_1E\perp$ 平面 ABC，所以 $\angle A_1AE$ 为侧棱 AA_1 与底面 ABC 所成的角，所以 $\cos\angle A_1AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面的面积分别为 $\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，可知等边三角形 $A_1B_1C_1$ 的边长为 2，等边三角形 ABC 的边长为 4，可得 $A_1O_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AO=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $AE=AO-EO=AO-A_1O_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

由 $\cos\angle A_1AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得 $\tan\angle A_1AE=\sqrt{2}$，所以 $A_1E=AE\cdot\tan\angle A_1AE=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，即正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高 $OO_1=A_1E=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以其体积 $V=\frac{1}{3}\times(\sqrt{3}+4\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}\times4\sqrt{3}})\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{14\sqrt{2}}{3}$. 故选 A.

8. **C** 【解析】本题考查利用函数的奇偶性求值.

由 $y=f(4+x)$ 为偶函数得 $f(4-x)=f(4+x)$，

又 $y=g(x+4)+1$ 为奇函数，

所以 $g(-x+4)+1=-[g(x+4)+1]$，即 $g(4-x)+g(4+x)=-2$①.

又因为 $f(x)+g(x)=x^2+1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}f(4-x)+g(4-x)=(4-x)^2+1,\\f(4+x)+g(4+x)=(4+x)^2+1,\\f(4-x)=f(4+x),\end{cases}$

整理可得 $g(4-x)-g(4+x)=-16x$②，

①②两式作差并化简得 $g(4+x)=8x-1$，即 $g(x)=8x-33$，所以 $g(7)=8\times7-33=23$，又 $f(7)+g(7)=7^2+1=50$，所以 $f(7)=50-g(7)=50-23=27$，所以 $f(7)\cdot g(7)=23\times27=621$，故选 C.



1 min 速解　武汉大学——王梓秋

学霸提示：注意到 $y=f(4+x)$ 与 $y=g(x+4)+1$ 的括号中都是“$x+4$”，于是可以在 $f(x)+g(x)=x^2+1$ 中进行构造. 由题可知 $f(x+4)+g(x+4)+1=(x+4)^2+1+1=x^2+8x+18$，其中 $f(x+4)$ 为偶函数，$g(x+4)+1$ 为奇函数，不妨令 $f(x+4)=x^2+18$，$g(x+4)+1=8x$，于是 $f(7)=27$，$g(7)=23$，$f(7)g(7)=621$. 故选 C.

学霸点拨：任何一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 都可拆成一个奇函数与一个偶函数之和，即 $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

9. **AC** 【解析】本题考查由集合之间的关系求参数的取值范围.

对于 A，由题意得 $M=\{x\mid\ln(x^2-x-1)=0\}=\{x\mid x^2-x-1=1\}=\{x\mid x=-1\text{ 或 }x=2\}=\{-1,2\}$，所以集合 M 的所有真子集个数是 $2^2-1=3$，故 **A 正确**；

对于 B，因为 $M\cap N\neq\varnothing$，$M\cap N\neq M$，所以 $-1\leqslant a<2$，故 **B 错误**；

对于 C，由题易知 $a\geqslant2$，故 **C 正确**；

对于 D，$\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\mid x>a\}$，由 $M\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}N)$ 可知 $a<-1$，故 **D 错误**.

故选 AC.

10. **BD** 【解析】本题考查利用正、余弦定理解三角形.

因为 $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$B$ 是三角形的内角，所以 $\sin B>0$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

已知 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}b$，由正弦定理可得 $\sin A=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

又因为 $\sin2B=2\sin B\cos B=2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以 $\sin A=\sin 2B$，则 $A=2B$ 或 $A+2B=\pi$.

因为 $b>c$，所以 $B>C$，

若 $A+2B=\pi$，又 $A+B+C=\pi$，则 $B=C$，这与 $B>C$ 矛盾，所以 $A=2B$，故 **B 正确，A 错误**.

由余弦定理可得 $b^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b\right)^2+c^2-2\times\frac{\sqrt{6}}{2}b\times c\times\frac{\sqrt{6}}{4}$，整理得 $b^2-3bc+2c^2=0$，则 $b=c$ 或 $b=2c$. 因为 $b>c$，所以 $b=2c$，故 **D 正确，C 错误**. 故选 BD.

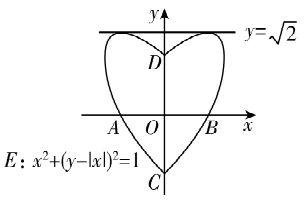
11. **BCD** 【解析】本题考查曲线与方程.

对于 A，分别将 $(-1,-1)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ 代入曲线 E 的方程的左侧可得 $1+(-2)^2=5\neq1$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$，所以点 $(-1,-1)$ 不在曲线 E 上，点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ 在曲线 E 上，故 **A 错误**.

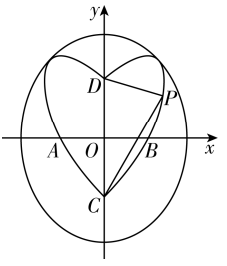
对于 B，将 E 的方程整理为 $2|x|^2-2y|x|+y^2-1=0$，视为关于 $t=|x|$ 的一元二次方程，则其必有非负实数根，则由 $\Delta=4y^2-8(y^2-1)\geqslant0$ 解得 $-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$. 对应一元二次函数图象的对称轴为直线 $t=y$，由方程存在非负实数根可得 $y\geqslant0$ 或 $\begin{cases}y<0,\\y^2-1\leqslant0,\end{cases}$ 解得 y 的取值范围为 $[-1,\sqrt{2}]$.

由 $x^2+(y-|x|)^2=1$，得 $x^2\leqslant1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant1$，当且仅当 $y=1$ 时等号成立. 故 **B 正确**.

在 E 的方程中，令 $y=0$ 得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以不妨令 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，有 $|AB|=\sqrt{2}$；令 $x=0$ 得 $y=\pm1$，所以令 $C(0,-1)$，$D(0,1)$. 由以上分析可得曲线 E 大致如图①所示.



图①



图②

对于 C，由选项 A，B 知，当 P 为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$ 时，$\triangle PAB$ 的面积最大，且最大值为 $\frac{1}{2}\times|AB|\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，故 **C 正确**.

对于 D，分析：先根据题意构造椭圆，然后联立曲线 E 与椭圆的方程，得到两图象交点，结合图形判断. 平面内到定点 C，D 的距离和为 $2\sqrt{3}$ 的点的轨迹是以 C，D 为焦点，长轴长为 $2\sqrt{3}$ 的椭圆. 设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由已知得 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，则 $b^2=3-1=2$，所以椭圆方程为 $\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$. 联立 $\begin{cases}\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1,\\x^2+(y-|x|)^2=1,\end{cases}$ 两式相减并整理得 $9x^2+4y^2-12|x|y=(3|x|-2y)^2=0$，所以 $3|x|-2y=0$，所以可解得 $x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故椭圆 $\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1$ 与曲线 E 的交点为 $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$，如图②所示，因此曲线 E 上的点 P 恒不在椭圆 $\frac{y^2}{3}+$

$\frac{x^2}{2}=1$ 外，即满足 $|PC|+|PD|\leqslant 2\sqrt{3}$，**D 正确**. 故选 BCD.

12. $4\sqrt{2}$　【解析】本题考查对数的运算及基本不等式.

由 $\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab=2$，得 $ab=4$，$a>0$，$b>0$，故 $a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=2b$，即 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$ 时取等号. 故 $a+2b$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

13. $\frac{575}{1\,296}$　【解析】本题考查古典概型.

一共掷骰子四次，基本事件共有 $6^4=1\,296$（种），其中平局的情况如下.

得两分平局，两人抛出的都是 1，共有 1 种情况；

得三分平局，两人掷出的点数有（1，2），（2，1）两种可能，两人共 $2^2=4$（种）情况；

以此类推，甲、乙平局一共有 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=146$（种）情况.

非平局中甲、乙获胜机会均等，各 $\frac{1\,296-146}{2}=575$（种）情况，所以甲获胜的概率为 $\frac{575}{1\,296}$.

14. $\frac{e}{3}$　【解析】本题考查利用导数研究不等式恒成立问题.

分析：根据题意整理得出同构形式 $2\ln\left(\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}\right)+1\leqslant\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$，令 $t=\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$，$t>0$，并构造函数，利用导数分析得出 t 需满足的条件，进而得到 m 需满足的条件，再利用导数求解.

由 $e^{\frac{x}{3}}\left(2m\ln x-\frac{2x}{3}+1\right)\leqslant x^m$ 得 $2m\ln x-\frac{2x}{3}+1\leqslant\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$，

即 $2\ln\left(\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}\right)+1\leqslant\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$，令 $t=\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$，$t>0$（易错：换元时注意新元的范围），可得 $2\ln t+1\leqslant t$，即 $t-2\ln t-1\geqslant 0$.

关键点

令 $g(t)=t-2\ln t-1$，$t>0$，则 $g'(t)=1-\frac{2}{t}=\frac{t-2}{t}$. 由 $g'(t)>0$，解得 $t>2$，由 $g'(t)<0$，解得 $0<t<2$，则 $g(t)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(t)\geqslant g(2)=1-2\ln 2<0$，且 $g(1)=0$，$g(e^2)=e^2-5>0$，可知 $g(t)$ 有且仅有两个零点 1 和 t_0，且 $t_0\in(2,e^2)$. 若 $g(t)\geqslant 0$，则 $0<t\leqslant 1$ 或 $t\geqslant t_0$.

对于 $t=\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$，当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$t=\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$ 趋近于 0，故 $t\geqslant t_0$ 不可能恒成立，又 $t=\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}$ 的值随 x 连续变化，且 t 不能取 $(1,t_0)$ 中的值，所以需要 $0<t\leqslant 1$，即 $0<\frac{x^m}{e^{\frac{x}{3}}}\leqslant 1$，即 $m\ln x-\frac{x}{3}\leqslant 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $h(x)=m\ln x-\frac{x}{3}$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{m}{x}-\frac{1}{3}=\frac{3m-x}{3x}$，由 $h'(x)>0$，解得 $0<x<3m$，由 $h'(x)<0$，解得 $x>3m$，则 $h(x)$ 在 $(0,3m)$ 上单调递增，在 $(3m,+\infty)$ 上单调递减，可得 $h(x)\leqslant h(3m)=m\ln(3m)-m$，令 $m\ln(3m)-m\leqslant 0$，解得 $0<m\leqslant\frac{e}{3}$，所以实数 m 的最大值为 $\frac{e}{3}$.

满分小卷 ▸ 9

1. B　【解析】本题考查复数的运算及复数的几何意义.

$i\cdot\bar{z}=1-i$，则 $\bar{z}=\dfrac{1-i}{i}=-1-i$，则 $z=-1+i$，复数 z 在复平面内对应的点 $(-1,1)$ 位于第二象限. 故选 B.

2. **B** 【解析】本题考查一组数据的百分位数的计算.

$10\times25\%=2.5$，题中数据是从小到大排列的，所以这组数据的下四分位数为第 3 个数据，即 110. 故选 B.

3. **C** 【解析】本题考查解对数不等式、函数的值域、集合的交集运算.

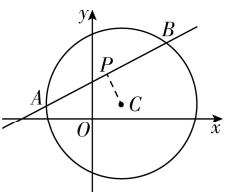
$A=\{x\mid\log_2 x\geqslant1\}=\{x\mid\log_2 x\geqslant\log_2 2\}=\{x\mid x\geqslant2\}=[2,+\infty)$，$B=\{y\mid y=\sqrt{2^x-1},x\in A\}$，当 $x\in A=[2,+\infty)$ 时，函数 $y=2^x$ 单调递增，所以 $2^x-1\geqslant4-1=3$，此时 $y=\sqrt{2^x-1}\geqslant\sqrt{3}$，即 $B=[\sqrt{3},+\infty)$. 所以 $A\cap B=[2,+\infty)$. 故选 C.

4. **B** 【解析】本题考查导数的几何意义.

对函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}\ln(2x)$，求导得 $f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}\ln(2x)+\dfrac{a}{x^2}$，$f(x)$ 的图象在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的切线斜率为 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\ln\left(2\times\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4a$. 又 $f(x)$ 的图象在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处的切线与直线 $y=3x+5$ 垂直，所以 $3\times4a=-1$，解得 $a=-\dfrac{1}{12}$. 故选 B.

5. **A** 【解析】本题考查与圆有关的最值问题.

直线 l 的方程可化为 $m(x-1)-(y-3)=0$，则直线 l 过定点 $P(1,3)$，将 C：$x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 化为标准方程，为 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$，因为 $(1-2)^2+(3-1)^2=5<25$，所以点 P 在圆 C 内，而圆 C 的圆心 $C(2,1)$，连接 CP，由圆的性质知，当 $AB\perp CP$ 时，弦 AB 的长取最小值（提示：过圆内定点的弦，当弦与圆心和该定点的连线垂直时，弦长最短），又直线 CP 的斜率 $k=\dfrac{1-3}{2-1}=-2$，所以 $m=-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{2}$. 故选 A.



6. **A** 【解析】本题考查三角恒等变换.

因为在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\pm\dfrac{4}{5}$，因为 $\cos B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$，所以 $B\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 若 $\cos A=-\dfrac{4}{5}$，则 A 为钝角，又由 $\sin A<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可知 $A>\dfrac{3\pi}{4}$，此时 $A+B>\pi$，矛盾（易错：解三角形时一定注意检验是否满足内角和条件），故 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$. 故选 A.

7. **D** 【解析】本题考查数列与不等式的综合应用.

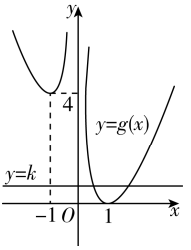
由题意，$a_1=1$，当 $n=2$ 时，$S_2=a_1+a_2<4a_2-1$，则 $a_2>\dfrac{2}{3}$，由于 a_1 与 a_2 的大小不确定，故 **A，B 错误**. 当 $n\geqslant2$ 时，由 $S_n<4a_n-1$，得 $S_n<4(S_n-S_{n-1})-1$，即 $3S_n>4S_{n-1}+1$，即 $S_n+1>\dfrac{4}{3}(S_{n-1}+1)$，则 $S_n+1>\dfrac{4}{3}(S_{n-1}+1)>\left(\dfrac{4}{3}\right)^2(S_{n-2}+1)>\cdots>\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-2}(S_2+1)=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-2}(a_1+a_2+1)>\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-2}\left(1+\dfrac{2}{3}+1\right)=2\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}>2$

$(n\geqslant 2)$. 又当 $n=1$ 时，$S_1+1=2$，故 $S_n+1\geqslant 2(n\in\mathbf{N}^*)$. 对任意常数 M，若 $M\leqslant 1$，则 $S_n+1\geqslant 2\geqslant M+1$，即 $S_n\geqslant M$；若 $M>1$，取正整数 $n_0=\left[\log_{\frac{4}{3}}\dfrac{M+1}{2}\right]+2$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数），则当 $n\geqslant n_0$ 时，$S_n+1>2\cdot\dfrac{M+1}{2}=M+1$，即 $S_n>M$.

综上，不存在常数 M，使得 $S_n<M$ 恒成立，故 **C 错误**. 取 $m=0$，则 $S_n>m$ 恒成立，故 **D 正确**. 故选 D.

8. A 【解析】本题考查利用导数研究函数的零点.

令 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}-k=0(x\neq 0)$，得 $k=x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$，令 $y=k$，$g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$，即直线 $y=k$ 与 $g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 的图象有两个交点. $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x^3}-1+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2(x^2-1)\left[\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}\right]}{x^3}$. 当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. 所以当 $x=-1$ 时，$g(x)$ 有极小值，为 $g(-1)=4$，当 $x=1$ 时，$g(x)$ 有极小值，为 $g(1)=0$，当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，则 $g(x)$ 的大致图象如图所示，



作出直线 $y=k$，由图可知，当 $0<k<4$ 时，直线 $y=k$ 与 $g(x)$ 的图象有两个交点，故此时函数 $f(x)$ 有两个零点. 故选 A.

9. ABC 【解析】本题考查基本不等式的应用.

对于选项 A，由题意可知 $a\in(0,1)$，所以 $\ln a<0$，故 **A 正确**；

对于选项 B，$2^a+2^b=2^a+2^{1-a}\geqslant 2\sqrt{2^a\cdot 2^{1-a}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，故 **B 正确**；对于选项 C，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant a+b+a+b=2$，所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，故 **C 正确**；对于选项 D，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)(a+b)=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}-1$，$b=2-\sqrt{2}$ 时取等号，故 **D 错误**. 故选 ABC.

10. ACD 【解析】本题考查古典概型、二项分布、方差的性质.

对于 A，10 件不同的素材，每件都能分到两个研学体验桌中的任意一个，总共有 $2^{10}=1\,024$（种）分配方式，需要排除“所有素材都分到第一个桌”和“所有素材都分到第二个桌”这 2 种情况，因此共有 $1\,024-2=1\,022$（种）分配方法，**A 正确**.

对于 B，不放回地摸取 5 件素材，$X=4$ 表示摸到 4 本诗词抄本、1 套拓印工具，则 $P(X=4)=\dfrac{C_7^4C_3^1}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{12}$，**B 错误**.

对于 C，设摸到诗词抄本的次数为 X，$X\sim B\left(4,\dfrac{7}{10}\right)$，$Z=2X-4$，$D(X)=4\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{21}{25}$，$D(Z)=2^2\times\dfrac{21}{25}=\dfrac{84}{25}$，**C 正确**.

对于 D，Y 为取完 7 本诗词抄本时的总次数，可能取值为 7，8，9，10，则 $P(Y=7)=\dfrac{A_7^7}{A_{10}^7}=\dfrac{1}{120}$，$P(Y=8)=\dfrac{C_7^6C_3^1A_7^7}{A_{10}^8}=\dfrac{7}{120}$，$P(Y=9)=\dfrac{C_7^6C_3^2A_8^8}{A_{10}^9}=\dfrac{7}{30}$，$P(Y=10)=\dfrac{C_7^6C_3^3A_9^9}{A_{10}^{10}}=\dfrac{7}{10}$，因此 $E(Y)=7\times\dfrac{1}{120}+8\times\dfrac{7}{120}+9\times\dfrac{7}{30}+10\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{77}{8}$，**D 正确**.

11. **ACD** 【解析】本题考查线线垂直的判定、异面直线所成角、面面角、截面问题.

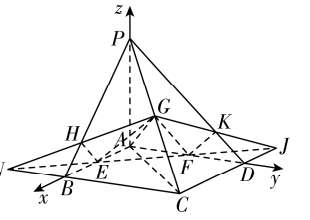
由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$C(1,1,0)$，$P(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$G\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

对于 A，$\overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-1)$，因为 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{PD}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$，所以 $AG\perp PD$，即 **A 正确**；

对于 B，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，因为 F 是棱 AD 的中点，所以 $F\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$，又 $G\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{FG}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$，设异面直线 FG 和 AC 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{FG},\overrightarrow{AC}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{FG}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，又 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，故 **B 错误**；

对于 C，由于 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD$ 的一个法向量可取 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，又 E 为棱 AB 的中点，则 $E\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$，易知 $\overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$，设平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成的角为 α，则 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故 **C 正确**；

对于 D，如图，延长 FE 交直线 CB 于点 N，延长 EF 交直线 CD 于点 J，连接 NG 与 PB 交于点 H，连接 GJ 与 PD 交于点 K，连接 HE，KF，则过点 E，F，G 的平面截四棱锥 $P-ABCD$ 所得的截面为五边形 $HEFKG$，故 **D 正确**. 故选 ACD.



12. **−16** 【解析】本题考查二项式定理的应用.

$(x-2)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^rx^{4-r}(-2)^r(0\leqslant r\leqslant4,r\in\mathbf{N})$. 当 $r=1$ 时，$T_{1+1}=C_4^1x^{4-1}(-2)^1=-8x^3$，则 $a_3=-8$；当 $r=2$ 时，$T_{2+1}=C_4^2x^{4-2}(-2)^2=24x^2$，则 $a_2=24$；当 $r=3$ 时，$T_{3+1}=C_4^3x^{4-3}(-2)^3=-32x$，则 $a_1=-32$，所以 $a_1+a_2+a_3=-32+24-8=-16$.

13. **2** 【解析】本题考查投影向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}$，已知 $\boldsymbol{a}=(3x,-2)$，$\boldsymbol{b}=$

$(2,1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6x-2$，且 $|\boldsymbol{b}|^2=2^2+1^2=5$，又投影向量为 $2\boldsymbol{b}$，所以 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{6x-2}{5}=2$，解得 $x=2$.

14. $(x-3)^2+y^2=4$（除去点 $(1,0)$） $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】本题考查动点轨迹方程、直线斜率最值问题.

分析：根据 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2=5$ 即可求出直线 l 过定点 $D(5,0)$，再由数形结合可知点 H 的轨迹为圆，即可写出轨迹方程.

由题可设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\dfrac{y_2^2}{4},y_2\right)$ $(y_1>0,y_2<0)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2=5$，解得 $y_1y_2=-20$ 或 $y_1y_2=4$（不符合题意，舍）. 易知直线 l 的斜率不为 0，故设直线 l 的方程为 $x=my+n$，与抛物线方程联立，消去 x 并整理得 $y^2-4my-4n=0$，所以 $\Delta>0$，由一元二次方程根与系数的关系得 $y_1y_2=-4n=-20$，故 $n=5$，故直线 l 的方程为 $x=my+5$，所以直线 l 过定点 $D(5,0)$. 当直线 l 与 x 轴垂直时，易知点 H 与点 D 重合，此时有 $H(5,0)$. 当直线 l 与 x 轴不垂直时，易知 $FH\perp HD$，由圆的定义可知动点 H 在以 FD 为直径的圆上，由 $F(1,0)$，$|FD|=4$，取 FD 的中点为 M，则 $M(3,0)$，所以点 H 的轨迹 L 的方程为 $(x-3)^2+y^2=4$（除去点 $(1,0)$）.

分析：根据图形可判断过原点的直线和点 H 的轨迹在第一象限内相切时，斜率最大，即可求解.

过原点的直线和 L 在第一象限内相切时，斜率最大，设切点为 N，连接 ON，MN，则 $ON\perp MN$，所以直线 OH 斜率的最大值为 $k_{ON}=\tan\angle MON=\dfrac{|MN|}{|ON|}=\dfrac{2}{\sqrt{3^2-2^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

