小卷提速 · 提分

提分小卷 ▸ 1

1. A 【解析】本题考查集合的交集运算.

由 $x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=2$，则 $B=\{-1,2\}$. 由 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，得 $A=\{1,2\}$，所以 $A\cap B=\{2\}$，故选 A.

2. D 【解析】本题考查复数的模、复数的四则运算.

由 $z+\dfrac{1}{z}=1$ 得 $z^2+1=z$. 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $(a+b\mathrm{i})^2+1=a+b\mathrm{i}$，即 $a^2-b^2+1+2ab\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}$，故 $\begin{cases}a^2-b^2+1=a,\\2ab=b,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\b^2=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$ 所以 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}=1$. 故选 D.

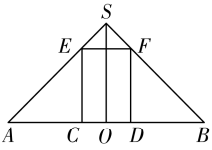
3. A 【解析】本题考查诱导公式、二倍角公式.

因为 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left[2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=2\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-1=2\times\dfrac{4}{25}-1=-\dfrac{17}{25}$，

又 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin 2\alpha$，所以 $\sin 2\alpha=\dfrac{17}{25}$. 故选 A.

4. C 【解析】本题考查圆柱与圆锥的体积公式.

如图，作出圆锥的轴截面 SAB，根据题意可知 $OB=OA=SO=2$，$SA=SB=2\sqrt{2}$，$OC=OD=\dfrac{1}{2}$.



易知 $\triangle ACE\backsim\triangle AOS$，所以 $\dfrac{CE}{OS}=\dfrac{AC}{AO}$，则 $\dfrac{CE}{2}=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2}$，解得 $CE=\dfrac{3}{2}$，所以圆锥 SO 与圆柱的体积之比为 $\dfrac{\frac{1}{3}\times 4\pi\times 2}{\frac{\pi}{4}\times\frac{3}{2}}=\dfrac{64}{9}$. 故选 C.

5. B 【解析】本题考查等差数列基本量的计算.

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题可知 $S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=0$，则 $a_3=0$，则 $a_5-2a_2=(a_3+2d)-2(a_3-d)=12$，解得 $d=3$. 因为 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$，所以 $\dfrac{S_n}{n}=a_1+\dfrac{(n-1)d}{2}=a_1+\dfrac{3}{2}(n-1)$，所以数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{3}{2}$ 的等差数列，所以 $\dfrac{S_{2\,026}}{2\,026}-\dfrac{S_{2\,025}}{2\,025}=\dfrac{3}{2}$. 故选 B.

6. C 【解析】本题考查古典概型.

由题意每局游戏所有可能出现的情况如表所示：

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

共有 36 种情况，记表格中 $(2,1)$ 表示甲的点数为 2，乙的点数为 1，则在每局游戏中甲获胜的情况有 $(6,5)$，$(6,3)$，$(6,1)$，$(5,4)$，$(5,2)$，$(4,3)$，$(4,1)$，$(3,2)$，$(2,1)$，共 9 种，概率为 $\frac{1}{4}$，同理可得乙获胜的概率为 $\frac{1}{4}$. 恰好进行了 3 局时游戏结束，甲胜 2 次或乙胜 2 次，且胜的第 2 次为游戏第 3 局，所以所求概率为 $2\times C_2^1\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$. 故选 C.

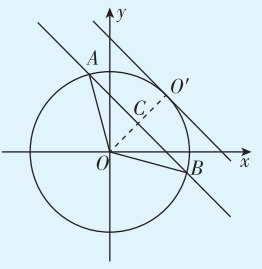
7. D 【解析】本题考查直线与圆的位置关系、向量的加法运算.

设 AB 的中点为 D，连接 OD，则 $OD\perp AB$，因为 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{AB}|$，所以 $2|\overrightarrow{OD}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{AB}|$，所以 $|\overrightarrow{AB}|\leqslant 2\sqrt{3}|\overrightarrow{OD}|$，因为 $|\overrightarrow{OD}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4$（提示：垂径定理），两式联立解得 $|\overrightarrow{OD}|^2\geqslant 1$. 因为直线 $x+y-k=0(k>0)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于不同的两点，所以 $|\overrightarrow{OD}|^2<4$，所以 $1\leqslant|\overrightarrow{OD}|^2<4$.

圆心 $O(0,0)$ 到直线 $x+y-k=0(k>0)$ 的距离 $|OD|=\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$，所以 $1\leqslant\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2<4$，解得 $\sqrt{2}\leqslant k<2\sqrt{2}$. 故选 D.

1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

（几何法）作点 O 关于直线 AB 的对称点 O'，连接 OO' 交 AB 于点 C，如图，则当 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OO'}|=\frac{\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{AB}|$ 时，$\triangle OAB$ 是顶角为 $120°$ 的等腰三角形. 此时 $OC=1$，$\angle COx=45°$，直线 AB 在 x 轴上的截距为 $\sqrt{2}$，这是 k 的一个临界取值. 当 k 值增大时，直线向右上方平移，结合图形知，满足题中不等式关系；当 k 值减小时，直线向左下方平移，结合图形知，不满足题中不等式关系. 另一个临界条件为满足直线与圆有两个交点，此时直线在 x 轴上的截距需小于 $2\sqrt{2}$. 故选 D.



8. B 【解析】本题考查根据函数的单调性比较大小.

（直接作差构造函数）令 $f(a)=a^2+2\log_4 a-2a-\log_2 a=a^2-2a$ $(a>0)$.

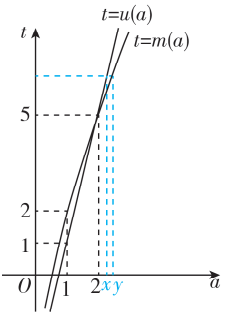
当 $0<a<2$ 时，$f(a)<0$，即 $a^2+2\log_4 a<2a+\log_2 a$；当 $a=2$ 时，$f(a)=0$，即 $a^2+2\log_4 a=2a+\log_2 a$；当 $a>2$ 时，$f(a)>0$，即 $a^2+2\log_4 a>2a+\log_2 a$. 设 $u(a)=a^2+2\log_4 a$，$m(a)=2a+\log_2 a$，其中 $a>0$，易知函数 $u(a)$，$m(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，且当 $a\to 0^+$ 时，$u(a)\to-\infty$，$m(a)\to-\infty$，当 $a\to+\infty$ 时，$u(a)\to+\infty$，$m(a)\to+\infty$，在同一平面直角坐标系下结合 $f(a)$ 的符号作出函数 $t=u(a)$，$t=m(a)$ 的大致图象.

当 $a=2$ 时，$m(a)=u(a)=5$，此时 $x=y=2$；

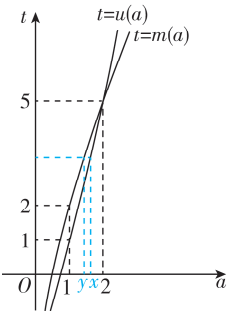
如图①，当 $t>5$ 时，$y>x>2$；如图②，当 $2\leqslant t<5$ 时，$2>x>y\geqslant 1$；

如图③，当 $1<t<2$ 时，$y<1<x$；如图④，当 $t\leqslant 1$ 时，$y<x\leqslant 1$.

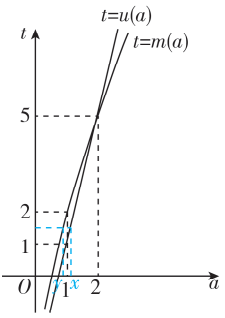
故选 B.



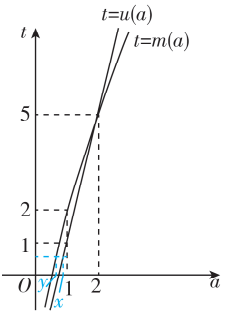
图①



图②



图③



图④

一题多解　**（特殊值验证法）** $x^2+2\log_4 x=x^2+\log_2 x=2y+\log_2 y$，令 $g(y)=2y+\log_2 y$，$y>0$，易知 $g(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(1)=2$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$x^2+\log_2 x=-\dfrac{3}{4}=g(y)$，由 $g(1)=2>g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0>-\dfrac{3}{4}=g(y)$，得 $1>\dfrac{1}{2}>y$，即 $1>x>y$，故 **A 可能正确**.

当 $x=4$ 时，$x^2+\log_2 x=18=g(y)$，由 $g(1)=2<g(4)=10<18=g(y)$，得 $1<4<y$，即 $1<x<y$，故 **C 可能正确**.

当 $x=\dfrac{4}{3}$ 时，$x^2+\log_2 x=\dfrac{16}{9}+\log_2\dfrac{4}{3}=g(y)$，由 $g(1)=2<g(y)<g\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{8}{3}+\log_2\dfrac{4}{3}$，得 $1<y<\dfrac{4}{3}$，即 $1<y<x$，故 **D 可能正确**. 故选 B.

9. **CD**　**【解析】**本题考查抛物线的定义及其性质，直线与圆的位置关系.

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

对于 A，抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $y=-1$，焦点为 $F(0,1)$，故 **A 错误**；

对于 B，由抛物线的定义可得 $|AF|+|BF|=y_1+y_2+2=8$，可得 $y_1+y_2=6$，所以线段 AB 的中点到 x 轴的距离为 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=3$，故 **B 错误**；

对于 C，因为 $|AF|=y_1+1$，线段 AF 的中点为 $\left(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{y_1+1}{2}\right)$，该

点到 x 轴的距离为 $\frac{y_1+1}{2}=\frac{1}{2}|AF|$，

故以线段 AF 为直径的圆与 x 轴相切，故 **C 正确**；

对于 D，由抛物线定义得点 A 到准线的距离与 $|AF|$ 相等，$|AF|=y_1+1$，故以 A 为圆心，线段 AF 的长为半径的圆与准线相切，故 **D 正确**. 故选 CD.

10. **BC** 【解析】本题考查三角函数的图象与性质、二次函数的最值.

对于 A，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\cos(-2x)+2\cos(-x)=\cos 2x+2\cos x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，又 $f(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)+2\cos(x+\pi)=\cos 2x-2\cos x\neq f(x)$，因此最小正周期不是 π，故 **A 错误**.

对于 B，$f(x)=\cos 2x+2\cos x=2\cos^2 x+2\cos x-1$，令 $t=\cos x$，则 $t\in[-1,1]$，$g(t)=2t^2+2t-1=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，当 $t=-\frac{1}{2}$ 时，$g(t)_{\min}=-\frac{3}{2}$，当 $t=1$ 时，$g(t)_{\max}=2+2-1=3$，故 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{3}{2},3\right]$，故 **B 正确**.

对于 C，令 $f(x)=0$，即 $2\cos^2 x+2\cos x-1=0$，解得 $\cos x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$（另一根 $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}<-1$，舍去），在 $(0,2\pi)$ 内，$\cos x=a$（其中 $0<a<1$）的两个根 x_1,x_2 关于 $x=\pi$ 对称，满足 $x_1+x_2=2\pi$（提示：余弦函数的对称性），故 **C 正确**.

对于 D，由方程 $2\cos^2 x+2\cos x-1=0$，根据 C 选项的分析可知，只有 $\cos x_1=\cos x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 符合，所以 $\cos x_1+\cos x_2=2\times\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}\neq-1$，故 **D 错误**. 故选 BC.

11. **BCD** 【解析】本题考查等比数列的判断、错位相减法求和、条件概率.

由题意可得 $\frac{P(A_n)}{P(B_n)}=\frac{1}{10}$，即 $P(A_n)=\frac{1}{10}P(B_n)$①，

又 $P(B_n)=P(A_n)+P(B_{n+1})$②，

由①②可得 $P(B_{n+1})=\frac{9}{10}P(B_n)$，

当 $n=1$ 时，$P(B_1)=1$，故数列 $\{P(B_n)\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{9}{10}$ 的等比数列，所以 $P(B_n)=\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，故 **B 正确**；

由 B 选项分析可得，$P(A_n)=\frac{1}{10}P(B_n)=\frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，所以 $P(A_2)=\frac{9}{100}$，故 **A 错误**；

$a_n=P(A_{n+1}|B_2)=\frac{P(A_{n+1}B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(A_{n+1})}{P(B_2)}=\frac{\frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，$a_1=\frac{P(A_2)}{P(B_2)}=\frac{1}{10}$，$a_{n+1}=\frac{9}{10}a_n$，即 $\{a_n\}$ 为等比数列，

故 **C 正确**；

因为 $S_n=nP(A_n)=\frac{n}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，设 $C_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$，则 $10C_n=1\times\left(\frac{9}{10}\right)^{0}+2\times\left(\frac{9}{10}\right)^{1}+3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{2}+\cdots+n\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，

$9C_n=1\times\left(\frac{9}{10}\right)^{1}+2\times\left(\frac{9}{10}\right)^{2}+3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{3}+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}+n\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n}$，

两式相减可得 $C_n=\left(\frac{9}{10}\right)^{0}+\left(\frac{9}{10}\right)^{1}+\left(\frac{9}{10}\right)^{2}+\left(\frac{9}{10}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}-n\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n}=\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n}}{1-\frac{9}{10}}-n\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n}=10-(n+10)\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n}<10$，即 $\sum_{k=1}^{n}S_k<10$，故 **D 正确**. 故选 BCD.

1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

对于 D，$S_n=nP(A_n)=\frac{n}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$，根据错位相减万能公式得 $M=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}-1}=-1$，$N=\frac{0-(-1)}{\frac{9}{10}-1}=-10$，$\sum_{k=1}^{n}S_k=(Mn+N)\cdot q^n-N=(-n-10)\left(\frac{9}{10}\right)^{n}-(-10)=10-(n+10)\left(\frac{9}{10}\right)^{n}<10$，故 **D 正确**.

知识拓展　错位相减万能公式：若 $c_n=(an+b)q^{n-1}(q\neq1)$，则 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(An+B)q^n-B$，其中 $A=\frac{a}{q-1}$，$B=\frac{b-A}{q-1}$.

12. 32　【解析】本题考查二项式的系数和、求指定项的系数.

易知各二项式系数的和为 2^n，由 $(2x+1)^n$ 的展开式中含 x^{n-1} 的项的系数为 $C_n^1 2^{n-1}$，可得 $\frac{2^n}{C_n^1 2^{n-1}}=\frac{1}{16}$，解得 $n=32$.

13. $\frac{3}{2}$　【解析】本题考查导数的几何意义.

令 $f(x)=2x+\sqrt{x}$，则 $f'(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,3)$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=\frac{5}{2}$，故曲线的切线方程为 $y-3=\frac{5}{2}(x-1)$，即 $y=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$.

令 $g(x)=\ln x+\frac{3}{2}x+a$，得 $g'(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{x}$，

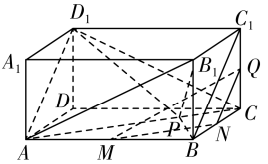
设切线与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 $\left(x_0,\ln x_0+\frac{3}{2}x_0+a\right)$ $(x_0>0)$，

则 $g'(x_0)=\frac{3}{2}+\frac{1}{x_0}=\frac{5}{2}$，解得 $x_0=1$，则切点坐标为

$\left(1,\frac{3}{2}+a\right)$，故切线方程为 $y-\left(\frac{3}{2}+a\right)=\frac{5}{2}(x-1)$，即 $y=\frac{5}{2}x-1+a$，由两切线为同一条直线，得 $\frac{1}{2}=-1+a$，解得 $a=\frac{3}{2}$（另解：由切点在切线上，得 $\frac{3}{2}+a=\frac{5}{2}\times1+\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{3}{2}$）.

14. 20π 【解析】本题考查几何体的外接球问题.

如图，连接 AC，AD_1，CD_1，BC_1，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，Q 分别是棱 AB，BC，CC_1 的中点，所以 $MN/\!/AC$，$QN/\!/BC_1/\!/AD_1$，又 $MN\cap QN=N$，MN，$QN\subset$ 平面 MNQ，$AD_1\cap AC=A$，AD_1，$AC\subset$ 平面 ACD_1，所以平面 $ACD_1/\!/$平面 MNQ，又 P 是底面 $ABCD$ 内一动点，直线 $D_1P/\!/$平面 MNQ，所以点 P 的轨迹为线段 AC.



在三棱锥 $A-PBB_1$ 中，易知 $B_1B\perp$ 平面 APB，要使三棱锥 $A-PBB_1$ 外接球表面积最小，则只需 $\triangle ABP$ 外接圆的半径 r 最小，在 $\triangle ABP$ 中，由正弦定理得 $2r=\frac{BP}{\sin\angle PAB}$，

因为 $\angle PAB$ 为定值，所以只需 BP 最小，显然当 $BP\perp AC$ 时，r 取最小值，r 的最小值为 $\frac{1}{2}AB=2$，

所以三棱锥 $A-PBB_1$ 外接球半径的最小值为 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{1}{2}BB_1\right)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

三棱锥 $A-PBB_1$ 外接球表面积的最小值为 $4\pi\times(\sqrt{5})^2=20\pi$.

提分小卷 ▸ 2

1. B 【解析】本题考查复数的除法运算、共轭复数、复数的几何意义.

因为 $z=\frac{3-4i}{1+2i}=\frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-5-10i}{5}=-1-2i$，则 $\bar{z}=-1+2i$，所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(-1,2)$，位于第二象限. 故选 B.

2. C 【解析】本题考查集合的交集运算.

函数 $y=2^x+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为当 $x=2$ 时，$y=6$，而 $x\in\mathbf{N}$，所以 $A=\{0,1,2\}$. 由 $|x+1|\leqslant2$，解得 $-3\leqslant x\leqslant1$，所以 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid-3\leqslant x\leqslant1\}$，因此 $A\cap B=\{0,1\}$，故选 C.

3. D 【解析】本题考查充分、必要条件的判断.

在四边形 $ABCD$ 中，由 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 可得四边形 $ABCD$ 为平行四边形，若 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，则平行四边形 $ABCD$ 对角线互相垂直，所以四边形 $ABCD$ 为菱形，反之也成立，故“$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$”是“四边形 $ABCD$ 是菱形”的充要条件. 故选 D.

4. C 【解析】本题考查排列组合问题.

节目甲被安排在前两个节目演出，可分两种情况讨论：

①节目甲被安排在第一个节目演出，因为节目乙、丙必须连续出场，有 A_2^2 种安排方法，利用捆绑法可视为 1 个元素，与其余 3 个元素全排列，有 A_4^4 种安排方法，共有 $A_2^2A_4^4=48$（种）安排方法；

②节目甲安排在第二个节目演出，则节目乙、丙连续出场的位置有 3 种情况，且须考虑两者的顺序，有 2 种情况，再将剩下的三个节目全排列，安排在剩余的 3 个位置，故共有 $3\times2\times A_3^3=36$（种）安排方法.

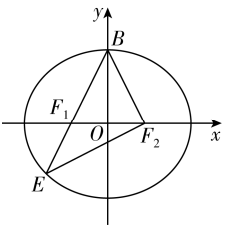
由分类加法计数原理得，共有 $48+36=84$（种）安排方法. 故选 C.

5. D 【解析】本题考查利用给定函数模型解决实际问题、指数与对数运算.

将 $K=-6\,000$，$r=\ln 2$ 代入定价公式 $K=-X_n e^{-rT_n}$，得 $-6\,000=-X_n e^{-T_n\ln 2}$，则 $6\,000=X_n\cdot 2^{-T_n}$，整理得 $X_n=6\,000\times 2^{T_n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）. 关键点

当 $n=1$ 时，$X_1=6\,000\times 2^{T_1}$，当 $n=2$ 时，$X_2=6\,000\times 2^{T_2}$，又 $X_2=8X_1$，所以 $6\,000\times 2^{T_2}=8\times 6\,000\times 2^{T_1}$，即 $2^{T_2}=2^{T_1+3}$，即 $\dfrac{2^{T_2}}{2^{T_1}}=2^3$，即 $T_2-T_1=3$. 故选 D.

6. A 【解析】本题考查椭圆的离心率.



如图所示，由题意可知 $|BF_1|=|BF_2|=a$，设 $|EF_1|=m$，椭圆半焦距为 c，则 $|BE|=a+m$，$|EF_2|=2a-m$.

由 $BF_2\perp EF_2$ 及勾股定理可得 $|BF_2|^2+|EF_2|^2=|BE|^2$，即 $a^2+(2a-m)^2=(a+m)^2$，解得 $m=\dfrac{2}{3}a$，故 $|BE|=\dfrac{5}{3}a$，关键点

所以 $\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{|BF_2|}{|BE|}=\dfrac{a}{\frac{5a}{3}}=\dfrac{3}{5}$.

在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1|\cdot|BF_2|}=\dfrac{2a^2-4c^2}{2a^2}=\dfrac{3}{5}$，整理得 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{5}$，因为 $0<\dfrac{c}{a}<1$，所以 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故选 A. 关键点



1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

（椭圆的焦半径公式）根据椭圆的焦半径公式可得，$|EF_1|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\angle BF_1x}=\dfrac{ab^2}{a^2+c^2}=\dfrac{a(a^2-c^2)}{a^2+c^2}$，$|EF_2|=2a-|EF_1|=\dfrac{a(a^2+3c^2)}{a^2+c^2}$，$|BE|=a+|EF_1|=\dfrac{2a^3}{a^2+c^2}$.

由勾股定理得，$|BE|^2=|BF_2|^2+|EF_2|^2$，化简可得 $(2a^2)^2=(a^2+c^2)^2+(a^2+3c^2)^2$，整理得 $a^4-4a^2c^2-5c^4=0$，解得 $a^2=5c^2$ 或 $a^2=-c^2$（舍去），故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故选 A.

7. B 【解析】本题考查根据正弦型函数的图象与直线的交点之间的距离求参数.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由题图可得 $\dfrac{3T}{4}=\dfrac{7\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=3\pi$，则 $T=4\pi$，所以 $\dfrac{2\pi}{\omega}=4\pi$，解得 $\omega=\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\varphi\right)$.

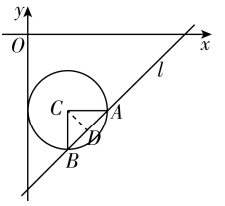
由图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{2},2\right)$，得 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)=2$，所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)=1$，令 $\dfrac{\pi}{4}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<$

$\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 A,B,C 是直线 $y=m(m>0)$ 与函数 $f(x)$ 图象从左至右的三个相邻交点，且 $|AB|=\frac{1}{3}|BC|$，所以 $4|AB|=4\pi$，所以 $|AB|=\pi$，所以 $\frac{1}{2}|AB|=\frac{\pi}{2}$，所以 $m=2\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$. 故选 B.

8. B 【解析】本题考查等差数列的性质、直线过定点问题、直线和圆的位置关系.

分析：利用等差数列的性质把直线方程整理成含 a_k 和公差的式子，进而求出直线恒过的定点.



由题意可知圆 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=1$ 的圆心为 $C(1,-2)$，半径 $r=1$，

直线 $a_kx+a_{k+2}y+a_{k+5}=0$ 可化为 $a_kx+(a_k+2d)y+a_k+5d=0$，即 $(x+y+1)a_k+(2y+5)d=0(k\in\mathbf{N}^*)$.

令 $\begin{cases}x+y+1=0,\\2y+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=-\frac{5}{2},\end{cases}$ 则直线 l 过定点 $D\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

分析：要让圆心角最小，当半径固定时，就要让弦长最短，也就是让圆心到直线的距离最大.

易知点 D 在圆 C 内，连接 CD，则当 $CD\perp AB$ 时，弦长 $|AB|$ 最小，点 C 到直线 l 的距离最大，此时 $\angle ACB$ 最小. 关键点

又因为 $|CD|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{5}{2}+2\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|AB|_{\min}=2\sqrt{r^2-|CD|^2}=\sqrt{2}$，此时 $|CA|^2+|CB|^2=|AB|^2$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$.

故选 B.

9. BCD 【解析】本题考查中位数、平均数、方差、极差的计算.

对于 A，甲 5 场比赛得分由低到高分别为 15，16，18，21，30，乙 5 场比赛得分由低到高分别为 5，10，16，22，38，则甲的极差为 30−15=15，乙的极差为 38−5=33，故甲得分的极差小于乙得分的极差，故 **A 错误**；

对于 D，甲得分的平均数为 $\frac{15+16+18+21+30}{5}=20$，乙得分的平均数为 $\frac{5+10+16+22+38}{5}=18.2$，则甲得分的平均数大于乙得分的平均数，故 **D 正确**；

对于 C，甲得分的中位数为 18，乙得分的中位数为 16，则甲得分的中位数大于乙得分的中位数，故 **C 正确**；

对于 B，甲得分的方差为 $\frac{(15-20)^2+(16-20)^2+(18-20)^2+(21-20)^2+(30-20)^2}{5}=29.2$，

乙得分的方差为 $\frac{(5-18.2)^2+(10-18.2)^2+(16-18.2)^2+(22-18.2)^2+(38-18.2)^2}{5}=130.56$，

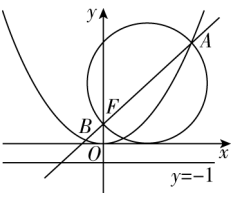
故甲得分的方差小于乙得分的方差，故 **B 正确**. 故选 BCD.

10. BC 【解析】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线的

位置关系、抛物线中的最值问题.

对于 A，B：当点 P 运动到点 $(t,1)$ 时，由抛物线定义得 $|PF|=1+\frac{p}{2}=2$，解得 $p=2$，即抛物线方程为 $x^2=4y$，准线方程为 $y=-1$，故 **A 错误，B 正确.**

对于 C：分析：利用圆心到直线的距离是否等于半径，判断直线与圆是否相切. 当直线 l 过焦点 F 时，如图所示，不妨设点 A 在第一象限，坐标为 (x_0,y_0)，则 $|FA|=y_0+\frac{p}{2}=y_0+1$，故以线段 AF 为直径的圆的半径为 $\frac{y_0+1}{2}$，因为 $A(x_0,y_0)$，$F(0,1)$，所以该圆的圆心坐标为 $\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0+1}{2}\right)$，则圆心到 x 轴的距离与该圆半径相等，即该圆与 x 轴相切，故 **C 正确.**

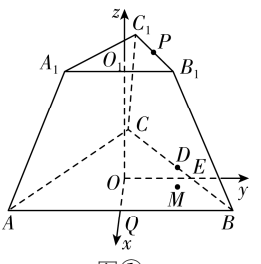


对于 D：分析：联立直线方程与抛物线方程得到交点坐标之间的关系，再结合焦半径公式判断即可. 由题意，直线 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y=kx+m$，联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2=4y,\end{cases}$ 整理得 $x^2-4kx-4m=0$，$\Delta=(-4k)^2+16m>0$，即 $k^2+m>0$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，所以 $x_A+x_B=4k$，所以 $y_A+y_B=k(x_A+x_B)+2m=4k^2+2m$，所以 $|AF|+|BF|=y_A+1+y_B+1=y_A+y_B+2=4k^2+2m+2$，无法得到 $|AF|+|BF|\geqslant 4$，故 **D 错误.** 故选 BC.

11. **AC** 【解析】本题考查线线垂直的判定、立体几何中的轨迹问题、体积问题.

A 选项，连接 O_1O，显然 $O_1O\perp$ 底面 ABC，取 AB 的中点 Q，连接 OQ，过点 O 作 $OE/\!/AB$，交 BC 于点 E，则 $CE=2BE$，

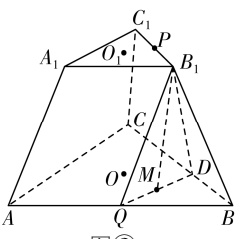
以 O 为坐标原点，OQ，OE，OO_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图①所示的空间直角坐标系，



图①

设 $AB=2A_1B_1=2$，$O_1O=h$，则 $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},h\right)$，$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-1,0\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,0\right)$，$C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},h\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$，所以 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2},h\right)\cdot(-\sqrt{3},-1,0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，故 $AA_1\perp BC$，**A 正确.**

B 选项，设 $AB=2A_1B_1=2$，则 $BD=\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}$，取 AB 的中点 Q，连接 DQ，B_1Q，如图②所示，因为 $A_1B_1/\!/AQ$ 且 $A_1B_1=AQ$，所以四边形 A_1B_1QA 为平行四边形，所以 $A_1A/\!/B_1Q$，又 $B_1Q\subset$ 平面 B_1QD，$A_1A\not\subset$ 平面 B_1QD，所以 $A_1A/\!/$ 平面 B_1QD，故当点 M 在线段 QD 上时，



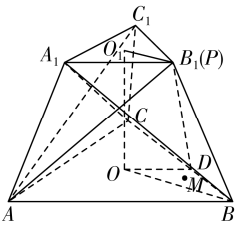
图②

关键点

满足 $AA_1/\!/$ 平面 B_1DM，故点 M 的轨迹长度为线段 QD 的长

度，又 $BQ=\frac{1}{2}AB=1$，所以由余弦定理得 $QD=\sqrt{BQ^2+BD^2-2BQ\cdot BD\cos 60^\circ}=\sqrt{1+\frac{4}{9}-2\times1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，所以点 M 的轨迹长不等于 $\frac{1}{3}AB$，**B 错误**.

C 选项，连接 OO_1，设 $AB=2A_1B_1=2$，$OO_1=h$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，$V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OO_1=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}h=\frac{\sqrt{3}}{3}h$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$V_{A-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot OO_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}h=\frac{\sqrt{3}}{12}h$，又正三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}})\cdot OO_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot h=\frac{7\sqrt{3}}{12}h$，所以 $V_{A-CBB_1C_1}=\frac{7\sqrt{3}}{12}h-\frac{\sqrt{3}}{12}h=\frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{3}{2}V_{A_1-ABC}$，**C 正确**.



图③

D 选项，如图③所示，当点 P 与 B_1 重合，$BD=\frac{1}{4}BC$ 时，$PD\perp BC$，连接 O_1P，OD，OB，此时 O_1P 与 OB 平行，故 O_1P 与 OD 不平行，又 OO_1 与 PD 不平行，故 O_1，O，D，P 四点构成的图形不是直角梯形，**D 错误**. 故选 AC.

12. 5 【解析】本题考查利用基本不等式求最值.

易知 $a\neq2$，由 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，得 $b=\frac{a}{a-2}$，所以 $\frac{2a}{b}+b=2(a-2)+\frac{a}{a-2}=2(a-2)+\frac{2}{a-2}+1$，因为 $a>0$，$b=\frac{a}{a-2}>0$，所以 $a>2$，所以 $2(a-2)+\frac{2}{a-2}+1\geqslant2\sqrt{2(a-2)\cdot\frac{2}{a-2}}+1=5$，当且仅当 $2(a-2)=\frac{2}{a-2}$，即 $a=3$ 时等号成立，所以 $\frac{2a}{b}+b$ 的最小值为 5.

13. $\{x\mid-2\,026<x<-2\,025\}$ 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性、根据函数的单调性解不等式.

因为 $\frac{f'(x)}{2x}+\frac{f(x)}{x^2}>0$ 且 $x\in(0,+\infty)$，所以 $x^2f'(x)+2xf(x)>0$，设 $g(x)=x^2f(x)$ $(x>0)$，则 $g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 由 $x+2\,026>0$，得不等式 $(x+2\,026)f(x+2\,026)<\frac{f(1)}{x+2\,026}$ 可化为 $(x+2\,026)^2f(x+2\,026)<1^2\cdot f(1)$，即 $g(x+2\,026)<g(1)$，可得 $0<x+2\,026<1$，解得 $-2\,026<x<-2\,025$.

关键点



30 s 速解　西安交通大学——王紫蓬

（特值法）易知 $f(x)=1$，$x>0$ 符合题意，则此题转化为解不等式组 $\begin{cases}x+2\,026<\frac{1}{x+2\,026},\\x+2\,026>0,\end{cases}$ 故所求不等式的解集为 $\{x\mid-2\,026<x<-2\,025\}$.

14. $\frac{1}{4}$　$\frac{15}{4}$　【解析】本题考查古典概型、离散型随机变量的数学期望及其性质.

甲先从 8 张卡片中随机抽取 2 张，有 $C_8^2=28$（种）情况，乙从剩下的 6 张卡片中随机抽取 1 张，有 $C_6^1=6$（种）情况，因此一局游戏中甲、乙所抽卡片的所有可能结果共有 $28\times6=168$（种）.

由题意可知，“默契局”中 a 的可能取值是 2,3,4,5,6,7.

关键点

当 $a=2$ 时，甲抽到的卡片只能是 $\{1,2\}$，此时“默契局”需满足 $2<b<4$，故乙只能抽编号为 3 的卡片，情况数为 $1\times1=1$；

当 $a=3$ 时，甲抽到的卡片可以是 $\{1,3\}$ 或 $\{2,3\}$，此时“默契局”需满足 $3<b<6$，则乙抽到的卡片编号为 4 或 5，情况数为 $2\times2=4$；

当 $a=4$ 时，甲抽到的卡片可以是 $\{1,4\}$ 或 $\{2,4\}$ 或 $\{3,4\}$，此时“默契局”需满足 $4<b<8$，则乙抽到的卡片编号为 5 或 6 或 7，情况数为 $3\times3=9$；

当 $a=5$ 时，甲抽到的卡片可以是 $\{1,5\}$ 或 $\{2,5\}$ 或 $\{3,5\}$ 或 $\{4,5\}$，此时“默契局”需满足 $5<b\leqslant8$，则乙抽到的卡片编号为 6 或 7 或 8，情况数为 $4\times3=12$；

当 $a=6$ 时，甲抽到的卡片可以是 $\{1,6\}$ 或 $\{2,6\}$ 或 $\{3,6\}$ 或 $\{4,6\}$ 或 $\{5,6\}$，此时“默契局”需满足 $6<b\leqslant8$，则乙抽到的卡片编号为 7 或 8，情况数为 $5\times2=10$；

当 $a=7$ 时，甲抽到的卡片可以是 $\{1,7\}$ 或 $\{2,7\}$ 或 $\{3,7\}$ 或 $\{4,7\}$ 或 $\{5,7\}$ 或 $\{6,7\}$，此时“默契局”需满足 $7<b\leqslant8$，则乙只能抽编号为 8 的卡片，情况数为 $6\times1=6$.

因此，“默契局”的总情况数为 $1+4+9+12+10+6=42$，故一局游戏是“默契局”的概率 $P=\frac{42}{168}=\frac{1}{4}$.

设一局游戏中甲、乙得分之和为 Y，则 $Y=1,2$，由上述分析可知 $P(Y=1)=\frac{3}{4}$，$P(Y=2)=\frac{1}{4}$，故一局游戏后甲、乙得分之和的期望 $E(Y)=2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$. 由于三局游戏是相互独立的，总得分之和 X 是各局游戏得分之和的累加，根据数学期望的线性性质，有 $E(X)=3\times E(Y)=3\times\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$.

提分小卷 ▸ 3

1. D　【解析】本题考查集合的交集、补集运算.

因为全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $B=\{3,4,5,6\}$，所以 $\complement_U B=\{1,2,7,8\}$，又因为集合 $A=\{1,2,3,4\}$，所以 $A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$. 故选 D.

2. C　【解析】本题考查百分位数.

将该同学这 8 次的数学考试成绩从小到大排序：115,117,119,125,126,129,130,132.

因为 $8\times40\%=3.2$，所以第 40 百分位数为第 4 个数，即 125. 故选 C.

3. C　【解析】本题考查复数的运算与共轭复数的概念.

由于 $i^2=-1$，$i^4=1$，则 $i^5=i^4\cdot i=i$，所以 $z=1-i$，共轭复数 $\bar{z}=$

1+i. 故选 C.

4. C 【解析】本题考查平面向量的模、向量数量积的坐标运算.

由题意可得，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2m+32=40$，解得 $m=4$，故 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{m^2+8^2}=4\sqrt{5}$. 故选 C.

5. B 【解析】本题考查奇函数的性质、利用函数的单调性解不等式.

依题意，$f(x)=g(x)-e^{x}+e^{-x}$，令 $h(x)=-e^{x}+e^{-x}$，则 $h(x)$ 为奇函数，又 $g(x)$ 是奇函数，所以函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

因为函数 $g(x)$，$y=-e^{x}$，$y=e^{-x}$ 都在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以不等式 $f(\log_2 x)>-f(2)=f(-2)$，则 $\log_2 x<-2$，解得 $0<x<\frac{1}{4}$（提示：真数大于 0）. 故选 B.

6. A 【解析】本题考查余弦定理、三角形面积公式、基本不等式的应用.

由题得 $\frac{5\sin A}{1+\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{5\sin^2 A+(1+\cos A)\cos A}{(1+\cos A)\sin A}=\frac{5-4\cos^2 A+\cos A}{(1+\cos A)\sin A}=\frac{-(4\cos A-5)(\cos A+1)}{(1+\cos A)\sin A}$，易知 $\cos A\neq -1$，故原式 $=\frac{-(4\cos A-5)}{\sin A}=3$，即 $5-4\cos A=3\sin A$，又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，解得 $\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos A=\frac{4}{5}$. 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $4=b^2+c^2-\frac{8}{5}bc$，因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$（当且仅当 $b=c$ 时取等号），所以 $4=b^2+c^2-\frac{8}{5}bc\geqslant 2bc-\frac{8}{5}bc=\frac{2}{5}bc$，即 $bc\leqslant 10$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立.

关键点

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3}{10}bc\leqslant\frac{3}{10}\times 10=3$，故选 A.

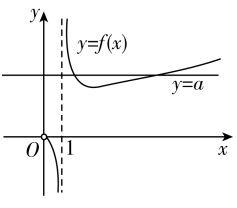
7. A 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性和最值、解含有参数的一元二次不等式.

$f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，对 $f(x)$ 求导可得 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>e$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$ 或 $1<x<e$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(e,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$ 和 $(1,e)$，

易错点

易错点

作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



当 $a<0$ 时，由 $[f(x)]^2-af(x)\leqslant 0$，可得 $a\leqslant f(x)\leqslant 0$，由图象可知，不存在整数 x 满足条件；

当 $a=0$ 时，由 $[f(x)]^2-af(x)\leqslant 0$，可得 $f(x)=0$，该方程无解；

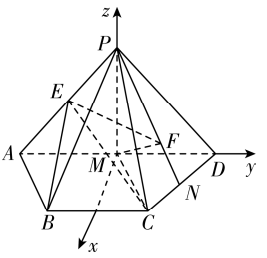
当 $a>0$ 时，由 $[f(x)]^2-af(x)\leqslant 0$，可得 $0\leqslant f(x)\leqslant a$，又 $f(2)=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}$，$f(4)=\frac{4}{\ln 4}$，$f(5)=\frac{5}{\ln 5}$，由 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(e,+\infty)$，得 $f(2)=f(4)<f(5)$，所以要使 $0\leqslant f(x)\leqslant a$ 有三个整数解，则 $\frac{2}{\ln 2}\leqslant a<\frac{5}{\ln 5}$，所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{\ln 2},\frac{5}{\ln 5}\right)$.

故选 A.

8. C 【解析】本题考查外接球问题.

因为 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PM\perp AD$.

以 M 为坐标原点，MD，MP 所在直线分别为 y，z 轴，以平面 $ABCD$ 内过点 M 且垂直于 AD 的直线为 x 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $M(0,0,0)$，$C(3\sqrt{3},3,0)$，$D(0,6,0)$，$P(0,0,6)$，$N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{9}{2},0\right)$，设 $E(0,n,3)$. 连接 EB，EC，EF，MF.



设平面 EBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，易知 $\overrightarrow{CE}=(-3\sqrt{3},n-3,3)$，直线 BC 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(0,1,0)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=-3\sqrt{3}x+(n-3)y+3z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}=y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $z=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,0,\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PN}=\lambda\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{9}{2},-6\right)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{9}{2}\lambda,-6\lambda\right)$，$0<\lambda<1$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PF}=(0,-n,3)+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{9}{2}\lambda,-6\lambda\right)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda,\frac{9}{2}\lambda-n,3-6\lambda\right)$.

因为 $EF\subset$ 平面 EBC，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda+3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PN}=(0,0,6)+(\sqrt{3},3,-4)=(\sqrt{3},3,2)$，即 $F(\sqrt{3},3,2)$.

设经过 F，M，C，D 四点的球的球心为 $O(a,b,c)$，

关键点

由 $\begin{cases}OM=OC,\\ OM=OD,\\ OM=OF,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=(a-3\sqrt{3})^2+(b-3)^2+c^2,\\ a^2+b^2+c^2=a^2+(b-6)^2+c^2,\\ a^2+b^2+c^2=(a-\sqrt{3})^2+(b-3)^2+(c-2)^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=3,\\ c=-2,\end{cases}$ 即 $O(\sqrt{3},3,-2)$，故球 O 的半径 $OM=\sqrt{3+9+4}=4$，

因此经过 F，M，C，D 四点的球的表面积为 $4\pi\cdot OM^2=4\pi\times16=64\pi$. 故选 C.



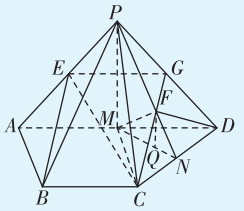
90 s 速解　　西安交通大学——王紫蓬

（几何法）由 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，$MD\subset$ 平面 $ABCD$，得 $PM\perp MD$.

因为 $\angle PDM=45°$，所以 $\triangle PMD$ 为等腰直角三角形，$PM=MD=6$. 连接 EB，EC.

设 PD 与平面 EBC 交于点 G，连接 EG，CG，因为 $AD/\!/BC$，$AD\subset$ 平面 ADP，$BC\not\subset$ 平面 ADP，所以 $BC/\!/$ 平面 ADP. 又平面 $EBC\cap$ 平面 $ADP=EG$，$EG\subset$ 平面 PAD，所以 $BC/\!/EG$. 又因为 $AD/\!/BC$，所以 $AD/\!/EG$，且点 E 是 PA 的中点，所以点 G 是 PD 的中点.

因为 $PN\cap$ 平面 EBC 于点 F，则 C，F，G 三点共线. 在 $\triangle PCD$ 中，N，G 分别是 CD，PD 的中点，故 F 为 $\triangle PCD$ 的重心（提示：三角形中线交点为其重心），则点 F 是线段 PN 上靠近点 N 的三等分点.



连接 FM,MN,FD，即求三棱锥 $F-MCD$ 的外接球表面积.
过点 F 作 $FQ\perp$ 平面 MCD 于点 Q. 因为 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，$FQ\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PM/\!/FQ$，则 P,M,F,Q 四点共面，可得点 Q 在平面 PMN 内，又因为点 Q 在平面 $ABCD$ 内，平面 $PMN\cap$ 平面 $ABCD=MN$，所以点 Q 在线段 MN 上.
又因为 $PM/\!/FQ$，由平行线分线段成比例得，点 Q 是线段 MN 上靠近点 N 的三等分点，则 $FQ=\frac{1}{3}PM=2$.
因为 $\triangle MCD$ 是等边三角形，所以点 Q 是 $\triangle MCD$ 的中心，进而可知三棱锥 $F-MCD$ 是正三棱锥，球心在 FQ 所在直线上，$MQ=2\sqrt{3}$.
设球心为 O，点 O 到平面 MCD 的距离为 x（设球心 O 与点 F 在面 MCD 的同侧），连接 OM，则有 $MQ^2+OQ^2=OM^2=OF^2$，
即 $(2\sqrt{3})^2+x^2=(2-x)^2$，解得 $x=-2$. 所以点 O 与点 F 在平面 MCD 的异侧，进而求出半径 $R=OF=4$，所以球的表面积 $S=4\pi R^2=64\pi$. 故选 C.

9. ABC 【解析】本题考查求指定项的二项式系数、二项式系数和.
对于 A，由题意可得 $C_n^3=C_n^6$，则 $n=9$（提示：$C_n^m=C_n^{n-m}$），故 **A 正确**；
对于 B，二项式系数和为 2^9，令 $x=1$，可得展开式的系数和为 2^9，故 **B 正确**；
对于 C，由 B 选项分析得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=2^9$，令 $x=-1$，得 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9=-4^9$，
两式相减可得 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{2^9+4^9}{2}=2^8+2\times4^8$，故 **C 正确**；
对于 D，令 $x=\frac{1}{3}$，得 $a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}=0$，令 $x=0$，得 $a_0=-1$，所以 $\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_9}{3^9}=1$，故 **D 错误**. 故选 ABC.

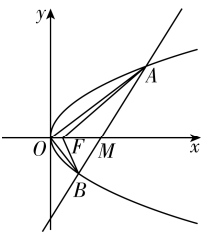
10. ABD 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性、极值点、零点.
由 $\cos x>0$，解得 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\ (k\in\mathbf{Z})$，定义域关于原点对称，由于 $f(-x)=\ln[\cos(-x)]+\sqrt{3}|-x|=\ln(\cos x)+\sqrt{3}|x|=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 **A 正确**；
对于 B，当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln(\cos x)+\sqrt{3}x$，则 $f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{3}=-\tan x+\sqrt{3}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故 **B 正确**；
对于 C，当 $x>0$ 时，令 $f'(x)=-\tan x+\sqrt{3}=0$，解得 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbf{N})$，当 $x<0$ 时，令 $f'(x)=-\tan x-\sqrt{3}=0$，解得 $x=-\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\ (k_1\in\mathbf{Z},k_1\leqslant0)$，综上，$f(x)$ 的极值点为 $\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{N}$ 和 $-\frac{\pi}{3}+2k_1\pi\ (k_1\in\mathbf{Z},k_1\leqslant0)$，故 **C 错误**；
对于 D，当 $x=0$ 时，$f(0)=\ln(\cos0)+\sqrt{3}|0|=0\neq\frac{1}{2}$，则 0 不

是函数 $y=f(x)-\frac{1}{2}$ 的零点，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，由 B 选项分析可知，$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，由于 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}=-\ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}>1$，当 $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 时，$f(x)\to-\infty$，由于 $f(0)=0<\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)>1>\frac{1}{2}$，故函数 $y=f(x)-\frac{1}{2}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上有唯一零点，在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点，所以函数 $y=f(x)-\frac{1}{2}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有 2 个零点，根据偶函数的对称性可得在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上也有 2 个零点，综上，函数 $y=f(x)-\frac{1}{2}$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且仅有 4 个零点，故 **D 正确**.

故选 ABD.

11. **ABD** 【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系、向量的数量积、动点轨迹方程.

由题可知直线 l 的斜率不为 0，设其方程为 $x=ty+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，与抛物线方程联立，可得 $y^2-2ty-2m=0$，$\Delta=(-2t)^2-4\times(-2m)=4t^2+8m>0$，所以 $y_1+y_2=2t$，$y_1y_2=-2m$，又因为 $y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$，所以 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4}=m^2$. 因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，故 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $m^2-2m=0$，解得 $m=0$ 或 $m=2$，当 $m=0$ 时，直线 l 过坐标原点，与题意不符，故舍去；当 $m=2$ 时，满足 $\Delta>0$，则直线 l 的方程为 $x=ty+2$，所以直线 l 过定点 $M(2,0)$.



对于 A，分析：根据抛物线的定义及 x_1,x_2 的关系求得 x_1,x_2 的值，进而可得直线 l 垂直于 x 轴，将 x_1,x_2 代入抛物线方程即可判断.

由题意可得焦点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，又 $|AF|=\frac{5}{2}$，即 $x_1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，解得 $x_1=2$，又 $x_1x_2=m^2=4$，所以 $x_2=2$，所以直线 l 垂直于 x 轴，$y^2=2x$ 中，令 $x=2$，得 $y=\pm2$，不妨设 $y_1=2$，$y_2=-2$，所以 $|AB|=4$，故 **A 正确**.

对于 B，当直线 l 垂直于 x 轴时，点 F 到 l 的距离最大，此时 $|MF|=\frac{3}{2}$，所以点 F 到 l 的距离的最大值为 $\frac{3}{2}$，故 **B 正确**.

对于 C，分析：结合向量的数量积和基本不等式判断. 易知 $x_1x_2=4$，$x_1>0$，$x_2>0$，$y_1y_2=-4$，则 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\left(x_1-\frac{1}{2},y_1\right)\cdot\left(x_2-\frac{1}{2},y_2\right)=x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}+y_1y_2=-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}\leqslant-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{x_1x_2}+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$，当且仅当 $x_1=x_2=2$ 时取等号，所以 $|\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}|\geqslant\frac{7}{4}$，又 $4|\overrightarrow{OF}|=4\times\frac{1}{2}=2$，故 $|\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}|$ 和 $4|\overrightarrow{OF}|$ 的大小不确定，故 **C 错误**.

对于 D，由题意可得 $y_P=\frac{y_1+y_2}{2}=t$，$x_P=ty_P+2=y_P^2+2$，即 $y_P^2=x_P-2$，所以点 P 的轨迹是一条抛物线，故 **D 正确**. 故选 ABD.

知识拓展 若直线 l 交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于 A,B 两点，且满足 $OA\perp OB$（O 为原点），则直线 l 恒过定点 $(2p,0)$.

12. $\frac{3}{5}$ 【解析】本题考查三角函数的诱导公式、同角三角函数的基本关系、二倍角公式.

由 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1=2\times\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$，

所以 $\frac{2\sin^2x+\sin 2x}{\tan x+1}=\frac{2\sin^2x\cos x+\sin 2x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin 2x(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\sin 2x=\frac{3}{5}$.

一题多解 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，可得 $\cos x+\sin x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，所以 $(\cos x+\sin x)^2=1+\sin 2x=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$，所以 $\sin 2x=\frac{3}{5}$.

$\frac{2\sin^2x+\sin 2x}{\tan x+1}=\frac{2\sin^2x\cos x+\sin 2x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin 2x(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\sin 2x=\frac{3}{5}$.

13. $[4,+\infty)$ 【解析】本题考查根据曲线与圆相交的公共点个数求参数范围问题.

联立 $\begin{cases}kx^2=(1+y)(1-y)^3,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(1-y^2)[(1-y)^2-k]=0$.

当 $y=1$ 时，$x=0$，当 $y=-1$ 时，$x=0$，即 $(0,1)$，$(0,-1)$ 是曲线 C 与圆 M 的 2 个公共点.

因为曲线 C 与圆 M 恰有 2 个公共点，所以方程 $(1-y)^2-k=0$

关键点

除 $y=\pm1$ 外没有其他符合条件的解.

因为 $-1\leqslant y\leqslant 1$，所以 $0\leqslant(1-y)^2\leqslant 4$，又 $k>0$，所以 $k\geqslant 4$.

14. 158 【解析】本题考查根据递推式求数列的通项公式、利用倒序相加法求和.

因为 $a_n=a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $a_{n+1}=a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}$，所以 $a_{n+1}=a_n+\frac{a_{n+1}}{n+1}$，整理得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，故 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列，又 $a_1=\frac{1}{20}$，所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=\frac{1}{20}$，即 $a_n=\frac{n}{20}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

因为 $f(x)=(x-2)^3+2(x-2)+2$，

所以 $f(4-x)=(4-x-2)^3+2(4-x-2)+2=-(x-2)^3-2(x-2)+2$，

所以 $f(x)+f(4-x)=4$，

又 $a_n=\frac{n}{20}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $f(a_i)=f\left(\frac{i}{20}\right)$，$i\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\sum_{i=1}^{79}f(a_i)=f\left(\frac{1}{20}\right)+f\left(\frac{2}{20}\right)+\cdots+f\left(\frac{78}{20}\right)+f\left(\frac{79}{20}\right)$，

即 $\sum_{i=1}^{79}f(a_i)=f\left(\frac{79}{20}\right)+f\left(\frac{78}{20}\right)+\cdots+f\left(\frac{2}{20}\right)+f\left(\frac{1}{20}\right)$，

所以 $2\sum_{i=1}^{79} f(a_i)=\left[f\left(\frac{1}{20}\right)+f\left(\frac{79}{20}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{20}\right)+f\left(\frac{78}{20}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{79}{20}\right)+f\left(\frac{1}{20}\right)\right]=4\times79$,

所以 $\sum_{i=1}^{79} f(a_i)=2\times79=158$.

提分小卷 ▸ 4

1. C 【解析】本题考查抛物线的标准方程及几何性质.

由抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 过点 $A(2,2\sqrt{2})$，得 $(2\sqrt{2})^2=2p\cdot2$，解得 $p=2$，所以抛物线的焦点到准线的距离为 2. 故选 C.

2. D 【解析】本题考查集合的并集运算、由指数函数的单调性解不等式、解绝对值不等式.

由 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上单调递减，解得 $x<-2$，所以 $A=\{x\mid x<-2\}$，由 $|x+1|<2\Rightarrow-2<x+1<2$，解得 $-3<x<1$，所以 $B=\{x\mid-3<x<1\}$，故 $A\cup B=(-\infty,1)$. 故选 D.

3. C 【解析】本题考查函数的奇偶性.

因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，两边同时求导可得 $f'(-x)(-x)'=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(-3)=f'(3)$，因为 $x>1$ 时，$f(x)=x^2$，所以 $x>1$ 时，$f'(x)=2x$，所以 $f'(-3)=f'(3)=2\times3=6$.

4. B 【解析】本题考查求二项展开式中特定项的系数.

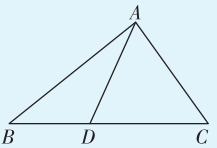
由 $(1+x)^n(n\geqslant2)$ 的通项为 $T_{r+1}=C_n^r x^r$，知展开式中 x^2 的系数为 C_n^2，故 $(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{11}$ 的展开式中 x^2 的系数是 $C_2^2+C_3^2+\cdots+C_{11}^2=C_{12}^3=220$. 故选 B.

5. D 【解析】本题考查利用平面向量基本定理求参数、基本不等式“1”的妙用求最值.

连接 AF，由题意知 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，又 D,E,F 三点共线，则存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DE}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1-\lambda}{x}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{y}\overrightarrow{AC}$，所以 $\begin{cases}\frac{1-\lambda}{x}=\frac{3}{4},\\ \frac{\lambda}{y}=\frac{1}{4},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{4(1-\lambda)}{3},\\ y=4\lambda,\end{cases}$ 所以 $3x=4-4\lambda=4-y$，即 $3x+y=4(x>0,y>0)$，所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(3x+y)=\frac{1}{4}\times\left(6+1+\frac{2y}{x}+\frac{3x}{y}\right)\geqslant\frac{7+2\sqrt{6}}{4}=\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2}$，当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{3x}{y}$，即 $2y^2=3x^2$ 时等号成立，所以 $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2}$. 故选 D.

知识拓展　平面向量“爪子”定理

在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC（或其延长线）上，且 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC}$（即 $BD:DC=|\lambda|:1$），则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$.



6. C 【解析】本题考查余弦型函数的性质.

由题意可得 $g(x)=4\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$（提示：左右平移需要将 x 前面的系数提出，在自变量 x 上加减），因为 $g(-x)\neq-g(x)$，所以 $g(x)$ 不是奇函数，故 **A 错误**.

$g\left(\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\neq\pm4$，所以 $g(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，故 **B 错误**.

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，则 $4\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-2,4]$，故 **C 正确**.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，而 $y=\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上不单调，所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不单调，故 **D 错误**. 故选 C.

7. **A** 【解析】本题考查构造函数比较大小.

设 $g(x)=\sin x-x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $g'(x)=\cos x-1<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，又 $g(0)=0$，则 $g(x)<0$，

即 $\sin x<x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $b=\sin\frac{1}{2\,024}<\frac{1}{2\,024}<\frac{1}{2\,023}=c$.

关键点

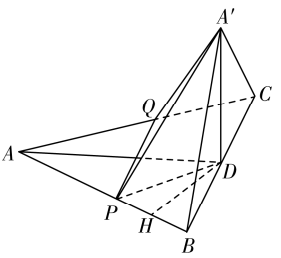
设 $f(x)=\tan x-x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又 $f(0)=0$，所以 $f(x)>0$，

即 $\tan x>x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\frac{1}{2\,024}>\frac{1}{2\,024}$，即 $\frac{\sin\frac{1}{2\,024}}{\cos\frac{1}{2\,024}}>\frac{1}{2\,024}$，即 $\sin\frac{1}{2\,024}>\frac{1}{2\,024}\cos\frac{1}{2\,024}$，则 $b=\sin\frac{1}{2\,024}>\frac{1}{2\,024}\cos\frac{1}{2\,024}>\frac{1}{2\,024}\cos\frac{1}{2\,025}\cos\frac{1}{2\,024}=a$. 综上，$c>b>a$. 故选 A.

关键点

8. **D** 【解析】本题考查四棱锥的外接球问题.

若四棱锥 $A'-PBCQ$ 的所有顶点都在同一球面上，则 P,B,C,Q 四点共圆，故 $\angle BPQ+\angle C=180°$，$\angle CQP+\angle B=180°$，又 $\angle B=\angle C$，故 $\angle BPQ+\angle B=180°$，所以 $PQ/\!/BC$.



因为 $A'D\perp$ 平面 $PBCQ$，又球心恰好在直线 $A'D$ 上，所以 D 为四边形 $PBCQ$ 的外接圆圆心，连接 PD，故 $DB=DC=DP$.

关键点

连接 AD，易知 $\angle BAD=15°$，所以 $DB=DP=AB\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

（提示：利用差角的正弦公式求解），取 PB 的中点 H，连接 DH，又因为 $DB=DP$，所以 $DH\perp PB$，则 $\angle BDH=15°$，则 $BP=2BH=2BD\sin 15°=2-\sqrt{3}$，故 $A'P=AP=\sqrt{3}$.

因为 $A'D\perp$ 平面 $PBCQ$，$PD\subset$ 平面 $PBCQ$，所以 $PD\perp A'D$，故 $\angle A'DP=90°$，设 $\angle PA'D=\theta$，则 $\sin\theta=\frac{DP}{A'P}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$.

设球心为 O，连接 OP（图略），设球的半径为 R，则 $OA'=OP=R$，故 $2R\cos\theta=A'P=\sqrt{3}$，故 $R^2=\frac{3}{4\cos^2\theta}=\frac{3}{4(1-\sin^2\theta)}$.

所以球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{3\pi}{1-\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{9(\sqrt{3}-1)\pi}{2}$，故

选 D.

9. **BC** 【解析】本题考查复数的概念及其几何意义.

对于 A,当 $a=0$ 时,$z=(1+\mathrm{i})(-2\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=2+2\mathrm{i}$,故 **A 错误**;

对于 B,$z=(1+\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=(a+2)+(a-2)\mathrm{i}$,当 z 为纯虚数时,$\begin{cases}a+2=0,\\a-2\neq0,\end{cases}$ 即 $a=-2$,故 **B 正确**;

对于 C,$z=(a+2)+(a-2)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(a+2,a-2)$,代入 $x-y-4=0$,得 $(a+2)-(a-2)-4=0$,则该点恒在直线 $x-y-4=0$ 上,故 **C 正确**;

对于 D,当 $a=3$ 时,$z=5+\mathrm{i}$,则 $(z-5)^7=\mathrm{i}^7=-\mathrm{i}$,故 **D 错误**. 故选 BC.

10. **BC** 【解析】本题考查正态曲线的性质、3σ 原则.

由题意有 $\mu=17,\sigma=3$,则 $P(|X-17|>6)=1-P(17-2\times3\leqslant X\leqslant17+2\times3)\approx0.0455<0.05$,故 **A 错误**;

$P(X>20)=\frac{1}{2}[1-P(14\leqslant X\leqslant20)]\approx\frac{1}{2}\times(1-0.6827)=0.15865>0.15$,故 **B 正确**;

$P(11\leqslant X\leqslant20)=\frac{1}{2}[P(11\leqslant X\leqslant23)+P(14\leqslant X\leqslant20)]\approx\frac{1}{2}\times(0.9545+0.6827)=0.8186>0.8$,故 **C 正确**;

$P(|X-17|\leqslant9)>P(|X-17|\leqslant6)=P(17-2\times3\leqslant X\leqslant17+2\times3)\approx0.9545>0.95$,故 **D 错误**. 故选 BC.

11. **AB** 【解析】本题考查利用导数研究函数的单调性、极值、最值、零点.

由题知 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+1,x\in\mathbf{R}$,则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$,

若 $a\leqslant0$,则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a>0$,可知 $f(x)$ 在定义域 **R** 上单调递增,$f(x)$ 无极值.

若 $a>0$,令 $f'(x)>0$,解得 $x>\ln a$;令 $f'(x)<0$,解得 $x<\ln a$.

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,则 $f(x)$ 有极小值,无极大值,且 $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln a)=a-a\ln a+1$.

对于 A,若 $f(x)$ 在 $x=\ln2$ 处取得极值,则 $a>0$ 且 $\ln a=\ln2$,所以 $a=2$,故 **A 正确**.

对于 B,当 $a=1$ 时,函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln1)=1-\ln1+1=2$,故 **B 正确**.

对于 C,当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,可得 $f(x)\geqslant f(\ln a)=a-a\ln a+1=a\left(1-\ln a+\frac{1}{a}\right)$,因为 $g(a)=1-\ln a+\frac{1}{a}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $g(a)>g(1)=2>0$,可得 $f(x)\geqslant a\left(1-\ln a+\frac{1}{a}\right)>0$,函数 $f(x)$ 无零点,故 **C 错误**.

对于 D,若对任意 $x\in[1,+\infty)$,有 $f(x)\geqslant0$ 恒成立,则 $f(1)=\mathrm{e}-a+1\geqslant0$,解得 $a\leqslant\mathrm{e}+1$,可知 a 的取值范围不可能是 $[\mathrm{e}+1,+\infty)$,故 **D 错误**. 故选 AB.

12. $\frac{2}{15}$ 【解析】本题考查古典概型.

依题意,6 个人随意就座的基本事件总数为 A_6^6. 设事件 $M=$“同一单位的 2 名代表既不能正对面就座也不能左右相邻就座”,1,2,3 号座位分别是三个不同单位的代表,有 $A_3^3\cdot2^3$ 种就座方法,4,5,6 号座位只有 2 种就座方法.

因此事件 M 含有的基本事件总数为 $2A_3^3\cdot2^3$,所以所求概率 $P(M)=\frac{2A_3^3\cdot2^3}{A_6^6}=\frac{2}{15}$.

13. 8 【解析】本题考查等比数列的前 n 项积问题.

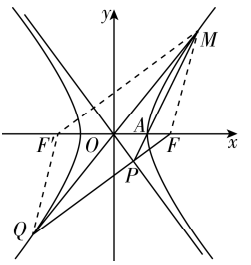
因为$\{a_n\}$为等比数列，且$a_1=4$，$q=\frac{1}{2}$，所以$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，当$a_n\geqslant 1$时，$3-n\geqslant 0$，即$n\leqslant 3$. 易知$\{a_n\}$为递减数列，所以$a_1>a_2>a_3=1>a_4>a_5>\cdots$，所以$T_2=T_3$为$T_n$的最大值，$T_2=4\times 2=8$.

14. $\frac{5}{3}$ 【解析】本题考查双曲线的离心率、直线与双曲线的位置关系.

分析：先根据题干作出草图，发现图中连线后能够得到一个平行四边形，然后根据对称性，结合已知向量关系，得到含a，c的齐次式，进而求得离心率. $\because\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{PF}$，$\therefore|QF|=4|PF|$. 设双曲线的左焦点为$F'(-c,0)$，直线$AP$与$OQ$的

关键点

交点为M，$\because M$在双曲线E上，$\therefore M$与Q关于原点对称，连接MF'，MF，QF'，易知O是线段FF'的中点，故四边形$MF'QF$是平行四边形，则$MF'/\!/QF$，且$|MF'|=|QF|=4|PF|$，故$\triangle F'MA\backsim\triangle FPA$，$\therefore\frac{|MF'|}{|PF|}=\frac{|AF'|}{|AF|}=\frac{a+c}{c-a}=4$，得$a=\frac{3}{5}c$，故$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.



关键点

提分小卷 ▸ 5

1. C 【解析】本题考查集合的交集运算.

解不等式$x^2-2x-3\leqslant 0$，即$(x+1)(x-3)\leqslant 0$，得$-1\leqslant x\leqslant 3$，则$A=\{0,1,2,3\}$.

解不等式$\log_2 x\leqslant 1$，得$0<x\leqslant 2$，则$B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，所以$A\cap B=\{1,2\}$. 故选 C.

快解 (排除法)由对数函数的定义域可知$x>0$，故 A，B 不成立，又$\log_2 3>\log_2 2=1$，故 D 不成立，故选 C.

2. D 【解析】本题考查复数相等问题.

由$x+y\mathrm{i}=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$，可得$x=2$，$y=-2\sqrt{3}$，所以$x^2+y^2=2^2+(-2\sqrt{3})^2=16$.

3. C 【解析】本题考查分步乘法计数原理、排列问题.

分析：由题知孩子必须相邻，则用捆绑法，又因为排头和排尾必须是家长，就将捆绑之后的 2 个孩子插入除首、末位以外的其中 1 个空位中.

先将 2 个孩子捆绑在一起，因为他们之间有顺序，所以有A_2^2种站法，因为排头和排尾必须是家长，所以先将家长全排列，共有A_4^4种站法，除掉首、末的空位，总共有 3 个空位，在这 3 个空位中选 1 个给捆绑在一起的 2 个孩子，共C_3^1种选法，所以总共有$A_2^2A_4^4C_3^1=144$(种)站法. 故选 C.

4. D 【解析】本题考查两角差的正切公式、二倍角的正弦公式.

由题意有$\tan 2\beta=\tan[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{3-1}{1+3\times 1}=\frac{1}{2}$，

所以$\sin 4\beta=2\sin 2\beta\cos 2\beta=\frac{2\sin 2\beta\cos 2\beta}{\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta}=\frac{2\tan 2\beta}{1+\tan^2 2\beta}$(提示：齐次式化简，分子分母同时除以$\cos^2 2\beta$)$=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}$，故

选 D.

5. **A** 【解析】本题考查与向量有关的新定义问题.

$s_1=(1,2,3)\cdot(2,1,1)=7$，$s_2=(1,2,3)\cdot(3,2,1)=10$，$s_3=(1,2,3)\cdot(1,3,2)=13$，$\sum_{i=1}^{3}s_i=7+10+13=30$，因为权重 $\omega_i=\frac{s_i}{\sum_{i=1}^{n}s_i}$，所以 $\omega_1=\frac{7}{30}$，$\omega_2=\frac{1}{3}$，$\omega_3=\frac{13}{30}$，可得权重向量 $\boldsymbol{a}=\left(\frac{7}{30},\frac{1}{3},\frac{13}{30}\right)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}_1=\frac{7}{30}\times4+\frac{1}{3}\times3+\frac{13}{30}\times2=2.8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}_2=\frac{7}{30}\times6+\frac{1}{3}\times4+\frac{13}{30}\times2=3.6$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}_3=\frac{7}{30}\times3+\frac{1}{3}\times5+\frac{13}{30}\times4=4.1$，故注意力输出向量为 $(2.8,3.6,4.1)$. 故选 A.

6. **C** 【解析】本题考查双曲线的几何性质、余弦定理.

由题可知离心率 $e=\frac{c}{a}=2$，则 $c=2a$，$b=\sqrt{3}a$，则渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

$\because F_1(-2a,0)$，$A(a,0)$，$\therefore M\left(-\frac{a}{2},0\right)$，圆 M 的半径 $r=\frac{|AF_1|}{2}=\frac{3a}{2}$，由对称性不妨取渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，圆心 $M\left(-\frac{a}{2},0\right)$ 到渐近线 $y=\sqrt{3}x$ 的距离 $d=\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)-0\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{4}$，则 $|CD|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}a}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}a}{2}$.

在 $\triangle CMD$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle CMD=\frac{MC^2+MD^2-CD^2}{2\cdot MC\cdot MD}=\frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}a}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3a}{2}}=-\frac{5}{6}$. 故选 C.

7. **A** 【解析】本题考查分段函数中的求参问题、数形结合思想.

分析：逐段求分段函数的解析式，进而解不等式求 m 的取值范围.

当 $x\in[-8,-4)$ 时，$f(x)\geqslant\frac{m-1}{4}-\frac{1}{m}$ 恒成立，则 $f(x)_{\min}\geqslant\frac{m-1}{4}-\frac{1}{m}$. 当 $x\in[-8,-6)$ 时，$x+8\in[0,2)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}f(x+4)=\frac{1}{4}f(x+8)=\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{2}(x+8)^2-(x+8)\right]=\frac{1}{8}(x+8)^2-\frac{1}{4}(x+8)=\frac{1}{8}\left[(x+8)^2-2(x+8)+1\right]-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(x+7)^2-\frac{1}{8}$，

所以此时 $f(x)\geqslant f(-7)=-\frac{1}{8}$，

当 $x\in[-6,-4)$ 时，$x+8\in[2,4)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}f(x+4)=\frac{1}{4}f(x+8)=\frac{1}{4}\times\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+8-3|}\right]=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+5|}$，

因为 $-1\leqslant x+5<1$，所以 $0\leqslant|x+5|\leqslant1$，即 $\frac{1}{3}\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+5|}\leqslant1$，

此时 $f(x)\geqslant f(-5)=-\frac{1}{4}$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[-8,-4)$ 上的最小值 $f(x)_{\min}=f(-5)=-\frac{1}{4}$. 所以 $\frac{m-1}{4}-\frac{1}{m}\leqslant f(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$，即 $\frac{m^2-4}{4m}\leqslant0$，解得 $m\leqslant-2$ 或 $0<m\leqslant2$.

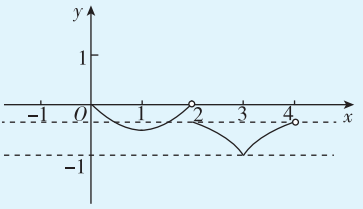
因此实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup(0,2]$.

1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

由 $f(x)=\frac{1}{2}f(x+4)$，可知 $y=f(x)$ 的图象每向左平移 4 个单位长度，其纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，在平面直角坐标系中画出 $y=f(x)$ 在 $[0,4)$ 上的大致图象，如图所示，观察可知此时 $f(x)_{\min}=f(3)=-1$.

$y=f(x)$ 在 $[-8,-4)$ 上的图象相当于 $y=f(x)$ 在 $[0,4)$ 上的图象向左平移 8 个单位长度，且纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$，此时函数 $f(x)$ 在 $[-8,-4)$ 上的最小值 $f(x)_{\min}=f(-5)=-\frac{1}{4}$，所以 $\frac{m-1}{4}-\frac{1}{m}\leqslant f(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$，即 $\frac{m^2-4}{4m}\leqslant 0$，解得 $m\leqslant -2$ 或 $0<m\leqslant 2$.

因此实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup(0,2]$，故选 A.



8. C　【解析】本题考查求抽象函数的解析式、裂项相消法求和.

$\forall x,y\in\mathbf{Z}$，$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy+1$，令 $x=0,y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)+1$，得 $f(0)=-1$. 令 $x=-1,y=-1$，则 $f(-2)=f(-1)+f(-1)+3$，得 $f(-1)=-1$. 令 $x=1,y=-1$，则 $f(0)=f(1)+f(-1)-2+1$，得 $f(1)=1$.

令 $x=n,y=1$，则 $f(n+1)=f(n)+f(1)+2n+1=f(n)+2n+2$，得 $f(n+1)-f(n)=2(n+1)$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$f(n)-f(n-1)=2n$，$f(n-1)-f(n-2)=2(n-1)$，$\cdots$，$f(2)-f(1)=2\times 2$，

则 $f(n)=[f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)]+\cdots+[f(2)-f(1)]+f(1)=2[n+(n-1)+\cdots+2]+1=2\times\frac{(n+2)(n-1)}{2}+1=n^2+n-1$，又 $f(1)=1$ 满足上式，所以 $f(n)=n^2+n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_n=\frac{1}{f(n)+1}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}+a_{2\,025}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,024}-\frac{1}{2\,025}\right)+\left(\frac{1}{2\,025}-\frac{1}{2\,026}\right)=1-\frac{1}{2\,026}=\frac{2\,025}{2\,026}$. 故选 C.

9. BC　【解析】本题考查分层随机抽样，样本平均数、方差的计算.

对于 A，数学证明的样本容量为 $160\times\frac{3\,000}{5\,000+3\,000}=60$，

所以每个数学证明任务被抽中的概率为 $\frac{60}{3\,000}=\frac{1}{50}$，故 **A 错误**.

对于 B，代码生成任务的样本容量为 $160\times\frac{5\,000}{5\,000+3\,000}=100$，故 **B 正确**.

对于 C，因为样本容量是 160，且 100 个代码生成样本的均值为 212 ms，60 个数学证明样本的均值为 180 ms，所以总样本的均值是 $\frac{212\times 100+180\times 60}{160}=200(\text{ms})$，故 **C 正确**.

对于 D，因为代码生成样本的均值为 212 ms，方差为 80 ms^2；数学证明样本的均值为 180 ms，方差为 50 ms^2；总样本的均值是 200 ms，所以总样本的方差为 $s^2=\frac{100}{160}\times[80+(212-200)^2]+\frac{60}{160}\times[50+(180-200)^2]=308.75(ms^2)$，故 **D 错误**.

故选 BC.

10. **ABD** 【解析】本题考查导数的几何意义，利用导数研究函数的零点、极值点.

对于 A，分析：求导，由 $f(x)$ 有 2 个极值点，知 $f'(x)$ 有 2 个变号零点，又 $f'(x)$ 是二次函数，故结合判别式求解即可.

由题意得 $f'(x)=x^2+4x+a$，要使 $f(x)$ 有 2 个极值点，则 $f'(x)$ 有 2 个变号零点，∴ $\Delta=16-4a>0$，即 $a<4$，∴ 当 $0<a<4$ 时，$f(x)$ 必有 2 个极值点，故 **A 正确**.

对于 B，分析：根据导数的几何意义将切线条数问题转化为 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ 与 $y=a(a>0)$ 图象的交点个数问题，进而求解即可.

设切点为 $C\left(x_0,\frac{1}{3}x_0^3+2x_0^2+ax_0+b\right)$，则切线的斜率 $k=f'(x_0)=x_0^2+4x_0+a$，∴ 曲线 $y=f(x)$ 在点 C 处的切线方程为 $y-\left(\frac{1}{3}x_0^3+2x_0^2+ax_0+b\right)=(x_0^2+4x_0+a)(x-x_0)$，又∵ 切线过点 $(2,b)$，∴ $b-\left(\frac{1}{3}x_0^3+2x_0^2+ax_0+b\right)=(x_0^2+4x_0+a)(2-x_0)$，整理得 $\frac{2}{3}x_0^3-8x_0=2a$，即 $a=\frac{1}{3}x_0^3-4x_0$，令 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$，∴ 过点 $(2,b)$ 可以作曲线 $y=f(x)$ 的切线条数可转化为 $y=g(x)$ 与 $y=a(a>0)$ 图象的交点个数，**关键点**

而 $g'(x)=x^2-4$，令 $g'(x)>0$，得 $x<-2$ 或 $x>2$，令 $g'(x)<0$，得 $-2<x<2$，∴ 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,2)$ 上单调递减，又 $g(-2)=\frac{16}{3}$，$g(2)=-\frac{16}{3}$，要使 $y=g(x)$ 与 $y=a$ 的图象有 3 个交点，则 $0<a<\frac{16}{3}$，故 **B 正确**.

对于 C，分析：由题意可得 $\frac{1}{3}x^3+2x^2+ax+b=\frac{1}{3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，利用待定系数法求解.

由题意可得 $\frac{1}{3}x^3+2x^2+ax+b=\frac{1}{3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=\frac{1}{3}[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3]$，

则 $x_1+x_2+x_3=-6$，$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3a$，$x_1x_2x_3=-3b$，又 $x_1+x_3=2x_2$，则 $x_2=-2$，∴ $3a=x_2(x_1+x_3)+x_1x_3=8+\frac{3}{2}b$，即 $2a-b=\frac{16}{3}$（另解：$f(-2)=\frac{1}{3}\times(-2)^3+2\times(-2)^2+a\times(-2)+b=0$，整理得 $2a-b=\frac{16}{3}$），故 **C 错误**.

对于 D，分析：由题意可得 $\frac{1}{3}x^3+2x^2+ax+b=\frac{1}{3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，根据导数的运算法则求出 $f'(x_1)$，$f'(x_2)$，$f'(x_3)$，代入 $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\frac{1}{f'(x_3)}$ 求解即可判断.

由题意可得 $f(x)=\frac{1}{3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，则 $f'(x)=\frac{1}{3}\{(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)\cdot[(x-x_2)(x-x_3)]'\}$，

$\therefore f'(x_1)=\frac{1}{3}(x_1-x_2)(x_1-x_3)$，同理$f'(x_2)=\frac{1}{3}(x_2-x_1)(x_2-x_3)$，$f'(x_3)=\frac{1}{3}(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)$，$\therefore \frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\frac{1}{f'(x_3)}=3\left[\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right]=3\times\frac{(x_2-x_3)+(x_3-x_1)+(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}=0$，故 **D 正确**. 故选 ABD.



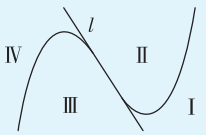
1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

学霸提示：一般地，过三次函数$f(x)$图象的对称中心作切线l，则坐标平面被切线l和函数$f(x)$的图象分割为四个区域，有以下结论：

(1)过区域Ⅰ，Ⅳ内的点作$f(x)$图象的切线，有且仅有3条；

(2)过区域Ⅱ，Ⅲ内的点以及$f(x)$图象的对称中心作$f(x)$图象的切线，有且仅有1条；

(3)过切线l或$f(x)$图象(除去对称中心)上的点作$f(x)$图象的切线，有且仅有2条.



在本题中，$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+ax+b$，其图象的对称中心为$\left(-\frac{2}{3\times\frac{1}{3}},f\left(-\frac{2}{3\times\frac{1}{3}}\right)\right)$，即为$\left(-2,b-2a+\frac{16}{3}\right)$，$f'(-2)=a-4$，则$y=f(x)$的图象在对称中心处的切线方程为$y=g(x)=(a-4)(x+2)+b-2a+\frac{16}{3}$.

对于B，要使得过点$(2,b)$可以作曲线$y=f(x)$的3条不同切线，即需满足该点在对称中心右侧的Ⅰ区域，即满足$g(2)<b<f(2)$，即$4(a-4)+b-2a+\frac{16}{3}<b<2a+b+\frac{32}{3}$，解得$-\frac{16}{3}<a<\frac{16}{3}$，又由$a>0$知，$0<a<\frac{16}{3}$，故 **B 正确**.

11. **ABD**　【解析】本题考查利用正、余弦定理解三角形，基本不等式.

对于A，由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，所以$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2=a^2$，故 **A 正确**；

对于B，由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2}{2bc}$，由基本不等式有$2a^2=b^2+c^2\geqslant 2bc$，当且仅当$b=c=a$，即$A=\frac{\pi}{3}$时等号成立，所以$\cos A=\frac{a^2}{2bc}\geqslant\frac{a^2}{2a^2}=\frac{1}{2}$，所以角$A$的最大值为$\frac{\pi}{3}$，故 **B 正确**；

对于C，由$\tan A=\frac{\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}$得$\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}$，

则$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}$，

所以$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos B\sin C+\cos C\sin B}{\sin B\sin C}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$，

所以$\sin^2 A=\sin B\sin C\cos A$，由正弦定理得$a^2=bc\cos A=bc\cdot$

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$，即 $2a^2=b^2+c^2-a^2$，则 $3a^2=b^2+c^2$，与题干不符，故 **C 错误**；

对于 D，令 $b=xc(x>0)$，代入 $b^2+c^2=2a^2$ 有 $a=\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}c$，由 $|b-c|<a<b+c$ 有 $b^2-2bc+c^2<a^2<b^2+2bc+c^2$，得 $x^2+1-2x<\frac{x^2+1}{2}<x^2+1+2x$，解得 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$，

所以 $\frac{ab}{c^2}=x\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^4+x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$，因为 $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$，所以 $3\sqrt{3}-5<\frac{ab}{c^2}<3\sqrt{3}+5$，即 $\frac{ab}{c^2}$ 的取值范围是 $(3\sqrt{3}-5,3\sqrt{3}+5)$，故 **D 正确**. 故选 ABD.



1 min 速解　西安交通大学——尹玲惠

对于 C，由 A 分析知 $2bc\cos A=a^2$，由正弦定理得，$2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 A$，则 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sin B\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin B\sin C}{\sin(B+C)}=\frac{2\sin B\sin C}{\sin B\cos C+\sin C\cos B}=\frac{2\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}$，故 **C 错误**.

对于 D，由题知，$\frac{ab}{c^2}=\frac{ab}{2a^2-b^2}=\frac{\frac{a}{b}}{2\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$，令 $t=\frac{a}{b}\left(t\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

由三角形三边关系得 $|a-b|<c<a+b$，同时平方得 $(a-b)^2<c^2<(a+b)^2$，即 $a^2+b^2-2ab<2a^2-b^2<a^2+b^2+2ab$，得 $t^2-2t+1<2t^2-1<t^2+2t+1$，解得 $\sqrt{3}-1<t<\sqrt{3}+1$.

令 $f(t)=\frac{t}{2t^2-1}=\frac{1}{2t-\frac{1}{t}}$，易知函数 $y=2t$，$y=-\frac{1}{t}$ 在 $(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$ 上都单调递增，所以 $f(t)$ 在 $(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$ 上单调递减，则 $f(t)>f(\sqrt{3}+1)=3\sqrt{3}-5$，$f(t)<f(\sqrt{3}-1)=3\sqrt{3}+5$，即 $\frac{ab}{c^2}\in(3\sqrt{3}-5,3\sqrt{3}+5)$，故 **D 正确**.

12. $\frac{2}{3}$　【解析】本题考查求椭圆的离心率.

设椭圆的焦距为 $2c$，则 $c=2$，又点 P 在该椭圆上，且 $|PF_1|+|PF_2|=6$，设椭圆的长轴长为 $2a$，则 $2a=6$，$a=3$，故椭圆的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.

13. 2　【解析】本题考查利用基本不等式求最值.

因为 $a>2$，$b>0$，$a^2-6a+2b=0$，所以 $b=\frac{(6-a)a}{2}>0$，解得 $2<a<6$，

可得 $\frac{2}{a-2}+\frac{a}{b}=\frac{2}{a-2}+\frac{a}{\frac{(6-a)a}{2}}=\frac{2}{a-2}+\frac{2}{6-a}=2\left(\frac{1}{a-2}+\frac{1}{6-a}\right)$（提示：双变量转化为单变量），

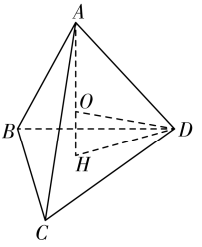
因为 $2<a<6$，所以 $a-2>0$，$6-a>0$，

则 $2\left(\frac{1}{a-2}+\frac{1}{6-a}\right)=\frac{1}{2}[(a-2)+(6-a)]\left(\frac{1}{a-2}+\frac{1}{6-a}\right)$（提示：构造乘积为定值的形式）

$=\frac{1}{2}\left(\frac{6-a}{a-2}+\frac{a-2}{6-a}+2\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{6-a}{a-2}\cdot\frac{a-2}{6-a}}+2\right)=2$，当且仅当 $\frac{6-a}{a-2}=\frac{a-2}{6-a}$，即 $a=4$ 时，等号成立，所以 $\frac{2}{a-2}+\frac{a}{b}$ 的最小值为 2.

14. $\sqrt{6}$ 【解析】本题考查正四面体的外接球、圆柱的内切球.

分析：由题意知，可转化为正四面体外接球可以在一个圆柱内任意转动，求出正四面体外接球的半径，进而求解.



设该正四面体为 $A-BCD$，如图，设点 H 为 $\triangle BCD$ 的中心，连接 AH，HD，根据正四面体的性质可知 $AH\perp$ 平面 BCD，所以正四面体外接球的球心位于 AH 上，设球心为 O，半径为 R，连接 OD，则 $OA=OD=R$.

在 $\triangle BCD$ 中，$HD=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AHD$ 中，$AH=\sqrt{AD^2-HD^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$，则 $OH=AH-OA=\sqrt{\frac{8}{3}}-R$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OHD$ 中，由 $OH^2+HD^2=OD^2$ 得 $\left(\sqrt{\frac{8}{3}}-R\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

各棱长均为 2 的正四面体可以在一个圆柱内任意转动，即

关键点

各棱长均为 2 的正四面体的外接球可以在一个圆柱内任意转动，当圆柱的高最小时，该正四面体的外接球为圆柱的内切球，故该圆柱的高的最小值为 $2R=\sqrt{6}$.

提分小卷 ▸ 6

1. D 【解析】本题考查求复数的模、复数的除法运算.

$z=\frac{2-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-2\mathrm{i}$，所以 $|z|=2$，故选 D.

2. A 【解析】本题考查等差数列的基本量运算.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，依题意，$d=\frac{a_7-a_1}{6}=4$，则 $a_3=a_1+2d=4+8=12$. 故选 A.

3. D 【解析】本题考查残差图的分析.

残差分布的带状区域越窄，拟合效果越好，观察题图可知，D 选项的带状区域最窄，故选 D.

4. B 【解析】本题考查利用余弦定理解三角形.

设 $a=4k$，$k>0$，则 $b=5k$，$c=6k$，

由余弦定理知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25k^2+36k^2-16k^2}{2\times5k\times6k}=\frac{3}{4}$，

又 $a:c=2:3$，则 $\frac{2a\cos A}{c}=2\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=1$. 故选 B.

5. B 【解析】本题考查几何体的体积.

分析：由已知求得正方体的体积，再减去八个正三棱锥的体积即可. 由题意可知，截去的八个四面体是全等的正三棱锥，体积是 $8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times30\times30\times30=36\ 000(\mathrm{cm}^3)$，正方体的体积为 $60\times60\times60=216\ 000(\mathrm{cm}^3)$，则石凳的体积是 $216\ 000-36\ 000=180\ 000(\mathrm{cm}^3)$. 故选 B.

6. C 【解析】本题考查向量的线性运算，向量的数量积.

设与 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ 方向相同的单位向量分别为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=5\boldsymbol{a}\cdot4\boldsymbol{b}=-10$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$，由于 $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PQ}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，故 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2=2-\left(-\frac{1}{2}\right)-6=-\frac{7}{2}$. 故选 C.

7. A 【解析】本题考查辅助角公式，绝对值不等式.

对于 A，设 $Q(x,2\sqrt{5}-2x)$，则 $d(O,Q)=|x|+2|\sqrt{5}-x|\geqslant|x|+$

$|\sqrt{5}-x|\geqslant|x+\sqrt{5}-x|=\sqrt{5}$，当且仅当 $x=\sqrt{5}$ 时，两个等号同时成立，故 **A 错误**；

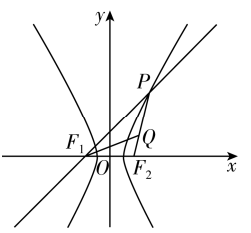
对于 B，设 $P(m,n)$，则 $m^2+n^2=1$，则 $d(O,P)=|m|+|n|\leqslant\sqrt{2(m^2+n^2)}=\sqrt{2}$，当且仅当 $|m|=|n|$ 时，等号成立，故 **B 正确**；

对于 C，分析：将圆上动点用参数表示，用单一参数表示坐标，便于后续不等式消元，转化为三角函数求最值. 设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，由 A 得 $Q(x,2\sqrt{5}-2x)$，则 $d(P,Q)=|\cos\theta-x|+|\sin\theta-2\sqrt{5}+2x|=|\cos\theta-x|+2\left|\frac{\sin\theta}{2}-\sqrt{5}+x\right|\geqslant|\cos\theta-x|+\left|\frac{\sin\theta}{2}-\sqrt{5}+x\right|\geqslant\left|\cos\theta-x+\frac{\sin\theta}{2}-\sqrt{5}+x\right|=\sqrt{5}-\left(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{2}\right)=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\theta+\varphi)\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，其中 $\tan\varphi=2$，当且仅当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 且 $\sin\theta=2\sqrt{5}-2x$ 时，3 个不等号中的等号同时成立，$d(P,Q)_{\min}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故 **C 正确**；

对于 D，分析：抛物线上动点用参数代换，用单一参数表示坐标，便于借助绝对值不等式消去直线动点的变量，化简为求一元二次函数的最值问题. 设 $R\left(-\frac{t^2}{4},t\right)$，由 A 得 $Q(x,2\sqrt{5}-2x)$，则 $d(R,Q)=\left|-\frac{t^2}{4}-x\right|+|t-2\sqrt{5}+2x|=\left|-\frac{t^2}{4}-x\right|+2\left|\frac{t}{2}-\sqrt{5}+x\right|\geqslant\left|-\frac{t^2}{4}-x\right|+\left|\frac{t}{2}-\sqrt{5}+x\right|\geqslant\left|-\frac{t^2}{4}-x+\frac{t}{2}-\sqrt{5}+x\right|=\left|-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}-\sqrt{5}\right|=\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}+\sqrt{5}=\frac{1}{4}(t-1)^2+\sqrt{5}-\frac{1}{4}\geqslant\sqrt{5}-\frac{1}{4}$，当且仅当 $t=1$ 且 $x=\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ 时，3 个不等号中的等号同时成立，故 **D 正确**. 故选 A.

8. **D** 【解析】本题考查双曲线的几何性质、双曲线中焦点三角形问题.

设双曲线 C 的半焦距为 c，因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，故 $b=\sqrt{3}a$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$.



设 $|PF_2|=t$，则 $|PF_1|=t+2a=t+c$，$|F_1F_2|=2c$，由余弦定理得 $t^2=(2c)^2+(t+c)^2-2\cdot(2c)\cdot(t+c)\cdot\cos\frac{\pi}{4}$，化简得 $t=\frac{3\sqrt{2}+1}{2}c$，则 $|PF_1|=\frac{3\sqrt{2}+3}{2}c$.

因为 F_1Q 为 $\angle PF_1F_2$ 的平分线，所以 $\frac{S_{\triangle PF_1Q}}{S_{\triangle F_2F_1Q}}=\frac{\frac{1}{2}|PF_1||F_1Q|\sin\angle PF_1Q}{\frac{1}{2}|F_1F_2||F_1Q|\sin\angle F_2F_1Q}=\frac{|PF_1|}{|F_1F_2|}$（提示：角平分线问题通常转化成面积问题），

又 $\frac{S_{\triangle PF_1Q}}{S_{\triangle F_2F_1Q}}=\frac{|PQ|}{|QF_2|}$，所以 $\frac{|PQ|}{|QF_2|}=\frac{|PF_1|}{|F_1F_2|}$（提示：可以直接用角平分线定理直接得出结论），

所以 $\lambda=\frac{|PQ|}{|QF_2|}=\frac{|PF_1|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{3\sqrt{2}+3}{2}c}{2c}=\frac{3\sqrt{2}+3}{4}$. 故选 D.

9. **BC** 【解析】本题考查正弦型函数的性质.

由题得，$g(x)=\sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(8x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(8x+\frac{\pi}{12}\right)$，则 $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{12}\right)$.

对于 A，$f\left(x-\frac{\pi}{48}\right)=2\sin 4x$ 不是偶函数，故 **A 错误**；

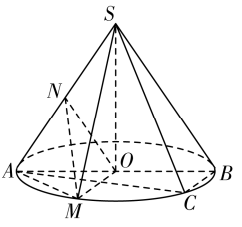
对于 B，$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故 **B 正确**；

对于 C，$f\left(-\frac{\pi}{48}\right)=2\sin\left[4\times\left(-\frac{\pi}{48}\right)+\frac{\pi}{12}\right]=2\sin 0=0$，故 **C 正确**；

对于 D，由 $x\in\left[-\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{16}\right]$，得 $4x+\frac{\pi}{12}\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$，则 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\leqslant\sin\left(4x+\frac{\pi}{12}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $f(x)\leqslant\sqrt{3}$，即当 $x\in\left[-\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{16}\right]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，故 **D 错误**. 故选 BC.

10. **BC** 【解析】本题考查线线平行、线面平行、线线垂直、线面垂直的判断.

对于 A，若存在点 M 使得 $MN/\!/SC$，则 M,N,S,C 四点共面，因为 $A\in SN$，所以 $A\in$ 平面 $MNSC$，易得 A,M,C 为平面 $MNSC$ 与平面 ABC 的公共点，所以 A,M,C 三点共线，与题设矛盾，故 **A 错误**；



对于 B，如图所示，过点 O 作 $OM/\!/BC$，交劣弧 AC 于点 M，连接 ON，因为 N,O 分别为 SA,AB 的中点，所以 $ON/\!/SB$，又 $OM,ON\not\subset$ 平面 SBC，$BC,SB\subset$ 平面 SBC，所以 $OM/\!/$平面 SBC，$ON/\!/$平面 SBC，又因为 $OM\cap ON=O$，$OM,ON\subset$ 平面 OMN，所以平面 $OMN/\!/$平面 SBC，因为 $MN\subset$ 平面 OMN，所以 $MN/\!/$平面 SBC，故 **B 正确**；

对于 C，由 AB 为底面圆的直径，可知 $AC\perp CB$，又 $OM/\!/BC$，所以 $AC\perp OM$，又易知 $AC\perp SO$，$SO\cap OM=O$，$SO,OM\subset$ 平面 SMO，所以 $AC\perp$ 平面 SMO，又 $SM\subset$ 平面 SMO，所以 $SM\perp AC$，故 **C 正确**；

对于 D，假设存在点 M 使 $AM\perp$ 平面 SBC，而 $SB\subset$ 平面 SBC，则 $AM\perp SB$，又易知 $AM\perp SO$，$SO\cap SB=S$，$SO,SB\subset$ 平面 SBO，所以 $AM\perp$ 平面 SBO，所以平面 SBC 与平面 SBO 平行，与题意不符，故 **D 错误**. 故选 BC.

11. **AD** 【解析】本题考查导数的几何意义，利用导数研究函数的最值和零点问题.

对于 A，$f'(x)=e^x+(x-1)e^x-\frac{a}{x}=xe^x-\frac{a}{x}=\frac{x^2e^x-a}{x}(x>0)$.

当 $a=e$ 时，$f'(x)=\frac{x^2e^x-e}{x}$. 令 $h(x)=x^2e^x(x>0)$，则 $h'(x)=x(x+2)e^x>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $h(1)=e$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=0$，故 **A 正确**.

对于 B，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x-(e-1)y=0$ 垂直，则切线的斜率 $k=f'(1)=e-a=\frac{-1}{\frac{1}{e-1}}=1-e$，所以 $a=2e-1$，故 **B 错误**.

对于 C，易知 $f(1)=0$. 若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)=xe^x-\frac{a}{x}>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，至多有一个零点，不符合题意，故 $a>0$（提示：缩小 a 的范围），由 $h(x)=x^2e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增可知，方程 $h(x)=a$ 有唯一解 x_0，且 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $a=x_0^2e^{x_0}$，所以 $f(x_0)=e^{x_0}(x_0-1-x_0^2\ln x_0)$. 令 $\varphi(x)=\frac{x-1}{x^2}-\ln x(x>0$ 且 $x\neq 1)$，则 $\varphi'(x)=\frac{2-x}{x^3}-\frac{1}{x}=-\frac{(x+2)(x-1)}{x^3}$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,$

1)上单调递增,在(1,+∞)上单调递减,且 $\varphi(1)=0$. 因此当 $x\neq1$ 时,$\varphi(x)<0$,即 $x-1-x^2\ln x<0$,且当 $x\to0$ 时,$f(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,所以当 $x_0\neq1$,即 $a\neq e$ 时,$f(x_0)<0$,函数 $f(x)$ 有两个零点;当 $x_0=1$,即 $a=e$ 时,函数 $f(x)$ 只有一个零点,于是 $f(x)$ 有两个零点的充要条件是 $a>0$ 且 $a\neq e$,故 **C 错误**.

对于 D,由 $f'(x_1)=0$ 得 $a=x_1^2e^{x_1}$.

由 $f(x_2)=f'(x_2)$ 得 $(x_2-1)e^{x_2}-a\ln x_2=x_2e^{x_2}-\dfrac{a}{x_2}$,

整理得 $a\left(\dfrac{1}{x_2}-\ln x_2\right)=e^{x_2}$,因为 $a>0$,所以 $\dfrac{1}{x_2}-\ln x_2>0$,且 $a=\dfrac{e^{x_2}}{\dfrac{1}{x_2}-\ln x_2}$,因为 $h(x)=x^2e^x(x>0)$ 在(0,+∞)上单调递增,所以只需证明 $x_2^2e^{x_2}\leqslant\dfrac{e^{x_2}}{\dfrac{1}{x_2}-\ln x_2}$,

由于 $e^{x_2}>0$,上式等价于 $x_2^2\left(\dfrac{1}{x_2}-\ln x_2\right)\leqslant1$,即 $x_2^2\ln x_2-x_2+1\geqslant0$. 由常用不等式 $\ln x\geqslant1-\dfrac{1}{x}(x>0)$,可得 $x^2\ln x-x+1\geqslant x^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-x+1=(x-1)^2\geqslant0$,因此 $h(x_2)\leqslant a=h(x_1)$. 又 $h(x)$ 单调递增,所以 $x_2\leqslant x_1$,即 $x_1\geqslant x_2$. 故 **D 正确**. 故选 AD.

拓展结论　常用不等式 $\ln x\geqslant1-\dfrac{1}{x}(x>0)$,证明如下:设 $\varphi(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1,x>0$,则 $\varphi'(x)=\dfrac{x-1}{x^2},x>0$,当 $x\in(0,1)$ 时,$\varphi'(x)<0$,此时 $\varphi(x)$ 单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)>0$,此时 $\varphi(x)$ 单调递增,则 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$,故 $\ln x\geqslant1-\dfrac{1}{x}(x>0)$ 恒成立.

12. 7　【解析】本题考查真子集的个数问题.

对于集合 $A=\{x\mid x=2^n,n\in\mathbf{Z}\}$,当 $n=0$ 时,$x=1$,当 $n=1$ 时,$x=2$,当 $n=2$ 时,$x=4$,所以 $A\cap B=\{1,2,4\}$,故其真子集的个数为 $2^3-1=7$.

13. 4　【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系.

(点差法)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为 $P(2,1)$ 是线段 AB 的中点,所以 $y_1+y_2=2$,由 $\begin{cases}y_1^2=8x_1,\\y_2^2=8x_2,\end{cases}$ 两式作差得 $(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2)=8(x_1-x_2)$,所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{8}{y_1+y_2}=\dfrac{8}{2}=4$.

一题多解　易知直线 AB 的斜率存在且不为 0,设直线 AB 的方程为 $y-1=k(x-2)(k\neq0)$,代入抛物线方程 $y^2=8x$,得 $y^2=8\left(\dfrac{y-1}{k}+2\right)$,即 $y^2-\dfrac{8}{k}y+\dfrac{8}{k}-16=0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为 $P(2,1)$ 是线段 AB 的中点,所以 $y_1+y_2=\dfrac{8}{k}=2$,所以 $k=4$.

14. $\dfrac{1}{e}$　【解析】本题考查利用导数研究不等式恒成立问题.

$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立,即 $\dfrac{2a}{x}e^{2x-1}+\ln a\geqslant2\ln x+1(a>0,x>0)$ 恒成立,则 $\dfrac{2a}{x}e^{2x-1}\geqslant\ln\dfrac{ex^2}{a}$,即 $2xe^{2x}\geqslant\dfrac{ex^2}{a}\ln\dfrac{ex^2}{a}=e^{\ln\frac{ex^2}{a}}\ln\dfrac{ex^2}{a}$.

关键点

令 $\varphi(t)=te^t(t>0)$，则 $\varphi'(t)=(t+1)e^t>0$ 恒成立，所以 $\varphi(t)$ 单调递增，

所以 $\varphi(2x)\geqslant\varphi\left(\ln\frac{ex^2}{a}\right)$，即 $2x\geqslant\ln\frac{ex^2}{a}$，则 $2x\geqslant 2\ln x+1-\ln a$，所以 $\ln a\geqslant 2\ln x-2x+1$.

令 $h(x)=2\ln x-2x+1(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{2}{x}-2$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=-1$，故 $\ln a\geqslant -1$，即 $a\geqslant\frac{1}{e}$，则 a 的最小值是 $\frac{1}{e}$.

提分小卷 ▸ 7

1. **A** 【解析】本题考查集合中的含参问题.
由 $x^2-4x+3<0$，解得 $1<x<3$，所以 $B=\{x\mid 1<x<3\}$，因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，所以 $a\leqslant 1$，所以 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.
故选 A.

2. **B** 【解析】本题考查平面向量基本定理、平面向量的数量积.
因为 $AD/\!/BE$，所以 $\angle DAF=\angle BEF$，$\angle ADF=\angle EBF$，所以 $\triangle FEB\backsim\triangle FAD$，所以 $\frac{AF}{EF}=\frac{AD}{EB}=2$，所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，故 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\times 1^2+\frac{1}{3}\times 1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$. 故选 B.

3. **C** 【解析】本题考查函数的奇偶性、对称性.
易知 $f(x)$，$g(x)$ 均为偶函数，图象都关于 y 轴对称，当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，结合对称性可得该交点只能在 y 轴上，可得 $f(0)=g(0)=1$，所以 $a=1$. 故选 C.
突破点

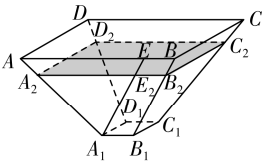
4. **B** 【解析】本题考查排列组合，特殊元素优先法，分步乘法计数原理.
满足要求的方案可分三步完成：第一步安排乙，乙可以排在第 2，3，4 位，有 3 种安排方法；第二步安排甲，有 3 种安排方法；第三步安排其他同学，有 A_3^3 种安排方法. 由分步乘法计数原理可得，满足条件的安排方法有 $3\times 3A_3^3=54$（种）. 故选 B.

5. **B** 【解析】本题考查三角函数的性质.
因为 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，所以 $f'(x)=-\omega\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$.
令 $f'(x)=0$，得 $\omega x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{k\pi-\frac{\pi}{3}}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$，其中 $\omega>0$. 当 $k=0$ 时，$x=-\frac{\pi}{3\omega}\notin(0,\pi)$；当 $k=1$ 时，$x=\frac{2\pi}{3\omega}$，令 $0<\frac{2\pi}{3\omega}<\pi$，解得 $\omega>\frac{2}{3}$；当 $k=2$ 时，$x=\frac{5\pi}{3\omega}$，所以需保证 $\frac{5\pi}{3\omega}\geqslant\pi$，解得 $\omega\leqslant\frac{5}{3}$. 综上所述，$\frac{2}{3}<\omega\leqslant\frac{5}{3}$. 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T.
对于 A，$T=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，$2\notin\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right]$，所以 **A 错误**；
对于 B，$T=2\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$，$1\in\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right]$，所以 **B 正确**；
对于 C，$T=3\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}\notin\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right]$，所以 **C 错误**；
对于 D，$T=4\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\notin\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right]$，所以 **D 错**

误. 故选 B.

6. D 【解析】本题考查台体体积公式.

设水面与棱台的四条侧棱分别相交于 A_2, B_2, C_2, D_2, 过点 A_1 作 $A_1E//BB_1$ 交 AB 于点 E, 交 A_2B_2 于点 E_2, 如图所示.



易知四边形 AA_1B_1B 为等腰梯形, 则四边形 A_1B_1BE 为平行四边形, 因为水面的高度是方斗杯高度的 $\frac{3}{4}$, 则 $B_2E_2=BE=A_1B_1=2$, $A_2E_2=\frac{3}{4}AE=\frac{3}{4}\times(10-2)=6$, 因此 $A_2B_2=8$(关键:由相似求得截面的边长).

设棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的高为 h, 其体积为 V, 则棱台 $A_1B_1C_1D_1-A_2B_2C_2D_2$ 的高为 $\frac{3}{4}h$, 设其体积为 V_1,

则 $V_1=\frac{1}{3}\times(2^2+8^2+2\times8)\cdot\frac{3}{4}h=21h$, $V=\frac{1}{3}\times(2^2+10^2+2\times10)h=\frac{124}{3}h$. 所以 $\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{124}{3}h}{21h}=\frac{124}{63}$, 由题意, $V_1=84$, 则该方斗杯可盛水的总体积 $V=\frac{124}{63}\times84=\frac{496}{3}$. 故选 D.

7. B 【解析】本题考查期望和方差的性质.

由离散型随机变量分布列的性质得 $a+\frac{1}{2}+b=1$, 可得 $a=\frac{1}{2}-b$, 结合 a, $b\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 得 $b\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 可知 $E(X)=-1\cdot a+a\cdot\frac{1}{2}+1\cdot b=-\frac{1}{2}a+b$, 代入 $a=\frac{1}{2}-b$, 得 $E(X)=\frac{3}{2}b-\frac{1}{4}$, 因此, $E(X)$ 为关于 b 的一次函数且在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 当 b 增大时, $E(X)$ 增大.

$E(X^2)=(-1)^2\cdot a+a^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot b=a+b+\frac{1}{2}a^2$, 代入 $a=\frac{1}{2}-b$, 得 $E(X^2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-b\right)^2$, 展开得 $E(X^2)=\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b+\frac{5}{8}$, $(E(X))^2=\left(\frac{3}{2}b-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{4}b^2-\frac{3}{4}b+\frac{1}{16}$,

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b+\frac{5}{8}-\frac{9}{4}b^2+\frac{3}{4}b-\frac{1}{16}=-\frac{7}{4}b^2+\frac{1}{4}b+\frac{9}{16}$, 因此 $D(X)$ 为关于 b 的二次函数, 其图象开口向下, 对称轴为直线 $b=\frac{1}{14}$, 且 $\frac{1}{14}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 则当 $b\in\left(0,\frac{1}{14}\right)$ 时, $D(X)$ 单调递增, $b\in\left(\frac{1}{14},\frac{1}{2}\right)$ 时, $D(X)$ 单调递减, 即 b 增大时, $D(X)$ 先增大后减小. 故选 B.

8. C 【解析】本题考查构造函数比较大小、利用导数研究函数的单调性.

因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所以 $0=\sin0<\sin1.02<\sin\frac{\pi}{2}=1$, 即 $\sin1.02\in(0,1)$,

又因为函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $a=\ln(\sin1.02)<\ln1=0$, $c=\ln1.02>\ln1=0$, 可得 $a<c$. 令 $x=0.02$, 则 $b=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $c=\ln(1+x)$, 构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x>0$, 则

关键点

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=-\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}}<0$, $f(x)$ 在 $(0,$

$+\infty$)上单调递减,则$f(0.02)<f(0)=0$,即$c<b$. 综上所述,$a<c<b$. 故选 C.

9. ABC 【解析】本题考查等差数列和等比数列.

由递推式$(a_{n+1}-a_n-3)(a_{n+1}-2a_n)=0$,可得$a_{n+1}=a_n+3$或$a_{n+1}=2a_n$,首项$a_1=1$,所以$a_n=3n-2$或$a_n=2^{n-1}$,在这两种情况下,数列$\{a_n\}$的每一项都不是 3 的整数倍.

关键点

对于 A,由于$1\ 027=2^{10}+3\times1$,$a_{11}=2^{10}=1\ 024$,$a_{12}=a_{11}+3=1\ 027$,故 **A 正确**;

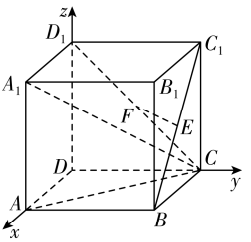
对于 B,$2\ 026=2^{10}+3\times334$,$a_{11}=1\ 024$,$a_{345}=a_{11}+3\times334=1\ 024+3\times334=2\ 026$,故 **B 正确**;

对于 C,$80=2^5+3\times16$,$a_6=2^5=32$,得$a_{22}=a_6+3\times16=32+3\times16=80$,故 **C 正确**;

对于 D,93 是 3 的倍数,故 **D 错误**. 故选 ABC.

10. BCD 【解析】本题考查正方体内线线、线面的位置关系.

以D为坐标原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,如图所示.



设正方体棱长为 2,则$E(1,2,1)$,$F(0,1,1)$,$A(2,0,0)$,$A_1(2,0,2)$,$B_1(2,2,2)$,$C(0,2,0)$,$C_1(0,2,2)$,

对于 A,$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,0)$,显然不存在一个实数$\lambda$使得$\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\overrightarrow{EF}$,故$\overrightarrow{A_1B_1}$,$\overrightarrow{EF}$不平行,即$EF$与$A_1B_1$不平行,故 **A 错误**;

对于 B,取平面$ABCD$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,则$\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=(-1,-1,0)\cdot(0,0,1)=0$,故$\overrightarrow{EF}\perp\boldsymbol{n}$,又$EF\not\subset$平面$ABCD$,故$EF$//平面$ABCD$,故 **B 正确**;

对于 C,$\overrightarrow{CC_1}=(0,2,2)-(0,2,0)=(0,0,2)$,则$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CC_1}=(-1,-1,0)\cdot(0,0,2)=0$,所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{CC_1}$,即$EF\perp CC_1$,故 **C 正确**;

对于 D,$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)-(2,0,0)=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{A_1C}=(0,2,0)-(2,0,2)=(-2,2,-2)$,

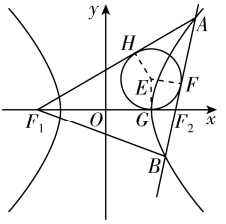
设平面AA_1C的一个法向量为$\boldsymbol{t}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+2y=0,\\ \boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-2x+2y-2z=0,\end{cases}$故可取$\boldsymbol{t}=(1,1,0)$,因为$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,0)=-\boldsymbol{t}$,所以$\overrightarrow{EF}$与$\boldsymbol{t}$平行,故$EF\perp$平面$AA_1C$,故 **D 正确**. 故选 BCD.

11. AD 【解析】本题考查双曲线的定义及其几何性质.

对于 A,分析:根据圆的切线长相等及双曲线的定义求解.

如图,连接EG,可知$EG\perp F_1F_2$,过点E作$EF\perp AF_2$于F,$EH\perp AF_1$于H,根据圆的切线长相等可得$|AH|=|AF|$,$|F_1H|=|GF_1|$,$|F_2F|=|GF_2|$,$|AF_1|-|AF_2|=(|AH|+|F_1H|)-(|AF|+|FF_2|)=|F_1G|-|GF_2|=(c+x_G)-(c-x_G)=2x_G=2a$,所以$x_G=a$,所以点$E$到$y$轴的距离为$a$,故 **A 正确**.

关键点



对于 B,由 A 可知$|GF_1|=a+c$,$|GF_2|=c-a$. 又$|GF_1|=2|GF_2|$,所以$a+c=2(c-a)$,所以$c=3a$,所以$c^2=9a^2=a^2+$

b^2，所以 $8a^2=b^2$，则 $\frac{b}{a}=2\sqrt{2}$，所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm 2\sqrt{2}x$，故 **B 错误**.

对于 C，分析：由直角三角形性质、内切圆半径及双曲线定义可得关于离心率的方程，解方程即可. 因为 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，$AF_1\perp AF_2$，所以 $|AF_2|^2+(|AF_2|+2a)^2=4c^2$，解得 $|AF_2|=\sqrt{2c^2-a^2}-a$，$|AF_1|=\sqrt{2c^2-a^2}+a$，所以内切圆半径 $r=\frac{2S_{\triangle AF_1F_2}}{C_{\triangle AF_1F_2}}=\frac{|AF_1||AF_2|}{|AF_1|+|AF_2|+2c}=\frac{(2c^2-a^2)-a^2}{2\sqrt{2c^2-a^2}+2c}=\frac{b^2}{\sqrt{c^2+b^2}+c}=\sqrt{c^2+b^2}-c$，

由 A 知 $r=a=\sqrt{c^2+b^2}-c$，即 $2c^2-a^2=(a+c)^2$，则 $c^2-2ac-2a^2=0$，即 $e^2-2e-2=0$（e 为双曲线的离心率），解得 $e=1+\sqrt{3}$ 或 $e=1-\sqrt{3}$（舍），所以 C 的离心率为 $1+\sqrt{3}$，故 **C 错误**.

对于 D，分析：根据双曲线的定义可得焦点三角形的周长，进而可得 $|AB|=5b-2a$，再由焦点弦的性质可得离心率的范围. 由双曲线的定义可得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，$|BF_1|-|BF_2|=2a$，两式相加可得 $|AF_1|+|BF_1|=4a+|AB|$，则 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $|AF_1|+|BF_1|+|AB|=4a+2|AB|=10b$，即 $|AB|=5b-2a$，又因为 $|AB|\geqslant\frac{2b^2}{a}$（提示：双曲线的通径是过焦点的所有弦中最短的一条，其长度为 $\frac{2b^2}{a}$），所以 $5ab-2a^2\geqslant 2b^2$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{b}{a}\leqslant 2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\in\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$，故 **D 正确**. 故选 AD.



30 s 速解　武汉大学——王梓秋

对于 C，由 y 轴恰好和 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆相切，可得 $x_E=a=r$，由 $AF_1\perp AF_2$，在 Rt $\triangle AF_1F_2$ 中，$r=\frac{|AF_1|+|AF_2|-|F_1F_2|}{2}=a$（提示：根据切线长相等，即 $(|AF_1|-r)+(|AF_2|-r)=|F_1F_2|$ 可得），结合 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，可得 $|AF_2|=c$，则 $|AF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}=\sqrt{3}c$，由 $|AF_1|=|AF_2|+2a=c+2a=\sqrt{3}c$，解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=1+\sqrt{3}$，故 **C 错误**.

12. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$i　【解析】本题考查复数的四则运算、共轭复数.

因为 $z_1=1+$i，所以 $\frac{1}{z_1}+\overline{z_1}=\frac{1}{1+\text{i}}+1-\text{i}=\frac{1-\text{i}}{2}+1-\text{i}=\frac{3-3\text{i}}{2}$，所以 $\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\overline{z_1}=\frac{3-3\text{i}}{2}$，所以 $z=\frac{2}{3-3\text{i}}=\frac{2(1+\text{i})}{3(1+\text{i})(1-\text{i})}=\frac{1+\text{i}}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$i.

13. 1　【解析】本题考查直线与抛物线交点相关问题.

设直线 l 的方程为 $y=2x+b$（b 为常数），将 $y=2x+b$ 代入抛物线 C 的方程得 $x^2=2p(2x+b)$，即 $x^2-4px-2pb=0$，$\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由一元二次方程根与系数的关系可得 $x_1+x_2=4p$.

因为 D 为 AB 的中点，所以 D 点的横坐标 $x_D=\frac{x_1+x_2}{2}=2p$，由 $PD/\!/y$ 轴可知，P 点横坐标与 D 点横坐标相等，即 $x_P=x_D=2p$，将 $x=2p$ 代入抛物线方程 $x^2=2py$，得 $(2p)^2=2p\cdot y_P$，解

得 $y_P=2p$，即 P 点坐标为 $(2p,2p)$，故直线 OP 的斜率 $k_{OP}=\frac{2p-0}{2p-0}=1$.

30 s 速解　武汉大学——王梓秋

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将两点坐标代入抛物线方程可得 $\begin{cases}x_1^2=2py_1,\\x_2^2=2py_2,\end{cases}$ 两式作差可得直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{2p}=2$，则 $x_D=\frac{x_1+x_2}{2}=2p$，又 $PD/\!/y$ 轴，所以 $x_D=x_P=2p$，代入 $x^2=2py$，可得 $y_P=2p$，所以点 $P(2p,2p)$，故直线 OP 的斜率 $k_{OP}=\frac{2p-0}{2p-0}=1$.

14. $-\frac{1}{e^2}$　【解析】本题考查通过导数研究含参函数最值问题.

$f(x)=\ln x+ax,x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+a$，

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在定义域上单调递增，不存在最大值，故舍去；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，有 $0<x<-\frac{1}{a}$，令 $f'(x)<0$，有 $x>-\frac{1}{a}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{a}$ 处取得最大值，即 $f(x)_{\max}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{a}\right)-1=b$，所以 $ab=a\ln\left(-\frac{1}{a}\right)-a(a<0)$.

令 $g(x)=x\ln\left(-\frac{1}{x}\right)-x(x<0)$，则 $g'(x)=\ln\left(-\frac{1}{x}\right)-2$，令 $g'(x)>0$，得 $-\frac{1}{e^2}<x<0$，令 $g'(x)<0$，得 $x<-\frac{1}{e^2}$，

故 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{e^2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$ 上单调递增，综上，$a=-\frac{1}{e^2}$.

提分小卷 ▸ 8

1. A　【解析】本题考查复数的概念、共轭复数.

$\bar{z}\cdot i=1$，则 $\bar{z}=\frac{1}{i}=-i$，则 $z=i$，故 z 的虚部是 1. 故选 A.

2. B　【解析】本题考查集合的并集运算.

因为集合 $A=\{x|3\leqslant x<10\}$，$B=\{x|2<x\leqslant 7\}$，所以 $A\cup B=\{x|2<x<10\}$，故选 B.

3. C　【解析】本题考查数量积的运算、求投影向量.

依题意，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=3$，而 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量是 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

故选 C.

4. D　【解析】本题考查经验回归方程、残差.

对于 A，由题意得 $\bar{x}=\frac{2+3+5+6}{4}=4$，$\bar{y}=\frac{5+7+9+15}{4}=9$，所以经验回归直线必过点 $(4,9)$，故 **A 错误**；

对于 B，由 $\hat{a}=\bar{y}-2.2\bar{x}=9-2.2\times 4=0.2$，故 **B 错误**；

对于 C，$\hat{y}=2.2x+0.2$，当 $x=2$ 时，$\hat{y}=2.2\times 2+0.2=4.6$，所以

$x=2$ 对应的样本点的残差为 $5-4.6=0.4$，故 **C 错误**；

对于 D，当 $x=7$ 时，$\hat{y}=2.2\times7+0.2=15.6$，故 **D 正确**. 故选 D.

5. **B** 【解析】本题考查函数的单调性及图象的对称性.

令函数 $u=x^2-2x$，易知其图象关于直线 $x=1$ 对称，且在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)=e^{x^2-2x}$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，结合函数 $y=e^u$ 的单调性，可知 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1)$ 上单调递减.

若 $f(t+1)>f(2t-1)$，则 $|t+1-1|>|2t-1-1|$，两边同时平方，解得 $\frac{2}{3}<t<2$，即 t 的取值范围为 $\left(\frac{2}{3},2\right)$. 故选 B.

6. **C** 【解析】本题考查等比中项、含绝对值的等差数列前 n 项和.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$d\neq0$，因为 a_2,a_3,a_6 成等比数列，所以 $a_3^2=a_2a_6$，且 $a_1=1$，即 $(1+2d)^2=(1+d)(1+5d)$，整理可得 $d^2+2d=0$，解得 $d=-2$ 或 $d=0$（舍去），可得 $a_n=1-2(n-1)=3-2n$，令 $a_n=3-2n<0$，解得 $n>1.5$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant2$，所以数列 $\{|a_n|\}$ 的前 6 项和为 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|=a_1-(a_2+\cdots+a_6)=a_1-5a_4=1-5\times(-5)=26$. 故选 C.

7. **A** 【解析】本题考查利用导数研究函数的性质.

设 $M(x_0,2\ln x_0)$ 是 $h(x)=2\ln x\left(\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e\right)$ 的图象上一点，则 $\frac{1}{e}\leqslant x_0\leqslant e$，且 $M(x_0,2\ln x_0)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $M'(x_0,-2\ln x_0)$，该点在 $g(x)=a-x^2$ 的图象上，由题意得，方程 $-2\ln x_0=a-x_0^2\left(\frac{1}{e}\leqslant x_0\leqslant e\right)$ 有 2 个不同的实数解，

即方程 $x_0^2-2\ln x_0=a\left(\frac{1}{e}\leqslant x_0\leqslant e\right)$ 有 2 个不同的实数解.

关键点

令 $f(x)=x^2-2\ln x\left(\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e\right)$，则 $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$，当 $x\in\left[\frac{1}{e},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,e]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}+2$，$f(e)=e^2-2$，方程 $x_0^2-2\ln x_0=a$ 有 2 个不同的实数解等价于直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点，所以 $f(1)<a\leqslant f\left(\frac{1}{e}\right)$，所以 $a\in\left(1,\frac{1}{e^2}+2\right]$. 故选 A.

8. **B** 【解析】本题考查排列组合、分类加法计数原理、古典概型、离散型随机变量的分布列与期望.

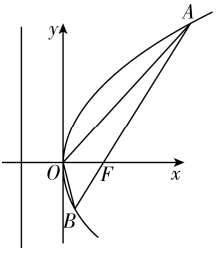
根据题意，随机变量 X 的可能取值为 4，6，8，当 $X=4$ 时，需要向右 2 次，向上 2 次，共有 $C_4^2=6$（条）路径；当 $X=6$ 时，共有 4 条路径；当 $X=8$ 时，共有 2 条路径. 因此，路径总数为 $6+4+2=12$，每条路径的概率相等，都是 $\frac{1}{12}$，所以 $P(X=4)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P(X=6)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，$P(X=8)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，因此 $E(X)=4\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}+8\times\frac{1}{6}=\frac{16}{3}$. 故选 B.

9. **BD** 【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系、抛物线的焦半径.

对于 A，抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$，准线方程为 $x=-2$，**A 错误**.

对于 B，$|AF|=x_1+2=8$，则 $x_1=6$，**B 正确**.

显然直线 l 不垂直于 y 轴，设其方程为 $x=ty+2$，由 $\begin{cases}x=ty+2,\\y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-8ty-16=0$，$\Delta>0$，则 $y_1+y_2=8t$，$y_1y_2=-16$，$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+4=8t^2+4$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{8}$·



$\frac{y_2^2}{8}=4$.

对于 C，$|AF|\cdot|BF|=(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=8+8(2t^2+1)=16+16t^2\geqslant 16$，当且仅当 $t=0$ 时取等号，**C 错误**.

对于 D，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=4-16=-12<0$，则 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}<0$，结合 $\angle AOB\in(0,\pi)$，则 $\angle AOB$ 为钝角，**D 正确**. 故选 BD.

10. **ABD** 【解析】本题考查正弦定理，三角恒等变换.

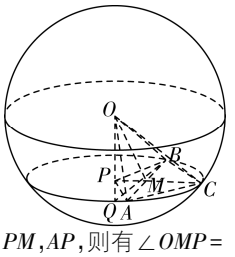
对于 A，由 $c=2b\cos A$ 及正弦定理得，$\sin C=2\sin B\cos A$，而 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin B\cos A$，得 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$，又 $\cos A\cdot\cos B\neq 0$，所以 $\tan A=\tan B$，在 $\triangle ABC$ 中，有 $A=B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 **A 正确**；

对于 B，由 $\sqrt{2}\cos C=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，得 $\sqrt{2}\cos(\pi-2A)=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$，得 $-\sqrt{2}(\cos^2A-\sin^2A)=-\sqrt{2}(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A$，因为 $\sin A+\cos A>0$，所以 $\sin A-\cos A=\frac{1}{2}>0$，得 $\sin A>\cos A$，故 **B 正确**；

对于 D，由 $\sin^2A+\cos^2A=1$，$\sin A-\cos A=\frac{1}{2}$，及 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，联立解得 $\sin A=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$，$\cos A=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$，由 $A=B$ 得 $a=b$，$\cos A=\cos B$，则 $c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A=2a\cos A$，$\frac{c}{a}=2\cos A=2\times\frac{\sqrt{7}-1}{4}=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$，故 **D 正确**；

对于 C，$\triangle ABC$ 外接圆半径 $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\frac{c}{2\cos A}}{2\sin A}=\frac{c}{4\sin A\cos A}=\frac{c}{4\times\frac{\sqrt{7}+1}{4}\times\frac{\sqrt{7}-1}{4}}=\frac{2c}{3}\neq\frac{4c}{3}$，故 **C 错误**. 故选 ABD.

11. **ABD** 【解析】本题考查多面体与球的综合问题.



如图，$OA=OB=OC=4$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，可得 $OA\perp OB$. 固定平面 OAB，由二面角 $O-AB-C$ 的大小为 120°，可知 C 为一个与平面 OAB 夹角为 60° 的平面与球 O 的交线上的点.

关键点

取 AB 的中点 M，过点 O 作 $OP\perp$ 平面 ABC 交平面 ABC 于点 P，连接 OM，PM，AP，则有 $\angle OMP=60°$，又易知 $OM=2\sqrt{2}$，$PM=\sqrt{2}$，$OP=\sqrt{6}$，$AP=\sqrt{10}$，且点 C 在劣弧 AB 上运动.

对于 A，因为点 C 在劣弧 AB 上，所以 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，故 **A 正确**；

对于 B，连接 PC，设直线 OC 与平面 ABC 所成的角为 θ，则 $\tan\theta=\frac{OP}{PC}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4^2-OP^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，为定值，故 **B 正确**；

对于 C，易知三棱锥 $O-ABC$ 的体积的最大值 $(V_{O-ABC})_{\max}=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC})_{\max}\cdot OP=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10-2}\times(\sqrt{10}-\sqrt{2})=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sqrt{10}-\sqrt{2})$，故 **C 错误**；

对于 D，分析：首先判断三棱锥 $O-ABC$ 的外接球的球心位置和半径. 设三棱锥 $O-ABC$ 的外接球的球心为 Q，连接

PQ,PB,QB，由于 P 是 $\triangle ABC$ 的外心，则 $PQ\perp$ 平面 ABC，因此 O,P,Q 三点共线，设 $OQ=r$，在 $\triangle BPQ$ 中，由勾股定理可得 $(r-\sqrt{6})^2+(\sqrt{10})^2=r^2$，解得 $r=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，因此三棱锥 $O-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi r^2=4\pi\times\dfrac{32}{3}=\dfrac{128}{3}\pi$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

12. 73　**【解析】**本题考查数列通项的最值问题.

因为 $S_n=2\,026$ 是定值，要使当 n 取最大值时，a_n 也取最大值，所以 $\{a_n\}$ 需满足各项尽可能取到最小值. 可令数列 $\{a_n\}$ 的前 $n-1$ 项分别为 $1,2,\cdots,n-1,n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，

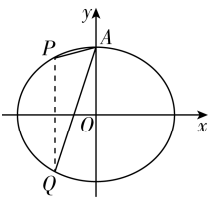
则 $S_{n-1}=\dfrac{1}{2}(n-1)n(n\geqslant 2)$，由 $S_{n-1}=\dfrac{1}{2}(n-1)n<2\,026$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $2\leqslant n\leqslant 64$，

当 $n=64$ 时，$S_{63}=\dfrac{1}{2}\times 63\times 64=2\,016$，$S_{64}=2\,026$，此时 $a_{64}=2\,026-2\,016=10$，不合题意，

当 $n=63$ 时，$S_{62}=\dfrac{1}{2}\times 62\times 63=1\,953$，$S_{63}=2\,026$，此时 $a_{63}=2\,026-1\,953=73$，满足题意. 所以 a_n 的最大值是 73.

13. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　**【解析】**本题考查椭圆的离心率.

分析：设 $P(x_1,y_1)$，则 $Q(x_1,-y_1)$，根据斜率公式结合题意可得 $\dfrac{-(y_1^2-b^2)}{x_1^2}=\dfrac{1}{3}$，再结合椭圆方程，整理可得椭圆 C 的离心率. 根据题意可得 $A(0,b)$，设 $P(x_1,y_1)$，则 $Q(x_1,-y_1)$，所以 $k_{AP}=\dfrac{y_1-b}{x_1-0}$，$k_{AQ}=\dfrac{-y_1-b}{x_1-0}$.



因为直线 AP,AQ 的斜率之积为 $\dfrac{1}{3}$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{y_1-b}{x_1-0}\cdot\dfrac{-y_1-b}{x_1-0}=\dfrac{-(y_1^2-b^2)}{x_1^2}=\dfrac{1}{3}$.

因为点 P 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，即 $y_1^2-b^2=-\dfrac{b^2x_1^2}{a^2}$，所以

关键点

$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{-(y_1^2-b^2)}{x_1^2}=\dfrac{\frac{b^2x_1^2}{a^2}}{x_1^2}=\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{a^2-c^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，所以 $1-\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，即离心率 $e=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

30 s 速解　武汉大学——王梓秋

方法一（极限分析）：当 PQ 无限趋近左顶点时，$k_{AP}=k_{AQ}=\dfrac{b}{a}$，有 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=\dfrac{1}{3}$，则 $e=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

方法二（参数方程）：设 $P(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$，$Q(a\cos\alpha,-b\sin\alpha)$，$\alpha$ 为参数，$\alpha\in(0,2\pi)$ 且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$. 于是 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{b-b\sin\alpha}{0-a\cos\alpha}\times\dfrac{b-(-b\sin\alpha)}{0-a\cos\alpha}=\dfrac{b^2(1-\sin^2\alpha)}{a^2\cos^2\alpha}=\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，则 $e=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

学霸点拨：对于恒成立问题，可以尝试采用极限分析法定性分析；除此之外，椭圆的参数方程可以实现圆和椭圆的转化，本质与仿射变换类似，遇到以仿射变换为背景的题目的时候可以尝试使用参数方程.

14. e^2　**【解析】**本题考查利用导数求函数的最值、点到直线的距离.

分析：从方程有实根出发，把对数式化为指数形式，再整理

成含参数 a,b 的直线方程，从而把 a^2+b^2 转化为原点到直线上一点距离的平方.

因为关于 x 的方程 $2\ln\left(ax+\frac{b}{2}\right)=\sqrt{4x^2+1}$ 有实根，所以关于 x 的方程 $\ln\left(ax+\frac{b}{2}\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$ 有实根，设方程 $\ln\left(ax+\frac{b}{2}\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$ 的实根为 x_0，则 $\ln\left(ax_0+\frac{b}{2}\right)=\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}$，得到 $ax_0+\frac{b}{2}=\mathrm{e}^{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}$，即 $ax_0+\frac{b}{2}-\mathrm{e}^{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}=0$.

设点 $P(a,b)$，则点 P 在直线 $l:x_0x+\frac{y}{2}-\mathrm{e}^{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}=0$ 上，设

关键点

点 $O(0,0)$ 到直线 $l:x_0x+\frac{y}{2}-\mathrm{e}^{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}=0$ 的距离为 d，则 $d=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}}{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}$.

分析：换元简化表达式，构造函数求出距离 d 的最小值，再结合点到直线的距离最短，求解 a^2+b^2 的最小值.

设 $t=\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}$，$f(t)=\frac{\mathrm{e}^t}{t}\left(t\geqslant\frac{1}{2}\right)$，得到 $f'(t)=\frac{\mathrm{e}^t(t-1)}{t^2}$，

当 $\frac{1}{2}\leqslant t<1$ 时，$f'(t)<0$，则 $f(t)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减；当 $t>1$ 时，$f'(t)>0$，则 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，得到 $f(t)_{\min}=f(1)=\mathrm{e}$，则 $d=f(t)\geqslant\mathrm{e}$，又 $a^2+b^2=|OP|^2$，

由几何意义可知 $|OP|\geqslant d$，故 $a^2+b^2=|OP|^2\geqslant d^2\geqslant\mathrm{e}^2$，当且仅当 $t=1$，即 $x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 OP 垂直于直线 l 时，两个等号同时成立. 故 a^2+b^2 的最小值为 e^2.

提分小卷 ▸ 9

1. **D** 【解析】本题考查集合的交集运算.

集合 $A=\{x|-1\leqslant x^3\leqslant 1\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-x-2<0\}=\{x\in\mathbf{Z}|-1<x<2\}=\{0,1\}$，则 $A\cap B=\{0,1\}$. 故选 D.

2. **A** 【解析】本题考查复数的运算及复数的模.

因为 $z(1+2\mathrm{i})=5$，所以 $z=\frac{5}{1+2\mathrm{i}}$，故 $|z|=\frac{5}{|1+2\mathrm{i}|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. 故选 A.

3. **C** 【解析】本题考查函数单调性、奇偶性.

因为 $g(x)=f(-x)-f(x)$，其定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，$g(-x)=f(x)-f(-x)=-[f(-x)-f(x)]=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $f(-x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减（提示：复合函数单调性），$-f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，因为两个减函数的和是减函数，所以 $g(x)=f(-x)-f(x)=f(-x)+[-f(x)]$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 综上，函数 $g(x)$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 故选 C.

4. **B** 【解析】本题考查样本平均数及方差的计算.

依题意，$\bar{x}_A=130$，$s_A^2=115$，$\bar{x}_B=110$，$s_B^2=215$，

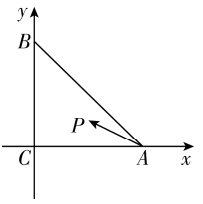
所以全班学生的平均成绩 $\bar{x}=\frac{10}{10+30}\times 130+\frac{30}{10+30}\times 110=115$（分），

全班学生成绩的方差 $s^2=\frac{10}{10+30}[s_A^2+(\bar{x}_A-\bar{x})^2]+\frac{30}{10+30}[s_B^2+(\bar{x}_B-\bar{x})^2]=\frac{1}{4}\times(115+225)+\frac{3}{4}\times(215+25)=85+180=265$.

故选 B.

5. C 【解析】本题考查利用坐标法解决平面向量数量积问题.

根据题意，建立如图所示平面直角坐标系，则 $C(0,0)$，$A(2,0)$，$B(0,2)$，设 $P(x,y)$，则 $|\overrightarrow{AP}|=1$，即 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=1$，所以 $(x-2)^2+y^2=1$，所以点 P 的轨迹是以 A 为圆心，1 为半径的圆.



又 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DP}$，所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$，即 $D\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{BD}=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}-2\right)$，又 $\overrightarrow{BC}=(0,-2)$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=4-y$. 又点 P 在曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 上，所以 $-1\leqslant y\leqslant 1$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=4-y\leqslant 4-(-1)=5$，所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的最大值为 5，故选 C.

6. D 【解析】本题考查等差数列基本量的计算、等差中项.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_2+a_8=2a_5=10$，故 $a_5=5$，所以 $a_3a_7=(a_5-2d)(a_5+2d)=a_5^2-4d^2=25-4d^2=-11$，即 $d^2=9$，又 $d>0$，解得 $d=3$. 故选 D.

7. D 【解析】本题考查函数图象的公切线问题.

由题可得切线 l 与 $f(x)=e^{x-1}$ 的切点为 $M(x_1,e^{x_1-1})$，由 $f'(x)=e^{x-1}$ 可得切线 l 的斜率 $k=f'(x_1)=e^{x_1-1}$，所以切线 l 的方程为 $y-e^{x_1-1}=e^{x_1-1}(x-x_1)$，即 $y=e^{x_1-1}x-x_1e^{x_1-1}+e^{x_1-1}$ ①.

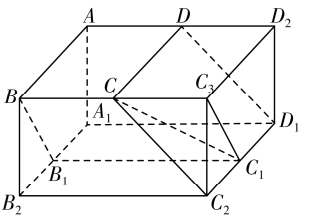
由题可得切线 l 与 $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$ 的切点为 $N\left(x_2,-\frac{1}{2}x_2^2+x_2-\frac{1}{2}\right)$，又 $g'(x)=-x+1$，所以切线 l 的方程为 $y-\left(-\frac{1}{2}x_2^2+x_2-\frac{1}{2}\right)=(-x_2+1)(x-x_2)$，即 $y=(1-x_2)x+\frac{1}{2}(x_2^2-1)$ ②.

由①②有 $\begin{cases}e^{x_1-1}=1-x_2,\\-x_1e^{x_1-1}+e^{x_1-1}=\frac{1}{2}(x_2^2-1),\end{cases}$ 消去 e^{x_1-1} 并整理得 $x_1-1=\frac{1}{2}(x_2+1)$，即 $2x_1-2=x_2+1$，解得 $x_2-2x_1=-3$. 故选 D.

8. B 【解析】本题考查利用补形法求六面体的体积.

分析：先根据题意把六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补形成长方体，再结合柱体体积和锥体体积公式用该长方体的体积减去多余部分的体积即可求解.

将六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补形为长方体 $A_1B_2C_2D_1-ABC_3D_2$，如图所示.



在长方体 $A_1B_2C_2D_1-ABC_3D_2$ 中，$A_1B_2=AB=B_1C_1=4$，$BC=A_1B_1=AA_1=2$.

因为长方体 $A_1B_2C_2D_1-ABC_3D_2$ 的体积 $V=S_{\text{正方形}A_1B_2C_2D_1}\times AA_1=4\times4\times2=32$，

直三棱柱 $BB_1B_2-C_3C_1C_2$ 的体积 $V_1=S_{\triangle BB_1B_2}\times B_2C_2=\frac{1}{2}\times(4-2)\times2\times4=8$，

直三棱柱 $CC_2C_3-DD_1D_2$ 的体积 $V_2=S_{\triangle CC_2C_3}\times D_1C_2=\frac{1}{2}\times(4-2)\times2\times4=8$，

三棱锥 $C-C_1C_2C_3$ 的体积 $V_3=\frac{1}{3}\times S_{\triangle C_1C_2C_3}\times CC_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(4-2)\times2\times(4-2)=\frac{4}{3}$，

所以六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V-V_1-V_2+V_3=32-8-8+\frac{4}{3}=\frac{52}{3}$. 故选 B.

9. ACD 【解析】本题考查正态分布、二项分布.

对于随机变量 $X\sim N(3,1)$，有 $E(X)=3,D(X)=1$.

对于随机变量 $Y\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，有 $E(Y)=6\times\frac{1}{2}=3,D(Y)=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

对于 A，$E(X)=E(Y)=3$，故 **A 正确**；

对于 B，$D(X)=1,D(Y)=\frac{3}{2}$，因此 $D(X)\neq D(Y)$，故 **B 错误**；

对于 C，由正态曲线具有对称性，$X\sim N(3,1)$，可知 $P(X\leqslant1)=P(X\geqslant5)$，故 **C 正确**；

对于 D，对于随机变量 $Y\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$，其分布列为 $P(Y=k)=C_6^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-k},k=0,1,2,\cdots,6$，

$P(Y\leqslant1)=P(Y=0)+P(Y=1)=C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^6+C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1+6}{64}=\frac{7}{64}$，

而 $P(Y\geqslant5)=P(Y=5)+P(Y=6)=C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^1+C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(1-\frac{1}{2}\right)^0=\frac{6+1}{64}=\frac{7}{64}$，故 **D 正确**. 故选 ACD.

15 s 速解　武汉大学——王梓秋

对于 D，对于二项分布，当概率 $p=1-p$，即 $p=\frac{1}{2}$ 时，其分布列为 $P(Y=k)=\frac{1}{2^n}C_n^k,n=6,k=0,1,2,\cdots,6$，根据组合数的对称性可知 $C_n^k=C_n^{n-k}$，所以 $P(Y\leqslant1)=P(Y\geqslant5)$，故 **D 正确**.

10. ABD 【解析】本题考查正切型函数的图象与性质.

对于 A，因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，故 $|\omega|=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$，

又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$，故 **A 正确**；

对于 B，由 A 选项可得 $f(x)=2\tan(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，令 $2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 **B 正确**；

对于 C，若点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 为 $f(x)$ 的图象的对称中心，则 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$（注意：正切函数图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$），即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 **C 错误**；

对于 D，若 $f(x)=2\tan(2x+\varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 内单调，由 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$，可得 $\frac{\pi}{3}+\varphi<2x+\varphi<\frac{2\pi}{3}+\varphi$，

所以 $\left(\frac{\pi}{3}+\varphi,\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)\subseteq\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\begin{cases}\frac{\pi}{3}+\varphi\geqslant k\pi-\frac{\pi}{2},\\ \frac{2\pi}{3}+\varphi\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，即 $k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

记 $A=\left[k\pi-\frac{5\pi}{6},k\pi-\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$，$B=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $A\cap B=\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 φ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，故 **D 正确**. 故选 ABD.

11. **ABD** 【解析】本题考查利用曲线的方程求范围和最值问题.

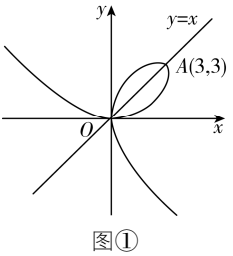
对于 A，将 $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ 代入方程得 $\left(\frac{3a}{2}\right)^3+\left(\frac{3a}{2}\right)^3-3a\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)^2=0$，所以 $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ 满足方程，故曲线 C 过该点，故 **A 正确**；

对于 B，在曲线方程中，把 x,y 互换，方程不变，即当 (x,y) 在曲线 C 上时，它关于直线 $y=x$ 的对称点 (y,x) 也在曲线 C 上，故曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称，故 **B 正确**；

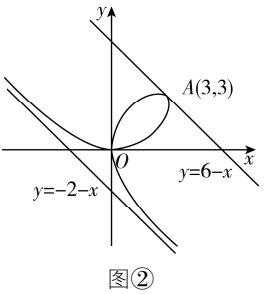
关键点

对于 C，当 $a=2$ 时，由 A，B 知曲线过点 $(3,3)$ 且关于直线 $y=x$ 对称，从图形上看，曲线在第一象限的点存在纵坐标大于 3 的情况，如图①，从数上看，取 $x=2$，则 $y^3-12y+8=0$，记 $f(y)=y^3-12y+8$，$f(3)=3^3-12\times3+8=-1<0$，$f(4)=4^3-12\times4+8=24>0$，$f(y)$ 的图象连续不间断，故 $f(y)$ 在 $y\in(3,4)$ 上必有一零点，故曲线在第一象限上存在点的纵坐标的最大值大于 3，故 **C 错误**；

对于 D，设 $x+y=t$，则 $y=-x+t$，代入曲线方程得 $x^3+(t-x)^3-6x(t-x)=0$，即 $3(t+2)x^2-3t(t+2)x+t^3=0$，当 $t+2=0$，即 $t=-2$ 时，代入得 $t^3=0$，矛盾；当 $t+2\neq0$，即 $t\neq-2$ 时，$\Delta=9t^2(t+2)^2-12(t+2)t^3=3t^2(t+2)(3t+6-4t)=3t^2(t+2)(6-t)\geqslant0$，可得 $-2\leqslant t\leqslant6$，又 $t\neq-2$，故 $-2<t\leqslant6$，如图②，从图形上看曲线 C 夹在渐近线 $x+y=-2$ 和切线 $x+y=6$ 之间，故 **D 正确**. 故选 ABD.



图①



图②

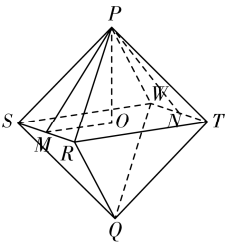
12. **2** 【解析】本题考查含参函数的极值点问题.

由题设 $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{a}{x}$，且 $f'(e)=\frac{2}{e}-\frac{a}{e}=0$，即 $a=2$，此时 $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x,x>0$，则 $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x}$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，所以 e 是 $f(x)$ 的极小值点，满足题设，故 $a=2$.

13. $\frac{4\pi}{3}$　【解析】本题考查空间几何体的内切球的表面积.

由题意可知两个三棱锥 $D-A_1BC_1$，B_1-AD_1C 的公共部分为一个棱长为 $\sqrt{2}$ 的正八面体，如图所示，设该八面体为 $PSRTWQ$，分别取 SR，WT 的中点 M，N，连接 PM，PN，设该八面体的内切球的半径为 r，球心为 O，连接 OM，OP，所以 $PS=\sqrt{2}$，$SM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $PM=PN=\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$OM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$OP=1$，又 $PM\cdot r=OM\cdot OP$（提示：等面积法），所以 $r=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即球 O 的表面积为 $4\pi r^2=\frac{4\pi}{3}$.

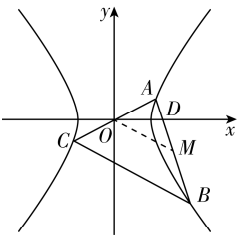
关键点



14. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　【解析】本题考查双曲线的离心率，直线和双曲线的位置关系.

分析：已知 A，C 关于原点对称，则 O 为 AC 中点，为了将点 B 处的 $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$ 这一条件转移到原点附近，取 AB 中点 M 形成中位线，从而将 $\angle ABC$ 转化为与 OM 相关的角度，方便计算出过原点的直线 OM 的斜率，进而利用点差法求解离心率.

如图，设直线 AB 与 x 轴交于点 D，取 AB 的中点 M，连接 OM，



由对称性可知 O 为线段 AC 的中点，则 $OM/\!/BC$，所以 $\angle OMD=\frac{\pi}{4}$. 由直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-3$，得 $\tan\angle ODM=-3$，

关键点

$k_{OM}=\tan(\angle ODM+\angle OMD)=\frac{\tan\angle ODM+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\angle ODM\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-3+1}{1-(-3)\times 1}=-\frac{1}{2}$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减，得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，化简得 $\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}$，即 $k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}\times(-3)=\frac{3}{2}$，该双曲线的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.