专题突破 · 析题型

专题1 ▸ 三角函数与解三角形

题型1　三角函数的图象与性质

1.【解】(1)分析:已知$f(x)$的最小正周期T,可求得ω,结合$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1$可求出$\varphi$,再利用整体法求正弦型函数的单调递增区间.

由题意得$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=2\pi,\omega>0$,

$\therefore \omega=1$,则$f(x)=\sin(x+\varphi)$. ……2分

又$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=1$,$\therefore \frac{3\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{4}$,$\therefore f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. ……5分

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

……7分

(2)分析:先求出$g(x)$的解析式,进而得到$y=g(x)\cdot g\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$的表达式,化简后即可求出值域.

由题意得$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x$,$\therefore g\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$,

……9分

$\therefore y=g(x)g\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}$,

$\therefore y=g(x)g\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$的值域为$\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$. ……13分

2.【解】(1)分析:根据三角恒等变换化简,结合最小正周期求出ω,从而根据导数的几何意义得到切线方程.

$f(x)=\sin\omega x-2\sin^2\frac{\omega x}{2}+1=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$,

……2分

因为$f(x)$的最小正周期为$\pi,\omega>0$,所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得$\omega=2$,

所以$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. ……4分

则$f(0)=\sqrt{2}\sin\left(2\times0+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$,所以切点为$(0,1)$.

……5分

又$f'(x)=2\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,则$f'(0)=2\sqrt{2}\cos\left(2\times0+\frac{\pi}{4}\right)=$

$2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$，所以切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $2x-y+1=0$.

…… 7 分

(2) 分析：根据极值点和零点情况列出关于 ω 的不等式进行求解.

由(1)知，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，$\omega>0$，由 $x\in(0,\pi)$，得 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上恰有三个极值点，所以 $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，且 $\frac{7\pi}{2}\notin\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，即 $\frac{5\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{9}{4}<\omega\leqslant\frac{13}{4}$. …… 10 分

又 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上恰有两个零点，则 $\pi,2\pi\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，且 $3\pi\notin\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，即 $2\pi<\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant3\pi$，解得 $\frac{7}{4}<\omega\leqslant\frac{11}{4}$. …… 13 分

综上，$\frac{9}{4}<\omega\leqslant\frac{11}{4}$，故 ω 的取值范围为 $\left(\frac{9}{4},\frac{11}{4}\right]$. …… 15 分

题型 2　利用正、余弦定理解三角形

1.【解】(1) 第一步：利用正弦定理将边化为角并整理.

由题知 $(2b+\sqrt{3}c)\cos A+\sqrt{3}a\cos C=0$，由正弦定理得 $(2\sin B+\sqrt{3}\sin C)\cos A+\sqrt{3}\sin A\cos C=0$，

即 $2\sin B\cos A+\sqrt{3}\sin(A+C)=0$. …… 3 分

第二步：根据三角形的内角和为 π 结合诱导公式进行转换，进而求出角 A.

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin(A+C)=\sin B$，代入整理得 $\sin B(2\cos A+\sqrt{3})=0$.

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，故 $\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{5\pi}{6}$. …… 6 分

(2) 第一步：设 $CD=x(x>0)$，根据题中向量的关系、直角三角形、正弦定理等建立等式解 x，进而得到 BD 和 AB 的长.

由(1)知 $\angle BAC=\frac{5\pi}{6}$，则 $\angle CAD=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$，设 $CD=x(x>0)$，依题意，$BD=2x$.

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin C}=\frac{x}{\sin\frac{\pi}{3}}$，则 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2x}$.

因为 C 是锐角，所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2C}=\sqrt{1-\frac{3}{4x^2}}=\frac{\sqrt{4x^2-3}}{2x}$. …… 8 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\sin B=\frac{1}{2x}$，因为 $B=\pi-\frac{5\pi}{6}-C=\frac{\pi}{6}-C$，

所以 $\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{6}-C\right)$，即 $\sin B=\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C$，

即 $\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{4x^2-3}}{2x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2x}$，解得 $x=\sqrt{7}$(负值舍去)，

故 $BD=2\sqrt{7}$，则 $AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=3\sqrt{3}$. …… 10 分

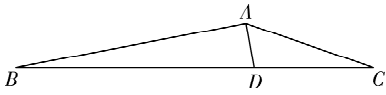
第二步：将$\triangle ABC$分为$\triangle ABD$和$\triangle ADC$分别求面积，从而求得$\triangle ABC$的面积.

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

因为$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

所以$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABD}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，即$\triangle ABC$的面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

…… 13分



2. (1)【证明】分析：利用三角恒等变换及余弦定理对式子进行化简，只留下a，b，进而证得$a=b$.

因为$c^2=4ab\sin^2\frac{C}{2}$，所以$c^2=4ab\cdot\frac{1-\cos C}{2}=2ab(1-\cos C)$.

…… 2分

又$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以$a^2+b^2-2ab\cos C=2ab(1-\cos C)$，即$a^2+b^2=2ab$，所以$(a-b)^2=0$，即$a=b$. …… 6分

(2)【解】分析：已知$\triangle ABC$的面积和$a=b$，所以可利用三角形面积公式$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，消去b后结合正弦函数的性质求得a的最小值.

因为三角形的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=3$，$a=b$，所以$\sin C=\frac{6}{a^2}$.

…… 9分

又$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C\in(0,1]$，所以$0<\frac{6}{a^2}\leqslant 1$，解得$a\geqslant\sqrt{6}$，当且仅当$C=\frac{\pi}{2}$时等号成立.

故a的最小值为$\sqrt{6}$. …… 13分

3.【解】(1)第一步：利用正弦定理边化角，并结合两角差的余弦公式展开.

因为$a\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{b+c}{2}$，所以由正弦定理可得$2\sin A\cos\left(B-\frac{\pi}{3}\right)=\sin B+\sin C$，

则$\sin A(\cos B+\sqrt{3}\sin B)=\sin B+\sin C$，即$\sin A\cos B+\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin B+\sin C$. …… 2分

第二步：结合三角恒等变换构建关于角A的等式.

又因为$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以$\sin A\cos B+\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

即$\sqrt{3}\sin A\sin B-\cos A\sin B=\sin B$，

因为$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B\neq 0$，即$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，可得$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. …… 4分

第三步：根据角A的取值范围确定角A的大小.

又因为$A\in(0,\pi)$，所以$A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

可得$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. …… 6分

(2)第一步：利用正、余弦定理整理可得$\frac{b^2+c^2}{bc}=1+\frac{9}{bc}$，将目标

式转化为有关 bc 的关系式.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$,

则 $a=3$, $b=2\sqrt{3}\sin B$, $c=2\sqrt{3}\sin C$,

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $9=b^2+c^2-bc$, 即 $b^2+c^2=9+bc$,

可得 $\frac{b^2+c^2}{bc}=\frac{9+bc}{bc}=1+\frac{9}{bc}$. …… 8 分

第二步:将边化为角后消元,得到 bc 关于 B 的关系式.

其中 $bc=12\sin B\sin C=12\sin B\sin(A+B)=12\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$

$=6\sqrt{3}\sin B\cos B+6\sin^2 B=3\sqrt{3}\sin 2B-3\cos 2B+3$

$=6\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+3$. …… 10 分

第三步:根据锐角三角形的条件确定 B 的取值范围,进而求得 bc 的取值范围.

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$,

则 $\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$, 可得 $\frac{1}{2}<\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,

则 $6<bc\leqslant 9$. …… 13 分

第四步:由 bc 的取值范围得目标式的取值范围.

故 $1\leqslant\frac{9}{bc}<\frac{3}{2}$, 则 $2\leqslant 1+\frac{9}{bc}<\frac{5}{2}$,

所以 $\frac{b^2+c^2}{bc}$ 的取值范围为 $\left[2,\frac{5}{2}\right)$. …… 15 分

4.【解】(1)第一步:由余弦定理结合 $\angle ACB$ 的取值范围可得出 $\angle ACB$ 的值.

因为在 $\triangle ABC$ 中, $AB^2=BC^2+AC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB=BC^2+AC^2-AC\cdot BC$, 所以 $\cos\angle ACB=\frac{1}{2}$, 又 $\angle ACB\in(0,\pi)$, 所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$. …… 2 分

第二步:利用正弦定理求得 $\angle BAC$ 的值,从而求得 $\angle ABC$ 的值,再利用两角和的正弦公式得到 $\sin\angle ABC$ 的值.

因为 $\sqrt{2}AB=\sqrt{3}BC$, 所以 $\sqrt{2}\sin\angle ACB=\sqrt{3}\sin\angle BAC$,

所以 $\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $BC=\frac{\sqrt{6}}{3}AB<AB$, 故 $\angle BAC<\angle ACB$, 所以 $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$, $\angle ABC=\frac{5\pi}{12}$, …… 4 分

且 $\sin\angle ABC=\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. …… 6 分

第三步:利用正弦定理可求得 BC 的长,从而得到 AB 的长,进而求得周长.

由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，所以$\frac{3+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

则$BC=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}\times\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$，

……8分

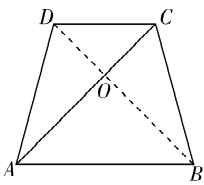
故$AB=\frac{\sqrt{6}}{2}BC=\frac{\sqrt{6}}{2}\times2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$，

所以$\triangle ABC$的周长为$AB+AC+BC=3+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}$. ……10分

(2)第一步：判断四边形$ABCD$的形状.

连接BD，因为$\angle BAC+\angle ACD=\angle ACB+\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle ACD=\frac{\pi}{4}$，$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，

所以$CD/\!/AB$，且$\angle DAB=\angle CBA=\frac{5\pi}{12}$，所以四边形$ABCD$为等腰梯形，……12分



第二步：利用分割法求梯形面积.

所以$\angle BDC=\angle ACD=\frac{\pi}{4}$，$BD=AC=3+\sqrt{3}$，

又因为$\angle ACD+\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，所以$BD\perp AC$，设$AC\cap BD=O$，

所以四边形$ABCD$的面积$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot(OA+OC)=\frac{1}{2}BD\cdot AC=\frac{1}{2}\times(3+\sqrt{3})^2=6+3\sqrt{3}$. ……15分

专题2 ▸ 数列

题型1　等差数列与等比数列的判定

1. (1)【解】分析：根据数列前n项和S_n与a_n的关系式，通过代入不同的n的值来求解数列的首项a_1和第二项a_2.

当$n=1$时，$S_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$，整理得$a_1^2=1$，又$a_1>0$，

$\therefore a_1=1$. ……2分

当$n=2$时，$S_2=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)$，即$a_1+a_2=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)$，解得$a_2=-1\pm\sqrt{2}$，又$a_2>0$，$\therefore a_2=\sqrt{2}-1$. ……4分

(2)【证明】分析：依据S_n与S_{n-1}的关系，通过作差、变形等操作，推导出数列$\left\{a_n^2+\frac{1}{a_n^2}\right\}$的性质.

$\because S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，$\therefore S_{n-1}=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)(n\geqslant2)$，

两式相减，得$S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)(n\geqslant2)$，

……6分

$\therefore a_n-\frac{1}{a_n}=-a_{n-1}-\frac{1}{a_{n-1}}$，$\therefore\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)^2=\left(-a_{n-1}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)^2$，

$\therefore a_n^2+\frac{1}{a_n^2}=a_{n-1}^2+\frac{1}{a_{n-1}^2}+4(n\geqslant 2)$,

$\therefore$ 数列$\left\{a_n^2+\frac{1}{a_n^2}\right\}$为等差数列,首项为 2,公差为 4. …… 10 分

(3)【解】第一步:根据已知条件通过完全平方公式变形得到$a_n+\frac{1}{a_n}$的表达式.

由(2)得 $a_n^2+\frac{1}{a_n^2}=4n-2$, …… 11 分

$\therefore\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2=4n$,$\because a_n>0$,$\therefore a_n+\frac{1}{a_n}=2\sqrt{n}$.

第二步:通过一元二次方程求根公式求出 a_n 的表达式.

$\therefore a_n^2-2\sqrt{n}a_n+1=0$,解得 $a_n=\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}$,

$\because a_n-\frac{1}{a_n}=-a_{n-1}-\frac{1}{a_{n-1}}<0(n\geqslant 2)$,

$\therefore a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 13 分

第三步:根据数列的特点并项求和.

$\therefore S_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}=(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=\sqrt{100}-\sqrt{0}=10$. …… 15 分

2.【解】(1)第一步:令 $n=1$,求首项.

当 $n=1$ 时,可得 $a_1=2a_1-3$,解得 $a_1=3$. …… 1 分

第二步:当 $n\geqslant 2$ 时,利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 得到关于 a_n 的递推式.

当 $n\geqslant 2$ 时,可得 $a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-n-2)-[2a_{n-1}-(n-1)-2]=2a_n-2a_{n-1}-1$,整理得 $a_n=2a_{n-1}+1$. …… 3 分

第三步:利用构造法求 a_n 的通项公式.

即 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$,所以$\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=2(n\geqslant 2)$,又 $a_1+1=4\neq 0$,所以数列$\{a_n+1\}$是首项为 4,公比为 2 的等比数列,则 $a_n+1=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n+1}-1$.

…… 5 分

(2)第一步:利用错位相减法求数列部分项的和.

由(1)知 $a_n=2^{n+1}-1$,则 $b_n=na_n=n(2^{n+1}-1)=n\cdot 2^{n+1}-n$.

设 $T_n'=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$,

则 $2T_n'=1\times 2^3+2\times 2^4+3\times 2^5+\cdots+(n-1)\times 2^{n+1}+n\times 2^{n+2}$,

两式相减可得$-T_n'=1\times 2^2+(2^3+2^4+\cdots+2^n+2^{n+1})-n\times 2^{n+2}=4+\frac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2}-n\cdot 2^{n+2}=-4+(1-n)\cdot 2^{n+2}$,

所以 $T_n'=4+(n-1)\cdot 2^{n+2}$. …… 7 分

第二步:分组求和.

又 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以 $T_n=T_n'-\frac{n(n+1)}{2}=(n-1)\cdot 2^{n+2}-\frac{n(n+1)}{2}+4$. …… 9 分

(3)第一步:由 m,r,k 成等差数列,得关系式.

由题意,正整数 m,r,k 成等差数列,则 $2r=m+k$(提示:等差中项的性质).

第二步:假设 a_m,a_r,a_k 能构成等比数列,得关系式,再结合 $2r=m+k$ 整理.

若 a_m,a_r,a_k 能构成等比数列,则满足$(a_r)^2=a_m\cdot a_k$,

因为 $a_n=2^{n+1}-1$,所以$(2^{r+1}-1)^2=(2^{m+1}-1)\cdot(2^{k+1}-1)$,

整理得 $2^{2r+2}-2^{r+2}+1=2^{m+k+2}-2^{m+1}-2^{k+1}+1$,

即 $2^{2r+2}-2^{r+2}=2^{m+k+2}-2^{m+1}-2^{k+1}$,

由 $2r=m+k$，可得 $2^{2r}=2^{m+k}$，所以 $2^{r+1}=2^m+2^k$，

即 $2\cdot 2^r=2^m+2^k$，两边同时除以 2^m，可得 $2\cdot 2^{r-m}=2^{k-m}+1$.

…… 12 分

第三步：结合奇偶关系推出结论.

因为 $m<r<k$，且 $m,r,k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k-m\in\mathbf{N}^*$，$r-m\in\mathbf{N}^*$，

所以 2^{k-m} 与 2^{r-m} 均为偶数，则 $2^{k-m}+1$ 为奇数，$2\cdot 2^{r-m}$ 为偶数，所以等式 $2\cdot 2^{r-m}=2^{k-m}+1$ 不成立，所以 a_m,a_r,a_k 不能构成等比数列. …… 15 分

题型 2　数列求通项与数列求和

1. (1)【解】分析：先求出数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的通项公式，再累加求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式即可.

由题知 $a_{n+1}-a_n=a_2-a_1+(n-1)\times 4=4n$，…… 2 分

所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+4+8+\cdots+4(n-1)=2n^2-2n+1\ (n\geqslant 2)$，

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 也满足上式，

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n^2-2n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$. …… 5 分

(2)【证明】第一步：放缩数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$.

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n^2-2n+1}<\frac{1}{2}\times\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\ (n\geqslant 2),$$

…… 8 分

第二步：证明 $\dfrac{1}{a_1}<\dfrac{3}{2}$.

当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{a_1}=1<\dfrac{3}{2}$，…… 10 分

第三步：利用裂项相消法求和即可得证.

当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n}<\dfrac{3}{2}$.

综上所述，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$. …… 13 分

2.【解】(1) 分析：由题意，先求首项 a_1，进而得 a_n.

由题意有 $S_2=2a_1+2$，$S_3=3a_1+6$，又因为 S_1+1，S_2，S_3+1 成等比数列，所以 $S_2^2=(S_1+1)(S_3+1)$（提示：等比中项的性质），

即 $(2a_1+2)^2=(a_1+1)(3a_1+7)$，…… 2 分

化简整理得 $a_1^2-2a_1-3=0$，解得 $a_1=3$ 或 $a_1=-1$（舍），所以 $a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$. …… 4 分

(2) 分析：由(1)先求 S_n，进而得 $\dfrac{1}{S_n}$，最后分组求和即可求解.

由(1)有 $S_n=\dfrac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2)$，所以 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

…… 7 分

所以 $T_{10}=b_1+b_3+\cdots+b_9+(b_2+b_4+\cdots+b_{10})=a_1+a_3+\cdots+a_9+\left(\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_4}+\cdots+\dfrac{1}{S_{10}}\right)=3+7+\cdots+2\times 9+1+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{5\times(3+2\times 9+1)}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}\right)=55+\dfrac{5}{24}=\dfrac{1\,325}{24}$.

…… 13 分

解题模板　分奇偶项的数列三步速解

(1)拆分奇偶项:将各项按下标 n 分为奇数项与偶数项两组,单独分析各组递推关系、公差或公比.

(2)求各组通项:奇数项、偶数项分别应用数列求通项的方法,写出对应的表达式.

(3)合并:整理成分段形式;求和时奇数项的和、偶数项的和分开计算再合并.

3.【解】(1)第一步:由一元二次方程中根与系数的关系 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ 得到关于 a_n 的递推式.

因为 $-a_n,a_{n+1}$ 是关于 x 的方程 $x^2-2x-b_n=0$ 的两个根,所以 $a_{n+1}-a_n=2$. ····· 2分

第二步:判断出 $\{a_n\}$ 为等差数列,进而求通项.

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公差为 2 的等差数列.

因此 $a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$. ····· 5分

(2)第一步:$-b_n$ 即一元二次方程中的 c,可利用 $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 得到 b_n.

由(1)知 $a_n=2n-1$,对于方程 $x^2-2x-b_n=0$,

由一元二次方程根与系数的关系,得 $a_na_{n+1}=b_n$,即 $b_n=(2n-1)(2n+1)$. ····· 7分

第二步:写出 c_n,分为两部分求和,含有 $(-1)^n$ 的部分利用并项求和法求和.

所以 $c_n=\frac{2}{b_n}+(-1)^na_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}+(-1)^n\cdot(2n-1)=$

$(-1)^n\cdot(2n-1)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, ····· 9分

所以 $S_{21}=(-1+3)+(-5+7)+\cdots+(-37+39)-41+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{41}-\frac{1}{43}\right)=2\times10-41+\left(1-\frac{1}{43}\right)=$

$-\frac{861}{43}$. ····· 13分

4.【解】(1)分析:根据 S_n 的表达式求 $\{a_n\}$ 的通项公式,再利用函数性质及倒序相加法求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

由题意,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2^{1+2}-4=4$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+2}-4-2^{n+1}+4=2^{n+1}$, ····· 2分

∵ 当 $n=1$ 时,$a_1=4$ 也满足上式,

∴ $a_n=2^{n+1}$,$n\in\mathbf{N}^*$. ····· 4分

由题得 $f(x)+f(1-x)=1$,

对于数列 $\{b_n\}$,由 $b_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$,①

可得 $b_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)$,②

①②两式相加,

可得 $2b_n=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+[f(1)+f(0)]=1+1+\cdots+1=1\times(n+1)=$

$n+1$,则 $b_n=\frac{n+1}{2}$,$n\in\mathbf{N}^*$. ····· 7分

(2)分析:先得出 $\{c_n\}$ 的通项公式,再用错位相减法求前 n 项和 T_n.

由(1)可得 $c_n=a_n\cdot b_n=2^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2}=(n+1)\cdot2^n$, ····· 9分

则 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=2\cdot2^1+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n$，

$2T_n=2\cdot2^2+3\cdot2^3+4\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^n+(n+1)\cdot2^{n+1}$，

两式相减可得 $-T_n=2\cdot2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$，……11分

$\therefore T_n=n\cdot2^{n+1}$.……13分

5.【解】(1)分析：将 $n=1$，$n=2$ 依次代入即可求解.

已知对任意正整数 n，有 $(2n-1)a_1+(2n-3)a_2+\cdots+3a_{n-1}+a_n=n$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$.……1分

当 $n=2$ 时，$3a_1+a_2=2$，则 $a_2=-1$.……3分

(2)分析：根据已知的等量关系，利用作差法得 a_n 与 a_{n+1} 的关系，结合等比数列的定义可求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

由题可知，当 $n\geqslant2$ 时，有

$$\begin{cases}(2n-1)a_1+(2n-3)a_2+\cdots+3a_{n-1}+a_n=n①,\\(2n-3)a_1+(2n-5)a_2+\cdots+a_{n-1}=n-1②,\end{cases}$$

①-②得，$2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+a_n=1$③，将 n 替换为 $n+1$ 得，$2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_{n+1}=1$④，……5分

④-③得，$2a_n+a_{n+1}-a_n=0$，即 $a_{n+1}=-a_n$，结合 $a_1=1$，$a_2=-1=-a_1$ 可得数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 -1 的等比数列，故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-1)^{n-1}$.……8分

(3)分析：由题意写出 T_n 的表达式，利用错位相减法求 T_n.

已知 $b_n=na_n\cdot2^n=n\cdot(-1)^{n-1}\cdot2^n=2n\cdot(-2)^{n-1}$，

则 $T_n=2\sum_{k=1}^{n}[k\cdot(-2)^{k-1}]$.……10分

令 $S_n=\frac{1}{2}T_n$，则 $S_n=1\cdot(-2)^0+2\cdot(-2)^1+3\cdot(-2)^2+\cdots+n\cdot(-2)^{n-1}$，$-2S_n=1\cdot(-2)^1+2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)^3+\cdots+n\cdot(-2)^n$，两式相减得，$3S_n=(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\cdot(-2)^n=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n\cdot(-2)^n=\frac{1-(3n+1)(-2)^n}{3}$，

……13分

故 $S_n=\frac{1-(3n+1)(-2)^n}{9}$，从而 $T_n=2S_n=\frac{2[1-(3n+1)(-2)^n]}{9}$.

……15分

6.(1)**【证明】**分析：化简已知条件，根据等比数列的定义证明.

已知 $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{n+2}-3a_{n+1}=6a_{n+1}-9a_n-3a_{n+1}=3a_{n+1}-9a_n=3(a_{n+1}-3a_n)$.……2分

又 $a_1=3$，$a_2=18$，所以 $a_2-3a_1=9\neq0$.……4分

所以数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 是以 9 为首项，3 为公比的等比数列.

……5分

(2)**【解】**分析：利用构造法求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

由(1)知 $a_{n+1}-3a_n=9\times3^{n-1}=3^{n+1}$，等号两边同时除以 3^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=1$.……6分

设 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则 $b_1=\frac{a_1}{3^1}=\frac{3}{3}=1$，且 $b_{n+1}-b_n=1$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，……8分

所以 $b_n=1+(n-1)\times1=n$，

因为 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，所以 $a_n=n\cdot3^n$.……10分

(3)**【证明】**第一步：利用裂项相消法求得 S_n，进而得到 c_n.

由(2)知 $a_n=n\cdot3^n$，则 $\frac{2a_n+3^{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{2n\cdot3^n+3^{n+1}}{n\cdot3^n\cdot(n+1)\cdot3^{n+1}}=$

$$\frac{2n+3}{n(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{3(n+1)-n}{n(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 3^{n}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}.$$

$$S_n=\left(\frac{1}{1\times 3^1}-\frac{1}{2\times 3^2}\right)+\left(\frac{1}{2\times 3^2}-\frac{1}{3\times 3^3}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n\times 3^n}-\frac{1}{(n+1)\times 3^{n+1}}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{(n+1)\times 3^{n+1}}.$$ ……12分

所以 $c_n=(n+1)\left(\frac{1}{3}-S_n\right)=(n+1)\times\frac{1}{(n+1)\times 3^{n+1}}=\frac{1}{3^{n+1}}$.

……13分

第二步：利用反证法证得数列$\{c_n\}$中任意不同的三项都不能构成等差数列.

假设数列$\{c_n\}$中存在不同的三项 $c_p,c_q,c_r(p<q<r,p,q,r\in\mathbf{N}^*)$构成等差数列，则 $2c_q=c_p+c_r$，即$\frac{2}{3^{q+1}}=\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{3^{r+1}}$，等号两边同时乘 3^{r+1} 得 $2\times 3^{r-q}=3^{r-p}+1$. ……15分

因为 $p<q<r,p,q,r\in\mathbf{N}^*$，所以 $r-q\geqslant 1,r-p\geqslant 2$，则 $2\times 3^{r-q}$ 是 3 的倍数，$3^{r-p}+1$ 除以 3 余 1，等式不成立.

所以假设不成立，即数列$\{c_n\}$中任意不同的三项都不能构成等差数列. ……17分

题型3　数列与不等式的证明问题

1. (1)【解】第一步：当 $n\geqslant 2$ 时，利用公式 $S_n-S_{n-1}=a_n$，得到关于数列$\{a_n\}$的递推关系式.

∵ $3na_{n+1}-6S_n=n(n+1)(n+2)$，①

∴ 当 $n\geqslant 2$ 时，$3(n-1)a_n-6S_{n-1}=(n-1)n(n+1)$，②

①−②得 $na_{n+1}-(n+1)a_n=n(n+1)$， ……3分

第二步：通过构造证明数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是等差数列，进而求数列$\{a_n\}$的通项公式.

等号两边同时除以 $n(n+1)$，得$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1(n\geqslant 2)$. …4分

当 $n=1$ 时，$3a_2-6S_1=3a_2-6a_1=1\times 2\times 3=6$.

∵ $a_1=1$，∴ $3a_2-6=6$，解得 $a_2=4$，

此时$\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=1$，也满足$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$，

∴ 数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是以$\frac{a_1}{1}=1$为首项，1 为公差的等差数列，

∴ $\frac{a_n}{n}=1+(n-1)\cdot 1=n$，即 $a_n=n^2$. ……8分

(2)【证明】分析：根据(1)的结果，先放缩，再用裂项相消法求和.

当 $n=1$ 时，$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{1}=1<2$， ……9分

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$， ……11分

∴ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$.

综上，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$. ……15分

2. (1)【解】分析：由 S_n,a_n 的关系结合等差数列的定义求解.

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，已知 $4S_n=a_n\cdot a_{n+1}$，

由 $a_2=4$，得 $a_1+d=4$，

当 $n=2$ 时，由 $4S_2=a_2\cdot a_3$，得 $4(a_1+a_2)=4a_3$，

则 $4(a_1+4)=4(a_1+2d)$，解得 $d=2$. …… 2 分

所以 $a_1=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times2=2n$.

…… 4 分

(2)【解】第一步：通过构造等比数列的方法求 b_n.

因为 b_{n+1} 是 b_n 和 b_nb_{n+1} 的等差中项，所以 $2b_{n+1}=b_n+b_nb_{n+1}$，

…… 5 分

又 $b_n>0$，所以 $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{b_n}-1$，则 $\frac{1}{b_{n+1}}-1=2\left(\frac{1}{b_n}-1\right)$，

又 $\frac{1}{b_1}-1=3-1=2\neq0$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{b_n}-1\right\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以 $\frac{1}{b_n}-1=2\times2^{n-1}=2^n$，即 $b_n=\frac{1}{2^n+1}$. …… 7 分

令 $c_n=\left(\frac{1}{b_n}-1\right)a_n$，可知 $c_n=\left(\frac{1}{b_n}-1\right)a_n=2^n\cdot2n=n\cdot2^{n+1}$，

…… 8 分

第二步：利用错位相减法求和.

因为 $T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$，

所以 $2T_n=1\times2^3+2\times2^4+3\times2^5+\cdots+(n-1)\times2^{n+1}+n\times2^{n+2}$，

两式相减得 $-T_n=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n+2^{n+1}-n\cdot2^{n+2}$，

所以 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+2}+4$. …… 10 分

(3)【证明】分析：通过放缩求和即可得证.

由(2)可得 $b_n=\frac{1}{2^n+1}$，由于 $b_n=\frac{1}{1+2^n}\geqslant\frac{1}{2^{n-1}+2^n}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $M_n\geqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. …… 12 分

因为 $b_n=\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $M_1=\frac{1}{3}<\frac{5}{6}$，

当 $n\geqslant2$ 时，$M_n<\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{5}{6}$.

综上，$\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\leqslant M_n<\frac{5}{6}$ 成立. …… 15 分

专题 3 ▸ 立体几何

题型 1　空间角和空间距离问题

1. (1)【证明】分析：利用面面垂直的性质定理即可证明线面垂直.

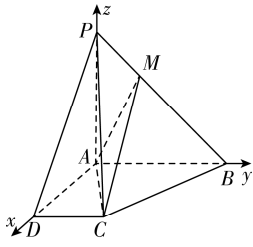
∵ 平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PA\subset$ 平面 PAB，$PA\perp AB$，

∴ 由面面垂直的性质定理，得 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. …… 5 分

(2)【解】分析：以 A 为原点建立空间直角坐标系，利用向量法求两平面夹角的余弦值.

∵ $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，∴ $PA\perp AD$，又 $PA\perp AB$，

$AB\perp AD$，$\therefore PA,AB,AD$ 两两垂直，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系，由题意得 $A(0,0,0)$，$C(2,1,0)$，$B(0,2,0)$，$P(0,0,2)$.



$\because M$ 是棱 PB 上一点，$PB=3PM$，

$\therefore \overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}=\left(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，

可得 $M\left(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. ……8分

由(1)得 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$. ……9分

设平面 ACM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0,\end{cases}$

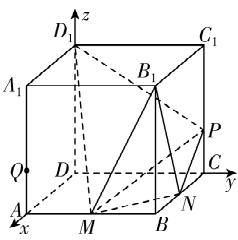
令 $z=1$，解得 $y=-2$，$x=1$，即 $\boldsymbol{n}=(1,-2,1)$. ……11分

设平面 $ABCD$ 与平面 ACM 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\times\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. ……13分

2. (1)【证明】分析：建立空间直角坐标系，用基底法证明四点共面.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，连接 MP，



则 $D_1(0,0,6)$，$M(6,3,0)$，$N(3,6,0)$，$P(0,6,2)$，

则 $\overrightarrow{MN}=(-3,3,0)$，$\overrightarrow{MD_1}=(-6,-3,6)$，$\overrightarrow{MP}=(-6,3,2)$， ……2分

于是 $4\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MD_1}=4(-3,3,0)+(-6,-3,6)=(-18,9,6)=3(-6,3,2)=3\overrightarrow{MP}$，又向量 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MD_1}$ 不共线，

所以向量 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MD_1}$，$\overrightarrow{MP}$ 共面，则 D_1,M,N,P 四点共面.

……5分

(2)【解】分析：求出 Q 点坐标，进而求出 $\overrightarrow{MQ}$ 的坐标，以及平面 MB_1N 的法向量的坐标，通过点到平面的距离公式可得结果.

设 $Q(6,0,t)(0\leqslant t\leqslant 6)$，则 $\overrightarrow{MQ}=(0,-3,t)$，由点 $Q\in$ 平面 D_1MNP，可设 $\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{MN}+\mu\overrightarrow{MD_1}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，

即 $(0,-3,t)=(-3\lambda,3\lambda,0)+(-6\mu,-3\mu,6\mu)=(-3\lambda-6\mu,3\lambda-3\mu,6\mu)$，得 $\begin{cases}-3\lambda-6\mu=0,\\ 3\lambda-3\mu=-3,\\ 6\mu=t,\end{cases}$

解得 $\lambda=-\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{1}{3}$，$t=2$，即 $Q(6,0,2)$， ……8分

所以 $\overrightarrow{MQ}=(0,-3,2)$，而 $B_1(6,6,6)$，则 $\overrightarrow{MB_1}=(0,3,6)$，$\overrightarrow{MN}=(-3,3,0)$，

设平面 MB_1N 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3y+6z=0,\\ -3x+3y=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，则 $y=2,z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$. …… 10 分

设点 Q 到平面 MB_1N 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MQ}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|0+2\times(-3)-1\times2|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{3}$，

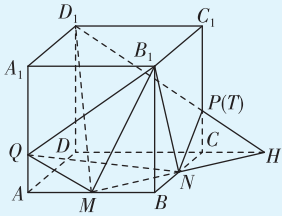
所以点 Q 到平面 MB_1N 的距离为 $\dfrac{8}{3}$. …… 13 分

一题多解 (1) 分析：利用三点构造平面，证明其与棱 CC_1 的交点和未用到的第四点重合，进而可得四点共面.

延长 MN，DC 交于点 H，连接 D_1H 交 CC_1 于点 T，

易知 $\triangle MBN\cong\triangle HCN$，所以 $CH=MB=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}CD$，又 $CT/\!/DD_1$，

所以 $CT=\dfrac{1}{3}DD_1=\dfrac{1}{3}CC_1$，所以 $\overrightarrow{C_1T}=2\overrightarrow{TC}$，所以点 T 与点 P 重合，故 D_1,M,N,P 四点共面. …… 5 分



(2) 分析：求出 Q 点位置，利用等体积法，通过转换三棱锥 $N-QMB_1$ 的顶点和底面，借助体积相等建立方程，从而求出点 Q 到平面 MB_1N 的距离.

如图，连接 QB_1，QN，QM，设点 Q 到平面 MB_1N 的距离为 d.

由正解知 $AQ=2,A_1Q=4,B_1M=B_1N=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，$MN=3\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle QMB_1}=S_{\text{正方形}ABB_1A_1}-S_{\triangle AMQ}-S_{\triangle MBB_1}-S_{\triangle B_1A_1Q}=6\times6-\dfrac{1}{2}\times3\times2-\dfrac{1}{2}\times3\times6-\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$， …… 8 分

$S_{\triangle B_1MN}=\dfrac{1}{2}MN\cdot\sqrt{B_1M^2-\left(\dfrac{1}{2}MN\right)^2}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{(3\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{27}{2}$. …… 10 分

由 $V_{N-QMB_1}=V_{Q-MNB_1}$，得 $\dfrac{1}{3}\times BN\times S_{\triangle QMB_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle NMB_1}\times d$，即 $\dfrac{1}{3}\times3\times12=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{27}{2}\times d$，

解得 $d=\dfrac{8}{3}$，故点 Q 到平面 MB_1N 的距离为 $\dfrac{8}{3}$. … 13 分

3. (1)【证明】分析：在正四棱台中，$A_1D_1/\!/EC$，又根据题意得到 $A_1D_1=EC$，所以可构造平行四边形，从而得到线线平行，进而证明线面平行.

连接 D_1C，在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2A_1B_1$，E 是 BC 的中点，则 $A_1D_1/\!/AD/\!/EC$，且 $A_1D_1=EC=\frac{1}{2}AD$，

所以四边形 A_1D_1CE 是平行四边形，所以 $A_1E/\!/D_1C$. …… 3 分

又 $A_1E\not\subset$ 平面 CC_1D_1D，$D_1C\subset$ 平面 CC_1D_1D，所以 $A_1E/\!/$ 平面 CC_1D_1D. …… 5 分

(2)【解】第一步：将正四棱台补形为正四棱锥，由正四棱台外接球表面积求出外接球半径，结合正四棱台的性质确定球心位置，求出正四棱台的高，由相似关系求出正四棱锥的高.

将正四棱台补形为正四棱锥，设正四棱锥的顶点为 P，连接 PE，由正四棱台的性质可知直线 EF 即为直线 EP，连接 AC，BD 交于点 O，连接 A_1C_1，B_1D_1 交于点 O_1，连接 PO.

因为 $AB=2A_1B_1=2\sqrt{2}$，所以 $OA=2$，$O_1A_1=1$.

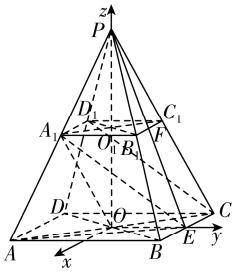
由正四棱台外接球的表面积为 16π，得其半径 $R=2$. …… 7 分

易知正四棱台外接球球心在直线 OO_1 上，又 $OA=R=2$，外接球球心到各顶点的距离相等，所以 O 即为外接球球心，连接 A_1O，棱台高 $OO_1=\sqrt{A_1O^2-A_1O_1^2}=\sqrt{3}$.

由相似关系可得 $OP=2OO_1=2\sqrt{3}$. …… 9 分

第二步：建立空间直角坐标系求出直线的方向向量和平面的法向量，计算出线面角的正弦值.

以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OP}$ 为 y 轴、z 轴的正方向，建立如图①所示的空间直角坐标系.



图①

则 $C(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$D(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，$E(0,\sqrt{2},0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{EP}=(0,-\sqrt{2},2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DC}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2\sqrt{3})$. …… 11 分

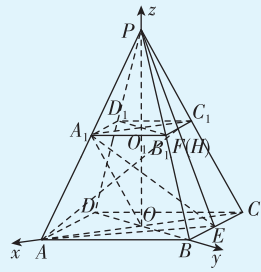
设平面 CC_1D_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=2\sqrt{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{6},0,1)$. …… 13 分

设直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EP}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EP}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{7}$，所以直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{7}$. …… 15 分

一题多解　(1)分析:建立空间直角坐标系,求出直线的方向向量和平面的法向量,利用直线的方向向量与平面的法向量垂直证明线面平行.

连接 AC,BD 交于点 O,连接 A_1C_1,B_1D_1 交于点 O_1,连接 OO_1,OA_1,以 O 为原点,OA,OB,OO_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图②所示的空间直角坐标系.



图②

因为 $AB=2A_1B_1=2\sqrt{2}$,

所以 $OA=2$,$O_1A_1=1$,由正四棱台外接球的表面积为 16π,得其半径为 2,

则 O 为正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球的球心,

所以 $OA_1=2$,在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1O_1O$ 中,$OO_1=\sqrt{OA_1^2-A_1O_1^2}=\sqrt{3}$,

则 $A_1(1,0,\sqrt{3})$,$C(-2,0,0)$,$C_1(-1,0,\sqrt{3})$,$D(0,-2,0)$,$E(-1,1,0)$,

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(-2,1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CC_1}=(1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CD}=(2,-2,0)$. ……3分

设平面 CC_1D_1D 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=x_0+\sqrt{3}z_0=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=2x_0-2y_0=0,\end{cases}$ 不妨令 $x_0=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$.

因为 $\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$,所以 $\overrightarrow{A_1E}\perp\boldsymbol{n}$,

又 $A_1E\not\subset$ 平面 CC_1D_1D,所以 $A_1E/\!/$ 平面 CC_1D_1D. ……5分

(2)**方法一**:分析:先确定 F 点坐标,再结合空间向量求线面角的正弦值.

由(1)得 $A(2,0,0)$,$B_1(0,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{B_1C_1}=(-1,-1,0)$,

$\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AE}=(-3,1,0)$.

设 $\overrightarrow{B_1F}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$,则 $F(-\lambda,1-\lambda,\sqrt{3})$,连接 AF,所以 $\overrightarrow{AF}=(-\lambda-2,1-\lambda,\sqrt{3})$. ……7分

设平面 AA_1E 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AA_1}=-x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=-3x_1+y_1=0,\end{cases}$ 不妨令 $x_1=3$,则 $\boldsymbol{n}_1=(3,9,\sqrt{3})$, ……10分

则由 $\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}_1=-12\lambda+6=0$,得 $\lambda=\frac{1}{2}$,即 $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$. ……12分

设直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角为 θ,由(1)得平面 CC_1D_1D 的法向量 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$,则 $\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{EF}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{7}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{7}$,所以直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{7}$. ……15分

方法二：分析：延长侧棱还原完整棱锥，利用线面相交找到 F 点位置，写出直线的方向向量，结合平面的法向量求得结果.

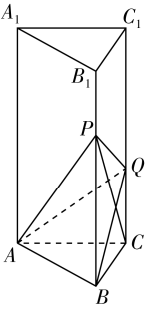
如图②，延长 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 交于点 P，连接 PE 交 B_1C_1 于 H.

因为 $P\in AA_1$，$AA_1\subset$ 平面 AA_1E，所以 $P\in$ 平面 AA_1E，因为 $E\in$ 平面 AA_1E，所以 $PE\subset$ 平面 AA_1E，则点 H 即为平面 AA_1E 与 B_1C_1 的交点 F. …… 9 分

因为 $\triangle PBC$ 为等腰三角形，$\triangle PB_1C_1\backsim\triangle PBC$，$E$ 为 BC 的中点，所以 F 是 B_1C_1 的中点，又 $B_1(0,1,\sqrt{3})$，$C_1(-1,0,\sqrt{3})$，则 $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，得 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$. … 12 分

设直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角为 θ，由(1)得平面 CC_1D_1D 的法向量 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$，则 $\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{EF}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{7}{2}}\times\sqrt{7}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{7}$，所以直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{7}$. …… 15 分

4. (1)【证明】分析：要证明直三棱柱是正三棱柱，只需证明底面 $\triangle ABC$ 是正三角形. 由异面直线所成角的定义，根据勾股定理以及余弦定理，求得三角形边长即可得证.



图①

如图①，连接 BQ，因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp AC$，$CC_1\perp BC$，$AB/\!/A_1B_1$，所以 $\angle QAB$ 就是异面直线 AQ 与 A_1B_1 所成的角. …… 2 分

设 $BC=a$，$AC=b$，则当 Q 运动到 CC_1 的中点时，$AQ=\sqrt{b^2+4}$，$BQ=\sqrt{a^2+4}$，在 $\triangle QAB$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle QAB=\frac{AB^2+AQ^2-BQ^2}{2AB\cdot AQ}=\frac{4+b^2+4-(a^2+4)}{2\times2\times\sqrt{b^2+4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即 $4+b^2-a^2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2+4}$①. …… 4 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{4+b^2-a^2}{2\times2\times b}$②. …… 5 分

联立①②，解得 $a=b=2$，即 $AC=BC=2$，故 $\triangle ABC$ 是正三角形，因此直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱. …… 7 分

(2)【解】第一步：利用勾股定理以及三角形面积公式，求得 CQ，BP 的长.

设 $CQ=m$，$BP=m+n$，$0<m<4$，则 $AP=\sqrt{4+(m+n)^2}$，$AQ=\sqrt{4+m^2}$，$PQ=\sqrt{4+n^2}$.

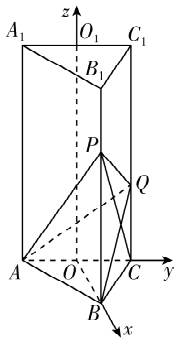
因为 $PQ\perp AQ$，所以 $AP^2=AQ^2+PQ^2$，即 $4+(m+n)^2=4+m^2+4+n^2$，化简得 $mn=2$，则 $n>0$.

因此 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\sqrt{4+m^2}\sqrt{4+n^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+4(m^2+n^2)+m^2n^2}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{20+8mn}=3$，当且仅当 $m=n=\sqrt{2}$ 时等号成立.

因此当 $\triangle APQ$ 面积最小时，$CQ=\sqrt{2}$，$BP=2\sqrt{2}$. …… 10 分

方法一(建系法):

第二步:根据题意建立空间直角坐标系,由平面的法向量求得二面角的大小.



图②

如图②,设 AC 中点为 O,A_1C_1 中点为 O_1,连接 OB,OO_1,以 O 为坐标原点,OB,OC,OO_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0,-1,0)$,$P(\sqrt{3},0,2\sqrt{2})$,$Q(0,1,\sqrt{2})$,$C(0,1,0)$,$\overrightarrow{AP}=(\sqrt{3},1,2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AQ}=(0,2,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CQ}=(0,0,\sqrt{2})$. ····· 11 分

设平面 APQ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1+y_1+2\sqrt{2}z_1=0,\\ 2y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},1,-\sqrt{2})$. ····· 13 分

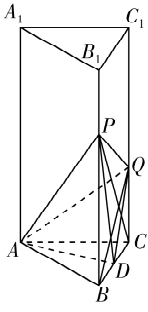
设平面 CPQ 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{CQ}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2-y_2+2\sqrt{2}z_2=0,\\ \sqrt{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},0)$. ····· 15 分

设二面角 $A-PQ-C$ 的平面角为 θ,则当 $\triangle APQ$ 面积最小时,$|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,由图可知,二面角 $A-PQ-C$ 是锐二面角,故二面角 $A-PQ-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$. ····· 17 分

方法二(射影面积法):

第二步:根据二面角定义并结合三角形面积,得出二面角的余弦值后即可得出二面角大小.



图③

如图③,取 BC 的中点 D,连接 AD,PD,QD,由于 $AB=AC$,因此 $AD\perp BC$,

又因为 $AD\perp BB_1$,$BC\cap BB_1=B$,BC,$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1, ····· 12 分

故 $\triangle PQD$ 是 $\triangle PQA$ 在平面 BCC_1B_1 上的射影.

$S_{\triangle DPQ}=S_{梯形BCQP}-S_{\triangle BPD}-S_{\triangle CQD}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\times2-\dfrac{2\sqrt{2}\times1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}\times1}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. ····· 14 分

设二面角 $A-PQ-C$ 的平面角为 θ,则当 $\triangle APQ$ 面积最小时,$|\cos\theta|=\dfrac{S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,由图可知二面角 $A-PQ-C$ 是锐二面角,故二面角 $A-PQ-C$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$. ····· 17 分

方法拓展　利用射影面积法求二面角的大小

若二面角的一个半平面内的多边形面积以及此多边形在另一半平面上的射影面积均可求,则可以利用射影面积公式 $|\cos\theta|=\dfrac{S_{射}}{S_{斜}}$($\theta$ 为二面角的平面角,$S_{斜}$ 为多边形面积,$S_{射}$ 为该多边形的射影面积)求出二面角的大小.

题型2　空间几何体中的翻折问题

1. (1)【证明】分析:要想证明面面垂直,需先证线面垂直.利用线面垂直的判定定理先证 $BE\perp$ 平面 APE,再由面面垂直的判定定理证得平面 $APE\perp$ 平面 $ABCE$.

如图,连接 BE.在矩形 $ABCD$ 中,有 $AD\perp DE$,所以 $AP\perp PE$.

又因为 $AP\perp BP$,$BP\cap PE=P$,BP,$PE\subset$ 平面 BPE,所以 $AP\perp$ 平面 BPE.

因为 $BE\subset$ 平面 BPE,所以 $AP\perp BE$. …… 2分

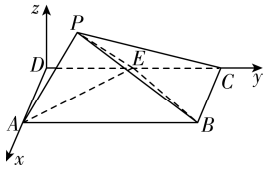
由题意知 $DE=CE=1$,所以 $AE=BE=\sqrt{2}$,

则 $AE^2+BE^2=4=AB^2$,故 $AE\perp BE$.

又因为 $AP\cap AE=A$,AP,$AE\subset$ 平面 APE,所以 $BE\perp$ 平面 APE.

…… 5分

因为 $BE\subset$ 平面 $ABCE$,所以平面 $APE\perp$ 平面 $ABCE$. … 6分



(2)【解】第一步:建立空间直角坐标系,求出相关点和相关向量的坐标.

以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$ 的方向分别为 x,y 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.

由已知可得 $A(1,0,0)$,$B(1,2,0)$,$C(0,2,0)$,$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. …… 9分

第二步:求平面 APB 的法向量.

设平面 APB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y+\sqrt{2}z=0,\\ -x-3y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$. …… 11分

第三步:求直线 PC 与平面 APB 所成角的正弦值,即 $\overrightarrow{PC}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角的余弦值的绝对值.

可得出 $|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,

故直线 PC 与平面 APB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$. …… 15分

2. (1)【解】第一步:由平面 $A_1EFD_1\perp$ 平面 $BEFC$,可得 $D_1F\perp$ 平面 $BEFC$,进而建立空间直角坐标系.

因为平面 $A_1EFD_1\perp$ 平面 $BEFC$,平面 $A_1EFD_1\cap$ 平面 $BEFC=EF$,且 $D_1F\perp EF$,$D_1F\subset$ 平面 A_1EFD_1,所以 $D_1F\perp$ 平面 $BEFC$. …… 2分

又 $EF\perp CF$,故以 F 为原点,FE,FC,FD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图所示.

第二步:设 $BE=a$,由 $BF\perp A_1C$,结合空间向量可得 BE 的长.

设 $BE=a$,易得 $E(\sqrt{6},0,0)$,$F(0,0,0)$,$A_1(\sqrt{6},0,a)$,$B(\sqrt{6},a,0)$,$C(0,a+1,0)$,$D_1(0,0,a+1)$,

则 $\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{6},-a,0)$,$\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{6},a+1,-a)$,

由 $BF\perp A_1C$,得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{A_1C}=6-a(a+1)=0$,解得 $a=-3$(舍去)

或 $a=2$.

所以 $BE=a=2$. …… 5 分

(2)【证明】分析：求出 $\overrightarrow{A_1B}$，$\overrightarrow{D_1C}$ 的坐标，得到 $\overrightarrow{D_1C}//\overrightarrow{A_1B}$，从而证得四点共面.

由(1)知，$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,3,-3)$，则 $\overrightarrow{D_1C}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A_1B}$，

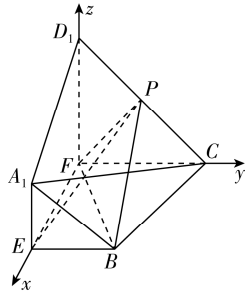
则 $\overrightarrow{D_1C}//\overrightarrow{A_1B}$，即 $D_1C//A_1B$，所以 A_1，B，C，D_1 四点共面.

…… 7 分

(3)【解】第一步：设点 P 坐标，分别表示出平面 A_1BCD_1 与平面 EFP 的法向量，利用垂直关系，求得点 P 坐标.

如图，连接 PF，PE，PB，由(1)知，$\overrightarrow{A_1C}=(-\sqrt{6},3,-2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{6},0,0)$，$\overrightarrow{D_1C}=(0,3,-3)$，

设 $\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1C}=(0,3\lambda,-3\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $P(0,3\lambda,3-3\lambda)$，$\overrightarrow{FP}=(0,3\lambda,3-3\lambda)$.



设平面 A_1BCD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-\sqrt{6}x_1+3y_1-2z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=2y_1-2z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=\sqrt{6}$，得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{6},\sqrt{6})$. …… 9 分

设平面 EFP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-\sqrt{6}x_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FP}=3\lambda y_2+(3-3\lambda)z_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=\lambda$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\lambda-1,\lambda)$. …… 10 分

由平面 $EFP\perp$ 平面 A_1BCD_1，得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{6}(\lambda-1)+\sqrt{6}\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，则 $P\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. …… 11 分

第二步：分别求出平面 BFP 与平面 $BEFC$ 的法向量，进而求解两平面夹角的余弦值.

所以 $\overrightarrow{BP}=\left(-\sqrt{6},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，又 $\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{6},-2,0)$，

设平面 BFP 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(x_3,y_3,z_3)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{6}x_3-\frac{1}{2}y_3+\frac{3}{2}z_3=0,\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BF}=-\sqrt{6}x_3-2y_3=0,\end{cases}$

令 $x_3=2$，得 $\boldsymbol{p}=(2,-\sqrt{6},\sqrt{6})$. …… 13 分

易得平面 $BEFC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{q}=(0,0,1)$，

则 $\cos\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\rangle=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{q}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}\times1}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，则平面 BFP 与平面 $BEFC$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. …… 15 分

题型 3　空间几何体中与球有关的问题

1. (1)【证明】第一步：证明 $AB\perp AD$，$PB\perp AD$.

由题意知四边形 $ABCD$ 存在外接圆，故 $\angle BAD+\angle BCD=\pi$，而 $BC\perp CD$，即 $\angle BCD=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，故 $AB\perp AD$. …… 2 分

由 $PB\perp$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，可得 $PB\perp AD$.

第二步：根据线面垂直的判定定理证明 $AD\perp$ 平面 PAB.

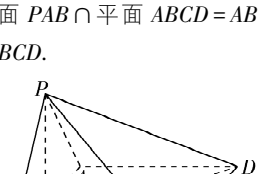
又 $AB\cap PB=B$，$AB\subset$ 平面 PAB，$PB\subset$ 平面 PAB，故 $AD\perp$ 平面 PAB.

第三步：根据面面垂直的判定定理证明平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，故平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$. …… 4分

(2)【解】第一步：过点 P 作 $PH\perp AB$，垂足为 H，根据面面垂直的性质定理证明 $PH\perp$ 平面 $ABCD$.

如图①，过点 P 作 $PH\perp AB$，垂足为 H，由(1)知平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，因为平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PH\subset$ 平面 PAB，所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$.



图①

第二步：结合锥体体积公式可得所求锥体体积 $V=\frac{1}{3}\cdot PH\cdot(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD})$，再分别求 $\triangle ABD$ 的面积，PH 的最大值和 $\triangle BCD$ 的面积的最大值，由此可得结果.

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}PH\cdot S=\frac{1}{3}\cdot PH\cdot(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD})$.

因为 $AB=AD=4$，$AB\perp AD$，所以 $S_{\triangle ABD}=8$. …… 6分

因为 $PB\perp$ 平面 PAD，$PA\subset$ 平面 PAD，所以 $PB\perp PA$，则点 P 在以 AB 为直径的圆上，

当 $PA=PB$ 时，PH 最大，最大值为 $\frac{AB}{2}=2$. …… 8分

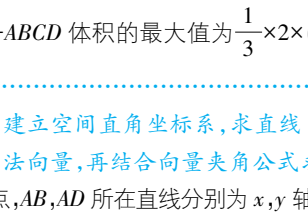
因为 $BC\perp CD$，所以点 C 在以 BD 为直径的圆上，且 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=4\sqrt{2}$，则 $BC^2+CD^2=32$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{BC^2+CD^2}{2}=8$，当且仅当 $BC=CD=4$ 时，等号成立，故 $S_{\triangle BCD}$ 的最大值为 8，此时底面 $ABCD$ 是正方形.

所以四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}\times2\times(8+8)=\frac{32}{3}$.

…… 10分

(3)【解】分析：建立空间直角坐标系，求直线 PC 的方向向量与平面 PBD 的法向量，再结合向量夹角公式求解.

以 A 为坐标原点，AB，AD 所在直线分别为 x，y 轴，过点 A 且与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图②所示.



图②

由(2)可知 $B(4,0,0)$，$D(0,4,0)$，$P(2,0,2)$，$C(4,4,0)$，

所以 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,4,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,4,-2)$.

…… 11分

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=2x-2z=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=-4x+4y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,$

1)为平面 PBD 的一个法向量. …… 13 分

设直线 PC 与平面 PBD 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{PC}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{|2+4-2|}{\sqrt{3}\times\sqrt{4+16+4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. …… 15 分

2. (1)【证明】分析:应用线面垂直的判定定理证明线面垂直,再由线面垂直的性质证明结论.

如图,取 BC 中点 D,连接 PD,DA,

由 $PB=PC,AC=AB$,得 $PD\perp BC,AD\perp BC$,

又 $PD\cap AD=D,PD,AD\subset$ 平面 PAD,

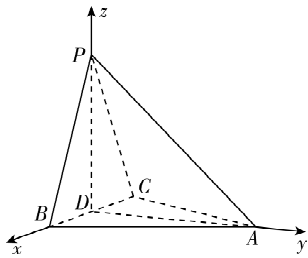
所以 $BC\perp$ 平面 PAD,又 $PA\subset$ 平面 PAD,所以 $BC\perp PA$. … 4 分

(2)【证明】第一步:建立空间直角坐标系,表示出相关点的坐标.

由平面 $PBC\perp$ 平面 ABC,平面 $PBC\cap$ 平面 $ABC=BC$,$PD\perp BC$,$PD\subset$ 平面 PBC,得 $PD\perp$ 平面 ABC.

又 $AD\subset$ 平面 ABC,所以 $PD\perp AD$,又 $PD\perp BC$,$AD\perp BC$,

故可建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(0,1,0)$,$B(1,0,0)$. …… 7 分



第二步:设 $P(0,0,x)$,$x>0$,再应用向量夹角公式得到关于 x 的表达式,即可得证.

设 $P(0,0,x)$ $(x>0)$,则 $\overrightarrow{BA}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,0,-x)$,

易知平面 PCB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$. …… 9 分

设 $\boldsymbol{m}=(e,f,g)$ 为平面 PAB 的一个法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=-e+f=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=e-xg=0,\end{cases}$ 令 $g=1$,则 $\boldsymbol{m}=(x,x,1)$. …… 10 分

故锐二面角 $A-PB-C$ 的平面角的余弦值 $|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, …… 11 分

所以锐二面角 $A-PB-C$ 的平面角大于 $\dfrac{\pi}{4}$. …… 12 分

(3)【解】第一步:根据(2)及棱锥体积公式、等体积法得到 V,r 关于 x 的表达式,从而得到 $\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{V}$ 关于 x 的表达式.

由(2)知 $PD=x$ $(x>0)$,则三棱锥 $P-ABC$ 的表面积 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}=1+x+\dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+\dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}=1+x+\sqrt{2x^2+1}$,

而 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2x=\dfrac{x}{3}$,则 $r=\dfrac{3V}{S}=\dfrac{x}{1+x+\sqrt{2x^2+1}}$,

所以 $\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{V}=2-\dfrac{1}{x}+2\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}$. …… 14 分

第二步:应用换元法及导数研究最值.

令 $t=\dfrac{1}{x}$ $(t>0)$,$f(t)=2-t+2\sqrt{2+t^2}$ $(t>0)$,故 $f'(t)=\dfrac{2t}{\sqrt{2+t^2}}-1$,

当$0<t<\frac{\sqrt{6}}{3}$时，$f'(t)<0$，当$t>\frac{\sqrt{6}}{3}$时，$f'(t)>0$，$f(t)$在$\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$上单调递增，所以$f(t)\geqslant f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=2+\sqrt{6}$.

故$\frac{2}{r}-\frac{1}{V}$的最小值为$2+\sqrt{6}$. …… 17分

题型4　动态探究性问题

1. (1)【证明】分析：利用线面垂直的判定定理，结合等边三角形、等腰三角形的性质和勾股定理的逆定理，证明$PO\perp$平面ABC，再由面面垂直的判定定理完成推导.

已知$\triangle PAC$为边长为2的等边三角形，O为棱AC的中点，所以$PO\perp AC$，且$PO=\sqrt{3}$.

因为$AB=BC=\sqrt{2}$，O为棱AC的中点，所以$BO\perp AC$，且$AC=2$，故$AO=1$，可得$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{2-1}=1$.

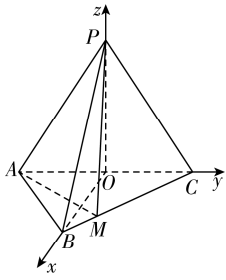
又$PB=2$，则$PO^2+BO^2=3+1=4=PB^2$，故$PO\perp BO$. …… 4分

而$AC\cap BO=O$，AC，$BO\subset$平面ABC，可得$PO\perp$平面ABC.

又$PO\subset$平面POB，所以平面$ABC\perp$平面POB. …… 6分

(2)【解】第一步：建立空间直角坐标系，引入参数表示点M的坐标.

如图，以O为坐标原点，OB所在直线为x轴，OC所在直线为y轴，OP所在直线为z轴建立空间直角坐标系，可得$O(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A(0,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$.



设$\frac{BM}{BC}=\lambda(\lambda\in(0,1))$，则$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-\lambda,\lambda,0)$，所以点$M$的坐标为$(1-\lambda,\lambda,0)$. …… 7分

第二步：求出两个平面的法向量，利用向量夹角公式列方程求参数，结合参数范围得解.

因为$BO\perp AC$，$BO\perp OP$，$AC\cap OP=O$，AC，$OP\subset$平面PAC，

所以$BO\perp$平面PAC，可得平面PAC的一个法向量为$\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$. …… 9分

设平面PAM的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，其中$\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AM}=(1-\lambda,\lambda+1,0)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=y+\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=(1-\lambda)x+(\lambda+1)y=0,\end{cases}$

令$y=\sqrt{3}(1-\lambda)$，则$z=\lambda-1$，$x=-\sqrt{3}(1+\lambda)$，

所以$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3}(1+\lambda),\sqrt{3}(1-\lambda),\lambda-1)$. …… 11分

若平面PAM与平面PAC的夹角为$\frac{\pi}{6}$，

则$\frac{|\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}(1+\lambda)}{\sqrt{7\lambda^2-2\lambda+7}}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$\lambda=\frac{1}{3}$或$\lambda=3$. …… 14分

又因为 $\lambda\in(0,1)$，所以 $\lambda=\frac{1}{3}$，因此存在满足条件的点 M，且 $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$. …… 15分

2. (1)【证明】分析：作辅助线证明四边形 $AFNA_1$ 是平行四边形，可得 $AF//A_1N$，结合直四棱柱内已知条件和平行关系可证.

取 C_1D_1 的中点 N，连接 A_1N，NF.

因为 F 为 CD 的中点，所以 $NF//CC_1$，且 $NF=CC_1$.

又 $AA_1//CC_1$，且 $AA_1=CC_1$，则 $NF//AA_1$，且 $NF=AA_1$，

所以四边形 $AFNA_1$ 是平行四边形，所以 $AF//A_1N$. …… 3分

因为 $C_1M=3MD_1$，则 M 为 ND_1 的中点.

又 E 为 A_1D_1 的中点，则 $EM//A_1N$，所以 $EM//AF$. …… 5分

因为 $AF\subset$ 平面 AB_1F，$EM\not\subset$ 平面 AB_1F，

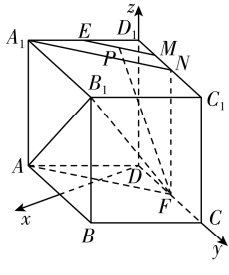
所以 $EM//$ 平面 AB_1F. …… 6分

(2)【解】第一步：由四棱柱体积公式，结合 $\angle BAD$ 为锐角，可求出 $\angle BAD$.

由于直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $32\sqrt{3}$，得 $AA_1\cdot AB\cdot AD\sin\angle BAD=32\sqrt{3}$，则 $\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又由于 $\angle BAD$ 为锐角，得 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$. …… 8分

第二步：建立空间直角坐标系，求出相关点的坐标.

如图，分别以直线 DC，DD_1 为 y，z 轴，建立空间直角坐标系.



则 $E(\sqrt{3},-1,4)$，$M(0,1,4)$，$F(0,2,0)$，$B_1(2\sqrt{3},2,4)$，$A(2\sqrt{3},-2,0)$. …… 10分

第三步：求出相关向量的坐标，设 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{ME}$，表示出 $\overrightarrow{FP}$，求得平面 AB_1F 的一个法向量.

得 $\overrightarrow{ME}=(\sqrt{3},-2,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,4,4)$，$\overrightarrow{AF}=(-2\sqrt{3},4,0)$.

设 $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{ME}=(\sqrt{3}\lambda,-2\lambda,0)$，则 $P(\sqrt{3}\lambda,1-2\lambda,4)$，$\overrightarrow{FP}=(\sqrt{3}\lambda,-2\lambda-1,4)$.

设平面 AB_1F 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，直线 FP 与平面 AB_1F 所成角为 θ，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x+4y=0,\\ 4y+4z=0,\end{cases}$

不妨令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=2$，$z=-\sqrt{3}$，

则平面 AB_1F 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,\sqrt{3},-\sqrt{3})$. …… 12分

第四步：利用向量法求得线面角的正弦值，进而求得直线 FP 与平面 AB_1F 所成角的正弦值最大时 MP 的长.

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{FP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{3\lambda^2+(2\lambda+1)^2+16}}=\frac{\sqrt{30}}{2\sqrt{7\lambda^2+4\lambda+17}}$，当且仅当 $\lambda=-\frac{2}{7}$ 时，$\sin\theta$ 取得最大值，此时

$|\overrightarrow{MP}|=|\lambda|\cdot|\overrightarrow{ME}|=\frac{2}{7}\times\sqrt{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，即 MP 的长为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

…… 15 分

一题多解　(2) 第一步：由四棱柱体积公式，结合 $\angle BAD$ 为锐角，可求 $\angle BAD$.

由于直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $32\sqrt{3}$，得 $AA_1\cdot AB\cdot AD\sin\angle BAD=32\sqrt{3}$，则 $\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又由于 $\angle BAD$ 为锐角，得 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$.　…… 8 分

第二步：由(1)知 $EM/\!/$平面 AB_1F，且点 P 在直线 EM 上，设出参数，表示出直线 FP 与平面 AB_1F 所成角的正弦值.

由(1)知 $EM/\!/$平面 AB_1F，且点 P 在直线 EM 上，所以点 P 到平面 AB_1F 的距离为定值，设该定值为 d，直线 FP 与平面 AB_1F 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{d}{FP}$.　…… 10 分

第三步：找到 FP 最小时点 P 的位置.

当 FP 最小时，$\sin\theta$ 取得最大值.

如图，过 N 作 $NP\perp EM$，交 EM 的延长线于点 P，连接 FP，易知 $NF\perp EM$，$NF\cap NP=N$，NF，$NP\subset$平面 NPF，则 $EM\perp$平面 NPF.

又 $FP\subset$平面 NPF，所以 $FP\perp EM$，此时 FP 最小.　…… 12 分

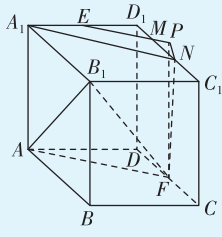
第四步：在 $\triangle EMD_1$ 中，结合余弦定理求 EM，$\cos\angle EMD_1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle NMP$ 中，求 MP.

在 $\triangle EMD_1$ 中，$EM=\sqrt{ED_1^2+MD_1^2-2ED_1\cdot MD_1\cdot\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$，

$\cos\angle EMD_1=\frac{EM^2+MD_1^2-ED_1^2}{2\cdot EM\cdot MD_1}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle NMP$ 中，$MP=MN\cdot\cos\angle NMP=MN\cdot\cos\angle EMD_1=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

故当直线 FP 与平面 AB_1F 所成角的正弦值最大时，$MP=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.　…… 15 分



专题 4 ▸ 概率与统计

题型 1　条件概率与全概率问题

1.【解】(1) 分析：已知杀毒软件发现病毒的概率，和杀毒软件在发现病毒条件下杀毒成功的概率，利用概率的乘法公式即可求得杀毒软件杀毒成功的概率.

记事件 A：该电脑的杀毒软件发现病毒，事件 B：杀毒软件杀毒成功，

则由题意得 $P(A)=0.9, P(B|A)=0.7$， …… 2分

由概率的乘法公式可知杀毒软件杀毒成功的概率为 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.9\times0.7=0.63$. …… 5分

(2) 分析：由题知，病毒使电脑变卡顿，说明杀毒软件发现了病毒，但杀毒未成功，或杀毒软件未发现病毒，可以使用全概率公式求出两种情况概率之和.

记事件 C：病毒使电脑变卡顿，由(1)可知 $P(A)=0.9$，$P(B|A)=0.7$， …… 6分

则 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.9=0.1, P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-0.7=0.3$，

故 $P(A\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B}|A)=0.9\times0.3=0.27$. …… 9分

由题意可知 $P(C|\overline{A})=P(C|A\overline{B})=0.95$，

所以 $P(C)=P(\overline{A})\cdot P(C|\overline{A})+P(A\overline{B})\cdot P(C|A\overline{B})=0.1\times0.95+0.27\times0.95=0.3515$.

故病毒使电脑变卡顿的概率为 0.3515. …… 13分

2. (1)【解】估计这50名乘客的平均等待时间为 $\frac{1}{50}\times(2.5\times20+7.5\times14+12.5\times10+17.5\times6)=7.7(\text{min})$. …… 3分

(2)(i)【证明】第一步：利用对立事件的概率公式表示出 $P(X>t)$.

由题意知，$P(X>t)=1-P(X\leqslant t)=e^{-\frac{t}{10}}$. …… 6分

第二步：利用条件概率公式表示出 $P(X>s+t|X>s)$ 并进行化简，证明等式.

因为 $s,t>0$，所以 $s+t>s$，故 $\{x|x>s+t\}\cap\{x|x>s\}=\{x|x>s+t\}$，

则 $P(X>s+t|X>s)=\frac{P(X>s+t\text{ 且 }X>s)}{P(X>s)}=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\frac{s+t}{10}}}{e^{-\frac{s}{10}}}=e^{-\frac{t}{10}}=P(X>t)$.

所以对于任意的 $s,t>0$，有 $P(X>s+t|X>s)=P(X>t)$.

…… 9分

(ii)【解】分析：分别求出 $0\leqslant Y\leqslant10$ 和 $Y>10$ 两种情况的概率，再利用期望公式求解.

由(i)知，$P(Y>10)=P(X>5+10|X>5)=P(X>10)=e^{-1}$，

…… 11分

$P(0\leqslant Y\leqslant10)=1-P(Y>10)=1-e^{-1}$， …… 13分

所以小明交通费用的期望是 $2\times(1-e^{-1})+20\times e^{-1}=\left(2+\frac{18}{e}\right)$ 元.

…… 15分

题型2　分布列、期望与方差

1.【解】(1) 分析：在第一次投篮不同结果下求第二次投篮命中的概率，使用全概率公式求得第二次投篮命中概率.

设事件 $A_i=$“第 i 次投篮命中”，则 $\overline{A_i}=$“第 i 次投篮未命中”.

由题意得，$P(A_1)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{A_1})=\frac{1}{4}$，$P(A_2|A_1)=\frac{4}{5}$，

$P(A_2|\overline{A_1})=\frac{2}{3}$. …… 2分

由全概率公式得，$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{23}{30}$.

所以该运动员第二次投篮命中的概率为$\frac{23}{30}$. …… 5分

(2)分析:确定X的所有可能取值,结合条件概率算出各个取值的概率,再求分布列与数学期望.

易知X的所有可能取值为0,1,2,

$P(X=0)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}$;

$P(X=1)=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{19}{60}$;

$P(X=2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$. …… 8分

X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{19}{60}$	$\frac{3}{5}$

…… 11分

故数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{19}{60}+2\times\frac{3}{5}=\frac{91}{60}$. …… 13分

2.【解】(1)分析:根据中位数的定义确定体重区间,进而可求得中位数的值.

因为5+25=30<50,5+25+40=70>50,所以样本的中位数落在[60,70)内,

又40÷2=20,30+20=50,所以估计样本的中位数为$\frac{60+70}{2}$=65(kg). …… 3分

(2)(i)分析:首先确定按比例分配的分层随机抽样的比例及两个区间内抽取的学生人数,然后确定X的可能取值,并计算相应的概率,列出分布列,计算出期望.

样本中[60,70)和[70,80)的人数比为40∶20=2∶1,则按比例分配的分层随机抽样的方法抽取的6名学生中,在[60,70)内和[70,80)内的人数分别为$6\times\frac{2}{2+1}=4$和$6\times\frac{1}{2+1}=2$,

…… 5分

故从这6人中随机抽取3人,x的可能取值为3,2,1,对应的y的取值为0,1,2,所以X的可能取值为3,1,-1,

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,$P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$,$P(X=-1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$, …… 8分

故X的分布列为

X	3	1	-1
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

期望$E(X)=3\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+(-1)\times\frac{1}{5}=1$. …… 12分

(ii)分析:根据方差的性质公式求出$D(2X+1)$的值.

由(i)知$D(X)=(3-1)^2\times\frac{1}{5}+(1-1)^2\times\frac{3}{5}+(-1-1)^2\times\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$,所以$D(2X+1)=4D(X)=\frac{32}{5}$. …… 15分

3.【解】(1)分析:根据正态分布的性质求解.

由题意，$\xi\sim N(500,2.5^2)$，$|\xi-500|\geqslant 5$ 的概率等于 $P(|\xi-500|\geqslant 5)$. …… 1分

令 $Y=\dfrac{\xi-500}{2.5}$，则 $Y\sim N(0,1)$. …… 2分

因此，$P(|\xi-500|\geqslant 5)=P(|Y|\geqslant 2)=2[1-\Phi(2)]\approx 0.0456$. …… 4分

故其净含量误差不小于 5 g 的概率约为 0.046. …… 5分

(2) 分析：计算这 2 包糖果的净含量误差均不小于 5 g 的概率，并用这个概率值的大小下结论.

检测员的判断是合理的. …… 6分

因为如果生产线不出现异常，由(1)可知，随机抽取 2 包检查，其净含量误差不小于 5 g 的概率约为 $0.046\times 0.046=2.116\times 10^{-3}$，为小概率事件，所以有理由认为生产线出现了异常，检测员的判断是合理的(提示：发生的概率很小，因此一旦发生这种情况，就有理由认为生产线出现异常，需要停产检修). …… 9分

(3) 第一步：求任取 1 包糖果，其净含量小于 497.5 g 的概率 p.

由(1)可知，任取 1 包糖果，其净含量小于 497.5 g 的概率 $p=\Phi(-1)=1-\Phi(1)\approx 0.1587$. …… 10分

第二步：X 服从二项分布 $B(3,0.1587)$，求二项分布的分布列和期望.

X 服从二项分布 $B(3,0.1587)$， …… 11分

X 的所有可能取值为 0,1,2,3. …… 12分

$P(X=0)=C_3^0(1-p)^3\approx 0.595$，$P(X=1)=C_3^1p(1-p)^2\approx 0.337$，

$P(X=2)=C_3^2p^2(1-p)\approx 0.064$，$P(X=3)=C_3^3p^3\approx 0.004$，

从而 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.595	0.337	0.064	0.004

…… 14分

因此 $E(X)=3\times 0.1587\approx 0.476$. …… 15分

题型3　成对数据的统计分析

1.【解】(1) 分析：利用题中所给数据计算，求出 $\hat{a}$，$\hat{b}$，从而得到经验回归方程，代入年份预测利润.

由题意可得 $\bar{x}=\dfrac{1}{7}\times(1+2+3+4+5+6+7)=4$，

又 $\bar{y}=4.3$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=134.4$， …… 2分

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{134.4-7\times 4\times 4.3}{28}=0.5$， …… 4分

所以 $\hat{a}=4.3-0.5\times 4=2.3$， …… 6分

则经验回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.3$， …… 7分

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=0.5\times 10+2.3=7.3$，

故预测该新能源车企第 10 年的利润为 7.3 亿元. …… 9分

(2) 分析：根据残差平方和公式求出(1)中经验回归方程的残差平方和，比较大小进行判断.

记(1)中经验回归方程的残差平方和为 Q，

则 $Q=\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-0.5x_i-2.3)^2=0.1^2+0+$

$(-0.2)^2+0.1^2+0+(-0.1)^2+0.1^2=0.08$，…… 12分

因为 $0.08<0.62$，所以(1)中所求的线性经验回归方程拟合效果更好. …… 13分

2.【解】(1)分析：由中位数可以得到其所在区间，根据中位数左侧的矩形面积之和等于0.5列出方程，从而求解 a.

由题知，女员工年龄的样本中位数为38.5，落在[35,40)内，结合题中频率分布直方图可得 $(0.015+a+a)\times5+(38.5-35)\times0.05=0.5$，解得 $a=0.025$. …… 5分

(2)第一步：根据题中频率分布直方图和等高堆积条形图得出相关数据，即可完善列联表.

已知抽取了200名女员工，则有300名男员工，由频率分布直方图可得青年女员工有 $200\times(0.015+0.025+0.025)\times5=65$(名)，

则资深女员工有 $200-65=135$(名)，

由题中等高堆积条形图可得青年男员工有 $300\times0.45=135$(名)，

则资深男员工有 $300-135=165$(名)，依此可填写列联表.

	男	女	合计
资深员工	165	135	300
青年员工	135	65	200
合计	300	200	500

…… 9分

第二步：给出零假设，计算 χ^2，对照附表中的临界值即可判断是否有关联.

零假设为 H_0：样本中员工的年龄构成与性别无关. … 11分

因为 $\chi^2=\dfrac{500\times(165\times65-135\times135)^2}{300\times200\times300\times200}=7.8125<7.879$，…… 13分

所以依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，推断 H_0 成立，即认为样本中员工的年龄构成与性别无关. …… 15分

题型4　概率统计与其他知识的综合问题

1.【解】(1)分析：列出符合要求的所有情况，根据事件的相互独立性和互斥事件的加法公式进行求解.

根据题意，每局比赛甲获胜的概率为 p，各局结果相互独立.

甲3∶0获胜时，概率为 p^3；

甲3∶1获胜时，前3局甲胜2局输1局，第4局甲胜，概率为 $C_3^1p^2(1-p)\cdot p=3p^3(1-p)$. …… 3分

因此甲获得3分的概率 $P=p^3+3p^3(1-p)=4p^3-3p^4$. … 4分

(2)分析：先确定随机变量的所有可能取值，再分别计算每个取值的概率，列出分布列，最后根据数学期望的公式计算.

甲的总得分 X 的可能取值为0,1,2,3，

由(1)知 $P(X=3)=4\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{27}$；

$X=2$ 对应甲以3∶2获胜，前4局甲胜2局输2局，第5局甲胜，$P(X=2)=C_4^2p^2(1-p)^2\cdot p=6\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{81}$；

$X=1$ 对应乙3∶2获胜，前4局乙胜2局输2局，第5局乙胜，$P(X=1)=C_4^2(1-p)^2p^2\cdot(1-p)=6\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{8}{81}$；

$X=0$ 对应乙3∶0或3∶1获胜，$P(X=0)=1-\dfrac{16}{27}-\dfrac{16}{81}-\dfrac{8}{81}=$

$\frac{1}{9}$. …… 8分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{27}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{8}{81}+2\times\frac{16}{81}+3\times\frac{16}{27}=\frac{184}{81}$.

…… 10分

(3)分析:先求出 $U(p)$ 的表达式,再利用基本不等式求得最大值.

由题意得,$U(p)=6p^2(1-p)^3+6p^3(1-p)^2=6p^2(1-p)^2(1-p+p)=6p^2(1-p)^2$. …… 12分

由基本不等式得 $p(1-p)\leqslant\left(\frac{p+1-p}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $p=1-p$,即 $p=\frac{1}{2}$ 时取等号.

因此 $U(p)=6[p(1-p)]^2\leqslant6\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8}$,即 $U(p)$ 的最大值为 $\frac{3}{8}$. …… 15分

2.【解】(1)分析:根据相互独立事件的乘法公式与互斥事件的加法公式即可求解.

由题意得,$P(A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$,$P(A_4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$. …… 3分

(2)第一步:将事件 A_n 的发生分解成两步,分别表示出两步的概率,再表示出事件 A_n 发生的概率.

事件 A_n 发生首先要第 $k(2\leqslant k\leqslant n-1)$ 次考试后恰好通过第2级考试,概率为 $\frac{k-1}{2^k}$;

其次要第 $(k+1)$ 次至 $(n-1)$ 次参加第3级考试没有通过,第 n 次通过,概率为 $\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}$.

由分步乘法计数原理和互斥事件的概率加法公式得,$P(A_n)=\sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{k-1}{2^k}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)\left(\frac{3}{4}\right)^k$. …… 6分

第二步:设 $S=\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)\left(\frac{3}{4}\right)^k$,利用错位相减法进行求解,从而求得 $P(A_n)$.

设 $S=\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)\left(\frac{3}{4}\right)^k=\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+(n-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$,则 $\frac{3}{4}S=\left(\frac{3}{4}\right)^3+2\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$,

两式相减得,$\frac{1}{4}S=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-(n-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{9}{16}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}}{1-\frac{3}{4}}-(n-2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{9}{4}-(n+2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$,

所以 $S=9-4(n+2)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$，所以 $P(A_n)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-(n+2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n\geqslant 3)$. …… 10 分

(3) 第一步：由题意表示出 $P(B_n)$，$P(B_n|A_{n+1})$ 与 $P(A_{n+1}|B_n)$.

依题意，$P(B_n)=\frac{n-1}{2^n}$，$P(B_n|A_{n+1})=\frac{P(B_nA_{n+1})}{P(A_{n+1})}$，$P(A_{n+1}|B_n)=\frac{P(B_nA_{n+1})}{P(B_n)}$. …… 12 分

第二步：作差法表示出 $P(A_{n+1})-P(B_n)$，构造数列，得出 $P(A_{n+1})$ 与 $P(B_n)$ 的大小关系，进而得出 $P(B_n|A_{n+1})$ 与 $P(A_{n+1}|B_n)$ 的大小关系.

$P(A_{n+1})-P(B_n)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n-2n-2\right]$. …… 14 分

令 $T_n=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n-2n-2$，则 $T_{n+1}-T_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n-2$.

因为 $n\geqslant 3$，所以 $T_{n+1}-T_n>0$，故数列 $\{T_n\}$ 在 $n\geqslant 3$ 时为递增数列.

又 $T_4=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^4-10<0$，$T_5=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^5-12>0$，故当 $n=3,4$ 时，$P(A_{n+1})-P(B_n)<0$，得 $P(B_n|A_{n+1})>P(A_{n+1}|B_n)$；当 $n\geqslant 5$ 时，$P(A_{n+1})-P(B_n)>0$，得 $P(B_n|A_{n+1})<P(A_{n+1}|B_n)$.

…… 17 分

3. 【解】(1)(i) 分析：由题设结合数据直接计算即可.

由题知该批次产品合格率 $P=\frac{20-2}{20}=0.9$. …… 2 分

(ii) 第一步：根据似然函数定义写出似然函数 $L_1(p)$.

由题意得似然函数 $L_1(p)=p^{18}(1-p)^2(0<p<1)$，

第二步：利用导数求出 p 的最大似然估计值.

$L_1'(p)=p^{17}(p-1)(20p-18)$， …… 4 分

当 $p\in(0,0.9)$ 时，$L_1'(p)>0$，$L_1(p)$ 单调递增，当 $p\in(0.9,1)$ 时，$L_1'(p)<0$，$L_1(p)$ 单调递减，

则当 $p=0.9$ 时，$L_1(p)$ 取得最大值，即 p 的最大似然估计值为 0.9，与(i)中的估计值相等. …… 6 分

(2) 第一步：由题设得到似然函数 $L_2(x)$.

由题设得似然函数 $L_2(x)=(x^2)^{n_1}[2x(1-x)]^{n_2}[(1-x)^2]^{n_3}=2^{n_2}x^{2n_1+n_2}\cdot(1-x)^{2n_3+n_2}$， …… 8 分

第二步：利用取对数再求导求出 x 的最大似然估计值.

令 $f(x)=\ln L_2(x)=(2n_1+n_2)\ln x+(2n_3+n_2)\ln(1-x)+n_2\ln 2(0<x<1)$，则 $f'(x)=\frac{2n_1+n_2}{x}-\frac{2n_3+n_2}{1-x}=\frac{2n_1+n_2-x(2n_1+2n_2+2n_3)}{x(1-x)}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{2n_1+n_2}{2n}$，令 $\hat{x}=\frac{2n_1+n_2}{2n}$，易知 $f'(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递减， …… 10 分

则当 $x\in(0,\hat{x})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(\hat{x},1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $L_2(x)$ 在 $(0,\hat{x})$ 上单调递增，在 $(\hat{x},1)$ 上单调递减，

则 $x=\frac{2n_1+n_2}{2n}$ 时，$L_2(x)$ 取得最大值，所以 x 的最大似然估计值为 $\frac{2n_1+n_2}{2n}$. …… 12 分

(3) 第一步：由题设得到似然函数 $L_3(\lambda)$，设 $g(\lambda)=$

$\ln L_3(\lambda)$.

令 $L_3(\lambda)=P(X_1=a_1,X_2=a_2,\cdots,X_n=a_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{a_i}}{a_i!}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i!}e^{-n\lambda}$，$\lambda>0$，

设 $g(\lambda)=\ln L_3(\lambda)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\ln\lambda-n\lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(a_i!)$，$\lambda>0$.

第二步：利用导数判断 $g(\lambda)$ 的单调性.

则 $g'(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-n$ 为减函数，令 $g'(\lambda)=0$，得 $\lambda=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}$，

…… 13 分

则当 $0<\lambda<\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}$ 时，$g'(\lambda)>0$，函数 $g(\lambda)$ 单调递增，当 $\lambda>\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}$ 时，$g'(\lambda)<0$，函数 $g(\lambda)$ 单调递减，…… 15 分

第三步：确定 $\ln L_3(\lambda)$ 的最大值点，进行最大似然估计，进而求数列的前 n 项和.

所以 $\lambda=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}$ 为 $g(\lambda)$ 的极大值点，也是最大值点，所以 $\lambda=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}$ 为 $L_3(\lambda)$ 的极大值点，也是最大值点，所以 λ 的最大似然估计值为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}$，则 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}=2$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=S_n=2n$. …… 17 分

专题 5 ▸ 解析几何

题型 1　弦长与面积问题

1. (1)【证明】第一步：由离心率得出 a,b 的关系，代入 C 中并化简.

依题意知，$\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $a=\sqrt{2}b$，C 可化为 $x^2+2y^2-2b^2=0$.

…… 2 分

第二步：设 $P(x_0,y_0)$，表示出 k_1k_2 并化简可得答案.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2=2b^2-2y_0^2$.

因为 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，所以 $k_1k_2=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{2}b}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{2}b}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2b^2}=\dfrac{y_0^2}{2b^2-2y_0^2-2b^2}=-\dfrac{1}{2}$. …… 5 分

(2)【解】分析：设出直线 MN 的方程，与椭圆 C 联立，利用一元二次方程根与系数的关系表示出 $|MN|$，结合点 O 到 MN 的距离，可得 $\triangle OMN$ 的面积，进而可得 a^2，b^2 的值，即可求解.

易知直线 MN 一定不过原点且不垂直于 x 轴，设 $MN:y=kx+t$ $(t\neq0)$，联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\x^2+2y^2-2b^2=0,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2b^2=0$，$\Delta=8(b^2+2k^2b^2-t^2)>0$. …… 7 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2t^2-2b^2}{1+2k^2}$.

…… 9分

因为 $AP//OM, BP//ON$，所以 $k_{OM}\cdot k_{ON}=-\frac{1}{2}$，即 $\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$，

因为 $y_1=kx_1+t, y_2=kx_2+t$，所以 $(1+2k^2)x_1x_2+2kt(x_1+x_2)+2t^2=0$，即 $2t^2-2b^2-2kt\cdot\frac{4kt}{1+2k^2}+2t^2=0$，得 $2t^2=(1+2k^2)b^2$，所以 $\Delta=8t^2>0$. $|MN|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(\frac{-4kt}{1+2k^2}\right)^2-\frac{8t^2-8b^2}{1+2k^2}\right]}=\frac{\sqrt{2}\cdot b^2}{|t|}\sqrt{1+k^2}$. …… 11分

又点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$，…… 12分

所以△OMN 的面积 $S=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{\sqrt{2}}{2}b^2=4$，…… 13分

所以 $b^2=4\sqrt{2}, a^2=8\sqrt{2}$，故 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{8\sqrt{2}}+\frac{y^2}{4\sqrt{2}}=1$.

…… 15分

2.【解】(1) 第一步：设出点 P 的坐标，根据 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 -1，运用向量数量积的坐标运算法则及椭圆的几何性质求得 c.

根据题意可得 $A(-a,0), B(a,0)$，设 $P(x_P,y_P)$，

由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-a-x_P,-y_P)\cdot(a-x_P,-y_P)=x_P^2-a^2+y_P^2=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y_P^2=-\frac{c^2}{b^2}y_P^2$. …… 2分

因为 $y_P^2\leqslant b^2$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\geqslant -c^2$，当 $y_P=\pm b$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值 $-c^2$，所以 $-c^2=-1$，即 $c=1$. …… 4分

第二步：结合椭圆的离心率，求出 a,b 的值，进而可得椭圆 C 的标准方程.

因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

所以 $a=2, b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，…… 6分

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 7分

(2) 第一步：设 $Q\left(\frac{7}{2},y_Q\right)$，根据直线的斜率公式求出直线 BQ 的斜率.

由(1)得 $A(-2,0), B(2,0), P(x_P,y_P)$，设 $Q\left(\frac{7}{2},y_Q\right)$，

根据题意可知直线 BQ 的斜率 k_{BQ} 存在且不为零，且 $k_{BQ}=\frac{y_Q}{\frac{7}{2}-2}=\frac{2}{3}y_Q$. …… 9分

第二步：结合 $BP\perp BQ$，可得直线 BP 的斜率.

因为 $BP\perp BQ$，所以直线 BP 的斜率为 $-\frac{1}{k_{BQ}}=\frac{-3}{2y_Q}$. …… 10分

第三步：根据 $|BP|=|BQ|$，利用弦长公式求得 $|y_P|$ 的值，并代入 C 的方程求得 x_P，进而求出点 P 的坐标.

$|BP|=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}y_Q\right)^2}\cdot|y_P-0|=\sqrt{1+\frac{4}{9}y_Q^2}\cdot|y_P|$,

$|BQ|=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}y_Q\right)^2}\cdot\left|\frac{7}{2}-2\right|=\frac{3}{2}\sqrt{1+\frac{4}{9}y_Q^2}$,

因为$|BP|=|BQ|$，所以$|y_P|=\frac{3}{2}$，代入C的方程，解得$x_P=1$或$x_P=-1$. …… 13分

根据对称性可得点P的坐标为$\left(1,\frac{3}{2}\right)$或$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$或$\left(1,-\frac{3}{2}\right)$或$\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$. …… 15分

3.【解】(1)第一步：设$Q(x,y)$，由已知得$|QF|=|x|+1$，即$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$，化简即可得出点Q的轨迹C的方程.

设$Q(x,y)$，依题意得，$|QF|=|x|+1$，即$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$，化简得$y^2=2|x|+2x$，

所以点Q的轨迹C的方程为$y^2=\begin{cases}4x,x\geqslant 0,\\0,x<0.\end{cases}$ …… 2分

第二步：写出直线l的方程，与C的方程联立，要使得直线l与轨迹C有三个交点，需满足$k\neq 0,\Delta>0$，直线l与x轴交点的横坐标小于0，列出不等式组求解即可.

直线l的方程为$y-1=k(x+2)$，对$x\geqslant 0$的部分，联立$\begin{cases}y-1=k(x+2),\\y^2=4x,\end{cases}$可得$ky^2-4y+4(2k+1)=0,\Delta=-16(2k^2+k-1)$. …… 4分

直线l与轨迹C有三个交点，则$k\neq 0$，设直线l与x轴的交点坐标为$(x_0,0)$，代入$y-1=k(x+2)$，得$x_0=-\frac{2k+1}{k}$.

直线l与轨迹C有三个公共点需满足$\begin{cases}\Delta=-16(2k^2+k-1)>0,\\x_0=-\frac{2k+1}{k}<0,\end{cases}$解得$-1<k<-\frac{1}{2}$或$0<k<\frac{1}{2}$，

故k的取值范围为$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$. …… 7分

(2)分析：设$M\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$N\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$，结合(1)可表示出$y_1,y_2$的关系及点$A,B$的坐标，进而由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=30$，得出$B,M,N$的坐标，即可求解$\triangle BMN$的面积.

由题意知点M,N在第一象限，设$M\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$N\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$，$y_2>y_1>0$，由(1)知$y_1+y_2=\frac{4}{k},y_1y_2=8+\frac{4}{k}$， …… 8分

所以$y_1y_2=8+y_1+y_2$.

由(1)可知$A(x_0,0)$，$-x_0=2+\frac{1}{k}=\frac{y_1y_2}{4}$，故$B\left(\frac{y_1y_2}{4},0\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{y_1y_2}{4}-x_0,0\right)=\left(\frac{y_1y_2}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(-2+\frac{y_1y_2}{4},1\right)$，

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\frac{y_1y_2}{2}\left(\frac{y_1y_2}{4}-2\right)=30$，整理得$y_1^2y_2^2-8y_1y_2-240=0$，

解得$y_1y_2=20$(负值舍去)，

从而$y_1+y_2=12$，故$y_1=2,y_2=10$， …… 12分

则$M(1,2)$，$N(25,10)$，$B(5,0)$，即直线l的方程为$x-3y+5=0$，$|MN|=\sqrt{(1-25)^2+(2-10)^2}=8\sqrt{10}$，

点B到直线l的距离为$\frac{|5+5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$，

所以 $S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}\times|MN|\times\sqrt{10}=\frac{1}{2}\times8\sqrt{10}\times\sqrt{10}=40.$

…… 15 分

4. (1)【解】分析：由焦点到渐近线的距离为$\sqrt{5}$，离心率为$\frac{3}{2}$，可得 a,b,c，进而得到双曲线方程.

设双曲线 E 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

由题设知，双曲线的右焦点 $F(c,0)$ 到双曲线的其中一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=\sqrt{5}$，…… 2 分

由离心率为$\frac{3}{2}$，得$\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$，又 $a^2+b^2=c^2$，所以 $a=2,c=3$，

…… 4 分

故双曲线 E 的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. …… 5 分

(2)【证明】分析：先设出直线 l 的方程，再分别与双曲线方程和渐近线方程联立，求出 A,B,C,D 四点纵坐标的关系，进而由弦长公式进行证明.

由题意可知直线 l 的斜率存在且为负数，设直线 l 的方程为 $x=my+n(m<0,n>2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，$0<y_1<y_2<y_3<y_4$.

由$\begin{cases}x=my+n,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$得$(5m^2-4)y^2+10mny+5n^2-20=0$,

则有 $5m^2-4\neq0$，$\Delta=(10mn)^2-4(5m^2-4)(5n^2-20)=80(5m^2+n^2-4)>0$,

所以 $y_1+y_4=\frac{-10mn}{5m^2-4}>0$，$y_1y_4=\frac{5n^2-20}{5m^2-4}>0$，…… 7 分

结合 $m<0,n>2$，可得 $m<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …… 8 分

由$\begin{cases}x=my+n,\\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}x,\end{cases}$得 $y_2=\frac{\sqrt{5}n}{2-\sqrt{5}m}$，由$\begin{cases}x=my+n,\\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x,\end{cases}$得 $y_3=\frac{-\sqrt{5}n}{2+\sqrt{5}m}$，

所以 $y_2+y_3=\frac{\sqrt{5}n}{2-\sqrt{5}m}+\frac{-\sqrt{5}n}{2+\sqrt{5}m}=\frac{-10mn}{5m^2-4}=y_1+y_4$，所以 $y_2-y_1=y_4-y_3$. …… 10 分

而 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+m^2}|y_2-y_1|$，

同理，$|CD|=\sqrt{1+m^2}|y_4-y_3|$，所以 $|AB|=|CD|$. …… 12 分

(3)【解】$\triangle OPA$，$\triangle OCD$ 的面积之和为定值$\sqrt{5}$. 理由如下：

第一步：由题可得$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_4}=\frac{2}{y_2}$，结合(2)可得 $n^2=4-2\sqrt{5}m$.

因为$\frac{1}{|PA|}$，$\frac{1}{|PB|}$，$\frac{1}{|PD|}$成等差数列，所以$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_4}=\frac{2}{y_2}$，即$\frac{y_1+y_4}{y_1y_4}=\frac{2}{y_2}$，结合(2)可得$\frac{-10mn}{5n^2-20}=\frac{2(2-\sqrt{5}m)}{\sqrt{5}n}$，化简得 $n^2=4-2\sqrt{5}m$，即$\frac{n^2}{2-\sqrt{5}m}=2$. …… 14 分

第二步：由(2)可知 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}$，然后由 $S_{\triangle OPA}+S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OPB}=\frac{1}{2}\cdot|OP|\cdot y_2$ 可得所求面积.

由(2)知 $|AB|=|CD|$，所以 $\triangle OAB$，$\triangle OCD$ 等底等高，所以

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}$，

所以$\triangle OPA$，$\triangle OCD$的面积之和为$S_{\triangle OPA}+S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OPB}=\frac{1}{2}\cdot$

$|OP|\cdot y_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}n^2}{2-\sqrt{5}m}=\sqrt{5}.$ …… 17分

题型2　角度问题

1.【解】(1)分析：由$|F_1F_2|=2c$，求得c，结合离心率求得a，进而求得b^2，得到椭圆方程.

设椭圆C的焦距为$2c$，则$|F_1F_2|=2c=2$，所以$c=1$. … 1分

因为离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$a=2$，则$b^2=a^2-c^2=3$， … 3分

所以C的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 4分

(2)第一步：设$A(x_1,y_1)$，已知$\triangle AF_1F_2$的面积，结合面积公式得到$|y_1|$.

设$A(x_1,y_1)$，则$\triangle AF_1F_2$的面积为$\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_1|=\frac{1}{2}\times2\times$

$|y_1|=\frac{3}{2}$，所以$|y_1|=\frac{3}{2}$. …… 6分

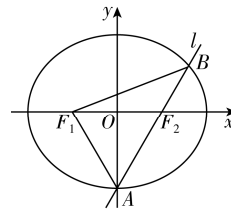
第二步：将$|y_1|$代入椭圆方程求得x_1^2，从而根据向量的坐标运算计算所求数量积.

因为$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，所以$x_1^2=1$， …… 7分

而$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，则$\overrightarrow{AF_1}=(-1-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{AF_2}=(1-$

$x_1,-y_1)$，所以$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=x_1^2-1+y_1^2=\frac{9}{4}$. …… 9分

(3)第一步：由$\frac{|F_2A|}{|F_2B|}=\frac{5}{3}$，设$|F_2A|=5x(x>0)$，根据比例关系与椭圆的定义将$|F_1A|$，$|F_1B|$表示出来.



由$\frac{|F_2A|}{|F_2B|}=\frac{5}{3}$，可设$|F_2A|=5x$，$x>0$，

则$|F_2B|=3x$，$|F_1A|=4-5x$，$|F_1B|=$

$4-3x$. …… 10分

第二步：结合余弦定理及$\cos\angle AF_2F_1=-\cos\angle BF_2F_1$列方程求出$x$.

在$\triangle AF_1F_2$中，$\cos\angle AF_2F_1=\frac{|F_2A|^2+|F_1F_2|^2-|F_1A|^2}{2|F_2A||F_1F_2|}=$

$\frac{(5x)^2+2^2-(4-5x)^2}{2\cdot5x\cdot2}=\frac{40x-12}{20x}$，

在$\triangle BF_1F_2$中，$\cos\angle BF_2F_1=\frac{|F_2B|^2+|F_1F_2|^2-|F_1B|^2}{2|F_2B||F_1F_2|}=$

$\frac{(3x)^2+2^2-(4-3x)^2}{2\cdot3x\cdot2}=\frac{24x-12}{12x}$.

因为$\angle AF_2F_1+\angle BF_2F_1=\pi$，所以$\cos\angle AF_2F_1=-\cos\angle BF_2F_1$，

则$\frac{40x-12}{20x}=-\frac{24x-12}{12x}$，解得$x=\frac{2}{5}$. …… 13分

第三步：由余弦定理求解$\cos\angle AF_1B$.

所以$|F_2A|=|F_1A|=2$，$|F_2B|=\frac{6}{5}$，$|F_1B|=\frac{14}{5}$，则$|AB|=\frac{16}{5}$，

在$\triangle ABF_1$中，$\cos\angle AF_1B=\frac{|F_1A|^2+|F_1B|^2-|AB|^2}{2|F_1A||F_1B|}=$

$$\frac{4+\frac{196}{25}-\frac{256}{25}}{2\times2\times\frac{14}{5}}=\frac{1}{7}.$$ ……15分

一题多解 (3)第一步:设出直线 l 的方程并与椭圆方程联立,得根与系数的关系.

当直线 l 与 x 轴重合时,$|F_2A|=a+c=3$,$|F_2B|=a-c=1$,不满足$\frac{|F_2A|}{|F_2B|}=\frac{5}{3}$.

设直线 $l:x=my+1$(提示:直线 l 不能表示与 x 轴重合或平行的直线),$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\x=my+1,\end{cases}$得

$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,$\Delta>0$,所以 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}<0$. ……11分

第二步:由$\frac{|F_2A|}{|F_2B|}=\frac{5}{3}$求得 m 及 y_1,y_2,得到点 A,B 的坐标.

因为$\frac{|F_2A|}{|F_2B|}=\frac{5}{3}$,所以$\frac{y_1}{y_2}=-\frac{5}{3}$,所以 $y_1=-\frac{5}{3}y_2$,

由$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},\\y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4},\\y_1=-\frac{5}{3}y_2,\end{cases}$ 解得 $m^2=\frac{1}{3}$.

由对称性不妨设 $m>0$,则 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

又 $y_1=-\frac{5}{3}y_2$,解得 $y_1=-\sqrt{3}$,$y_2=\frac{3\sqrt{3}}{5}$,

即 $A(0,-\sqrt{3})$,$B\left(\frac{8}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$. ……13分

第三步:利用向量数量积求出 $\cos\angle AF_1B$.

由 $F_1(-1,0)$,得 $\overrightarrow{F_1A}=(1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{F_1B}=\left(\frac{13}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$,所以

$$\cos\angle AF_1B=\cos\langle\overrightarrow{F_1A},\overrightarrow{F_1B}\rangle=\frac{\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}}{|\overrightarrow{F_1A}|\cdot|\overrightarrow{F_1B}|}=\frac{\frac{13}{5}-\frac{9}{5}}{2\times\frac{14}{5}}=\frac{1}{7}.$$

……15分

2. (1)【解】分析:根据抛物线的定义求出 p 的值,进而得到抛物线方程.

对于抛物线 $y^2=2px(p>0)$,其准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$. ……1分

已知点 $M(1,m)$ 到焦点 F 的距离为 2,根据抛物线的定义,抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离,则 $1+\frac{p}{2}=2$,

解得 $p=2$,

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$. ……4分

(2)(ⅰ)【证明】分析:设出直线 AB 的方程,并与抛物线方程联立得到根与系数的关系,再通过 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的正负并结合两向量不共线判断 $\angle AOB$ 是否为锐角.

设直线 AB 的方程为 $x=ty+6, A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=ty+6,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 化简可得 $y^2-4ty-24=0$，

$\Delta>0, y_1+y_2=4t, y_1y_2=-24.$ …… 6 分

因为 $x_1=\dfrac{y_1^2}{4}, x_2=\dfrac{y_2^2}{4}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2=\dfrac{(-24)^2}{16}-24=12>0$，又 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 显然不共线，所以 $\angle AOB$ 为锐角. …… 9 分

（ⅱ）【解】第一步：设出 Q 点坐标，利用三角形外心性质列方程.

如图，取 OA 的中点 N，连接 NQ.

易知 OA 的中点为 $N\left(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$，即 $N\left(\dfrac{y_1^2}{8},\dfrac{y_1}{2}\right)$，

设 $Q(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{NQ}=\left(x_0-\dfrac{y_1^2}{8},y_0-\dfrac{y_1}{2}\right)$，

由 $OA\perp NQ$ 有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{NQ}=x_1\left(x_0-\dfrac{y_1^2}{8}\right)+y_1\left(y_0-\dfrac{y_1}{2}\right)=0$. … 11 分

第二步：结合抛物线方程以及根与系数的关系对式子进行化简，表示出 x_0.

将 $x_1=\dfrac{y_1^2}{4}$ 代入上式并整理，得 $\dfrac{y_1^3}{8}+(2-x_0)y_1-4y_0=0$（＊）.

同理，由点 B 可得 $\dfrac{y_2^3}{8}+(2-x_0)y_2-4y_0=0$（＊＊），

（＊）−（＊＊），得 $x_0=2+\dfrac{1}{8}(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)$.

$y_1^2+y_1y_2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-y_1y_2=16t^2+24$，则 $x_0=2+2t^2+3=2t^2+5$.

…… 13 分

第三步：分情况讨论，并结合基本不等式求出 k_{OQ} 的最大值.

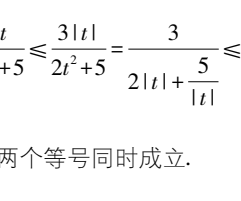
取 AB 的中点 H，连接 QH.

当 $t=0$ 时，易知 $Q(5,0)$，$k_{OQ}=0$；当 $t\neq0$ 时，由 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+12=4t^2+12$，得 AB 的中点为 $H(2t^2+6,2t)$.

又 $QH\perp AB$，即 $k_{QH}\cdot k_{AB}=-1$，得 $\dfrac{y_0-2t}{x_0-(2t^2+6)}\cdot\dfrac{1}{t}=-1$，得 $y_0=3t$. …… 15 分

于是 $k_{OQ}=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{3t}{2t^2+5}\leqslant\dfrac{3|t|}{2t^2+5}=\dfrac{3}{2|t|+\dfrac{5}{|t|}}\leqslant\dfrac{3}{2\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$，当且仅当 $t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 时两个等号同时成立.

综上所述，直线 OQ 的斜率的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$. …… 17 分



题型 3　定点、定值、定直线问题

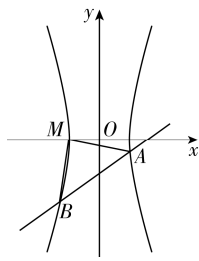
1.（1）【解】分析：根据离心率及 a 的值，求出 b^2 的值，代入双曲线方程即可.

因为实半轴长 $a=1$，$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+b^2}=3$，…… 2 分

所以 $b^2=8$，故 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$. …… 4分

(2)【证明】分析：设出直线 AB 的方程并与双曲线方程联立，得到关于 y 的一元二次方程根与系数的关系，根据 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 进行化简，进而求出定点坐标，注意直线 AB 与 y 轴垂直的情况需单独讨论.

当直线 AB 不与 y 轴垂直时，设直线 AB 的方程为 $x=ty+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.



由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{8}=1,\\ x=ty+n,\end{cases}$ 得 $(8t^2-1)y^2+16nty+8n^2-8=0$，

则 $8t^2-1\neq0$，$\Delta>0$，$y_1+y_2=-\frac{16nt}{8t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{8n^2-8}{8t^2-1}$. …… 7分

又 $M(-1,0)$，则 $\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1)=(ty_1+n+1,y_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2)=(ty_2+n+1,y_2)$，

因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，所以 $(ty_1+n+1)(ty_2+n+1)+y_1y_2=0$，

即 $(t^2+1)y_1y_2+t(n+1)(y_1+y_2)+(n+1)^2=0$，

即 $(t^2+1)\cdot\frac{8n^2-8}{8t^2-1}+t(n+1)\left(-\frac{16tn}{8t^2-1}\right)+(n+1)^2=0$，

即 $(t^2+1)(8n^2-8)-16t^2n(n+1)+(8t^2-1)(n+1)^2=0$，

整理得 $7n^2-2n-9=0$，解得 $n=\frac{9}{7}$ 或 $n=-1$. …… 10分

当 $n=-1$ 时，直线 AB：$x=ty-1$，直线 AB 过点 $M(-1,0)$，不符合题意，舍去；

当 $n=\frac{9}{7}$ 时，直线 AB：$x=ty+\frac{9}{7}$，则直线 AB 过定点 $\left(\frac{9}{7},0\right)$.

当直线 AB 与 y 轴垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=m$.

联立 $\begin{cases}y=m,\\ x^2-\frac{y^2}{8}=1,\end{cases}$ 解得 $x=\pm\sqrt{1+\frac{1}{8}m^2}$，不妨取 $A\left(\sqrt{1+\frac{1}{8}m^2},m\right)$，$B\left(-\sqrt{1+\frac{1}{8}m^2},m\right)$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{8}m^2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{8}m^2}\right)+m^2=\frac{7}{8}m^2=0$，解得 $m=0$，此时点 M 在直线 AB 上，不符合题意，舍去.

综上，直线 AB 过定点 $\left(\frac{9}{7},0\right)$. …… 13分

2. (1)【解】分析：设 $P(x,y)$，代入 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{3}{4}$，化简即可求出曲线 C 的方程.

设 $P(x,y)$ 为曲线 C 上异于 A，B 的任意一点，

因为 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{3}{4}$，所以 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{3}{4}(x\neq\pm2)$，

…… 2分

所以 $\frac{y^2}{x^2-4}=-\frac{3}{4}$，即 $3x^2+4y^2=12$，所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$.

又 $A(-2,0)$，$B(2,0)$ 皆为曲线 C 上的点，所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 5分

(2)【证明】第一步：设出直线 l 的方程，$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，联立直线方程与椭圆方程，消元得到关于 y 的一元二次方程，由根与系数的关系得到 y_1+y_2，y_1y_2 间的关系式.

由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0，可设直线 l 的方程为

$x=ty+4$，$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=ty+4,\end{cases}$得$(3t^2+4)y^2+24ty+36=0$，

$\Delta=144t^2-576>0$，$y_1+y_2=-\dfrac{24t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{36}{3t^2+4}$，…… 8分

所以$\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-\dfrac{2t}{3}$，即$3(y_1+y_2)=-2ty_1y_2$，①　…… 11分

第二步：利用斜率公式得到斜率和，再结合y_1+y_2与y_1y_2的关系式，化简运算即可.

因为焦点$F(1,0)$，所以$k_{FD}=\dfrac{y_1}{x_1-1}$，$k_{FE}=\dfrac{y_2}{x_2-1}$，即$k_{FD}+k_{FE}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{y_1}{ty_1+3}+\dfrac{y_2}{ty_2+3}=\dfrac{2ty_1y_2+3(y_1+y_2)}{t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9}$，②

…… 13分

将①式代入②式，得$k_{FD}+k_{FE}=\dfrac{2ty_1y_2-2ty_1y_2}{t^2y_1y_2-2t^2y_1y_2+9}=0$.

综上所述，直线FD与直线FE的斜率之和为定值0.

…… 15分

3. (1)【解】分析：分别根据双曲线的焦点和渐近线方程得到a和b的关系式，进而求得双曲线的方程.

因为双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F(2,0)$，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，

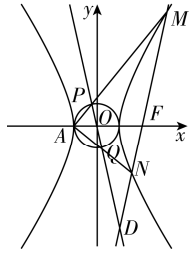
所以$\sqrt{a^2+b^2}=2$，$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，…… 2分

解得$a=1$，$b=\sqrt{3}$，所以C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. …… 4分

(2)(i)【证明】分析：设出直线MN的方程，联立双曲线与直线方程，利用斜率相乘等于-1证明AM与AN垂直，从而得证.

由(1)知，$A(-1,0)$，直线MN的斜率不为0，

设直线MN的方程为$x=my+2$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，



由$\begin{cases}x=my+2,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$可得$(3m^2-1)y^2+12my+9=0$，…… 6分

$3m^2-1\neq0$，$\Delta>0$，$y_1+y_2=\dfrac{-12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{9}{3m^2-1}$，易知$y_1y_2<0$，解得$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$k_{AM}\cdot k_{AN}=\dfrac{y_1}{x_1+1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+1}=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}$

$=\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}=\dfrac{\dfrac{9}{3m^2-1}}{m^2\cdot\dfrac{9}{3m^2-1}+3m\cdot\dfrac{-12m}{3m^2-1}+9}$

$=\dfrac{9}{9m^2-36m^2+27m^2-9}=-1$，…… 8分

即$AM\perp AN$，所以以MN为直径的圆过点A. …… 9分

(ii)【解】第一步：先下结论，再进行证明.

$\triangle ODF$是等腰三角形(且各内角均为锐角)，证明如下.

…… 11分

第二步：根据(i)中的垂直关系设出直线AM，AN的方程，联

立直线 AM 与圆 O 的方程得到交点 P 的坐标.

因为直线 MN 的斜率存在,所以 $m\neq0$.

不妨记直线 $AM:x=m_1y-1$,$AN:x=m_2y-1$,其中 $m_1=\dfrac{x_1+1}{y_1}$,$m_2=\dfrac{x_2+1}{y_2}$,m_1,m_2 均不为 ±1,0,

由(i)可知 $m_1m_2=-1$,

由$\begin{cases}x=m_1y-1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$可得$(m_1^2+1)y^2-2m_1y=0$,解得 $y_P=\dfrac{2m_1}{m_1^2+1}$,

故可得 $x_P=\dfrac{2m_1^2}{m_1^2+1}-1=\dfrac{m_1^2-1}{m_1^2+1}$,即 $P\left(\dfrac{m_1^2-1}{m_1^2+1},\dfrac{2m_1}{m_1^2+1}\right)$. …… 13 分

第三步:根据(i)中的垂直关系得到直线 PQ 经过坐标原点 O.

因为 $AM\perp AN$,所以 $AP\perp AQ$,故线段 PQ 为圆 O 的一条直径,即直线 PQ 经过点 O,直线 PQ 即为直线 OP. …… 14 分

第四步:将直线 OP 的斜率用 m 表示,联立直线 OP 与直线 MN 的方程,判断点 D 的轨迹,从而结合向量的数量积判断 $\triangle ODF$ 的形状.

$$k_{OP}=\frac{2m_1}{m_1^2-1}=\frac{2}{m_1-\frac{1}{m_1}}=\frac{2}{m_1+m_2}=\frac{2}{\frac{x_1+1}{y_1}+\frac{x_2+1}{y_2}}$$

$$=\frac{2}{\frac{my_1+2+1}{y_1}+\frac{my_2+2+1}{y_2}}=\frac{2}{2m+3\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)}$$

$$=\frac{2}{2m+3\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}}=\frac{2}{2m+3\cdot\frac{-12m}{9}}=-\frac{1}{m},$$

所以直线 $OP:x=-my$.

由$\begin{cases}x=-my,\\x=my+2,\end{cases}$可得 $x_D=1$,所以点 D 在定直线 $x=1$ 上,且该定直线为线段 OF 的垂直平分线,故 $OD=DF$. …… 16 分

$y_D=-\dfrac{1}{m}$,所以 $y_D\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$,

设 $D(1,y_D)$,则 $\overrightarrow{DO}=(-1,-y_D)$,$\overrightarrow{DF}=(1,-y_D)$,则 $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DF}=y_D^2-1>2>0$,可得 $\angle ODF$ 为锐角,易得 $\angle DOF$ 和 $\angle OFD$ 均为锐角.

所以 $\triangle ODF$ 是等腰三角形(且各内角均为锐角). …… 17 分

4. (1)【解】分析:根据 $S_{\triangle OFM}=1$,结合 M 的坐标求解.

由题意得,直线 MF 的方程为 $y=-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)=\dfrac{p}{2}-x$,令 $x=-\dfrac{p}{2}$,则 $y=p$,故 $M\left(-\dfrac{p}{2},p\right)$, …… 2 分

于是 $S_{\triangle OFM}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{p}{2}\times p=1$,解得 $p=2$(负值舍去),

故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. …… 4 分

(2)【解】存在. 理由如下. …… 5 分

分析:设 l_0 的方程,联立直线 l_0 和抛物线方程,将题干斜率条件用坐标表示,结合一元二次方程根与系数的关系求解.

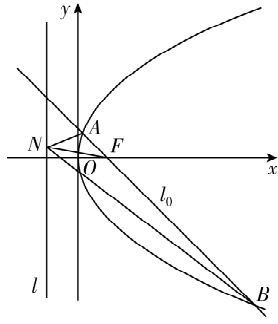
由题意可知直线 l_0 的斜率不为 0,设 l_0 的方程为 $x=ty+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$N(-1,n)$,

联立$\begin{cases}x=ty+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得 $y^2-4ty-4=0$,$\Delta=16t^2+16>0$,所以 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-4$. …… 7 分

由题意得 $k_{NA}+k_{NB}=k_{NF}^2$,即$\dfrac{y_1-n}{x_1+1}+\dfrac{y_2-n}{x_2+1}=\left(\dfrac{n-0}{-1-1}\right)^2=\dfrac{n^2}{4}$,

所以$\frac{y_1-n}{ty_1+2}+\frac{y_2-n}{ty_2+2}=\frac{n^2}{4}$，即$\frac{2ty_1y_2-4n+(2-nt)(y_1+y_2)}{t^2y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4}=\frac{n^2}{4}$，

所以$\frac{-8t-4n+(2-nt)\times 4t}{-4t^2+2t\times 4t+4}=\frac{n^2}{4}$，整理可得$n^2+4n=0$，解得$n=0$或$n=-4$，故$N(-1,0)$，$N(-1,-4)$满足题意. …… 10分



(3)【证明】分析：表示出直线AP与BQ的方程，两方程相减并化简，结合(2)中一元二次方程根与系数的关系求解.

由题意知直线$l_1:x=1$，代入$y^2=4x$，得$y=\pm 2$，不妨设点P在第一象限，则$P(1,2)$，$Q(1,-2)$，则直线$AP:y-2=\frac{y_1-2}{x_1-1}(x-1)$，直线$BQ:y+2=\frac{y_2+2}{x_2-1}(x-1)$， …… 12分

两直线方程相减得$-4=\left(\frac{y_1-2}{x_1-1}-\frac{y_2+2}{x_2-1}\right)(x-1)$，易得$t\neq 0$，

由(2)知，$x_1=ty_1+1$，$x_2=ty_2+1$，于是$-4=\left(\frac{y_1-2}{ty_1}-\frac{y_2+2}{ty_2}\right)(x-1)$，即$-4=\left(\frac{-2}{ty_1}-\frac{2}{ty_2}\right)(x-1)$，即$2t=\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)(x-1)$，即$2t=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}(x-1)$，所以$2t=\frac{4t}{-4}(x-1)$，解得$x=-1$，

即直线AP与BQ的交点在定直线$x=-1$上. …… 17分

题型4　最值（范围）问题

1.【解】(1)分析：由题知a和c的关系以及$2b$的值，结合$a^2=b^2+c^2$列出方程组求a，b的值，进而得到椭圆C的标准方程.

由题意知，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\2b=2,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$ …… 2分

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …… 4分

(2)第一步：当直线l的斜率为0时，求$\triangle AOB$的面积.

当直线l的斜率为0时，将$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$得$x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$. …… 6分

第二步：当直线l的斜率不为0时，设出其方程并与椭圆方程联立，得到根与系数的关系，利用弦长公式表示出$|AB|$，进而表示出$\triangle AOB$的面积.

当直线l的斜率不为0时，设其方程为$x=my+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由原点O到直线l的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，可得$\frac{|-t|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即$t^2=\frac{4}{5}(m^2+1)$. …… 7分

联立$\begin{cases}x=my+t,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去$x$并化简得$(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$，

$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+4)(t^2-4)$，代入$t^2=\dfrac{4}{5}(m^2+1)$可得$\Delta=\dfrac{16}{5}(m^2+16)>0$，$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-4}{m^2+4}$，

所以$|AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{\frac{4\sqrt{5}}{5}\sqrt{m^2+16}}{m^2+4}$，

因此$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{m^2+16}}{m^2+4}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4}{5}\sqrt{1+\dfrac{9m^2}{m^4+8m^2+16}}$. …… 10分

第三步：利用基本不等式求最值，并根据取等条件求此时直线l的方程.

则$S_{\triangle AOB}=\dfrac{4}{5}\cdot\sqrt{1+\dfrac{9}{m^2+\frac{16}{m^2}+8}}\leqslant\dfrac{4}{5}\times\sqrt{1+\dfrac{9}{2\sqrt{16}+8}}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{4}=1$，当且仅当$m^2=\dfrac{16}{m^2}$，即$m=\pm2$时取等号.

综上，$S_{\triangle AOB}$的最大值为1. …… 12分

当$m=2$时，$t=\pm2$，当$m=-2$时，$t=\pm2$，

所以当$\triangle AOB$的面积取最大值1时，直线l的方程为$x+2y+2=0$或$x+2y-2=0$或$x-2y+2=0$或$x-2y-2=0$. …… 15分

2.【解】(1)分析：利用待定系数法，结合顶点到渐近线的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$列方程求解即可.

设等轴双曲线E的方程为$x^2-y^2=a^2(a>0)$，其渐近线方程为$y=\pm x$，故$\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$a=1$，所以双曲线$E$的方程为$x^2-y^2=1$.

…… 3分

(2)第一步：设出直线AB的方程和A,B两点的坐标，将直线AB的方程与双曲线的方程联立，列出一元二次方程根与系数的关系的表达式.

由题意，过点$P(-\sqrt{5},0)$的直线AB的斜率存在且不为0，可设其方程为$x=ny-\sqrt{5}$，$n\neq0$， …… 4分

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x=ny-\sqrt{5},\\ x^2-y^2=1,\end{cases}$整理得$(n^2-1)y^2-2\sqrt{5}ny+4=0$，

由题意可得$\begin{cases}n^2-1\neq0,\\ \Delta=20n^2-16(n^2-1)>0,\end{cases}$且$y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{5}n}{n^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{4}{n^2-1}>0$，所以$n^2>1$. …… 6分

第二步：求出线段AB的中点M的坐标，表示出k_{QM}，由$k_{QM}k_{AB}=-1$，求出n的值，即可得出直线AB的斜率.

设线段AB的中点为$M(x_0,y_0)$，如图①，则$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{\sqrt{5}n}{n^2-1}$，

$x_0=ny_0-\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}n^2}{n^2-1}-\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{n^2-1}$，

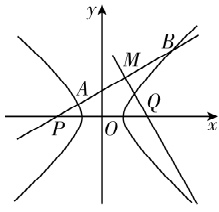
即点$M\left(\dfrac{\sqrt{5}}{n^2-1},\dfrac{\sqrt{5}n}{n^2-1}\right)$，

当$n^2=2$时，$x_0=\sqrt{5}$，显然不符合题意，故$n^2\neq2$，

$k_{QM}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}n}{n^2-1}}{\dfrac{\sqrt{5}}{n^2-1}-\sqrt{5}}=\dfrac{n}{2-n^2}$，$k_{AB}=\dfrac{1}{n}$，…… 8 分

因为 $AB\perp QM$，所以 $k_{AB}k_{QM}=\dfrac{1}{2-n^2}=-1$，解得 $n=\pm\sqrt{3}$，

经验证均满足题意，所以直线 AB 的斜率为 $\dfrac{1}{n}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …… 9 分



图①

(3) 第一步：将三角形的面积关系转化为 $|PB|>5|AP|$，即可得 $y_2>5y_1>0$.

如图②所示，由点 C 在第三象限，知直线 AB 的斜率是正数，由 $S_{\triangle AOB}>2S_{\triangle APC}$，得 $S_{\triangle ABC}>4S_{\triangle APC}$，所以 $|AB|>4|AP|$，则 $|PB|>5|AP|$，则 $y_2>5y_1>0$. …… 11 分

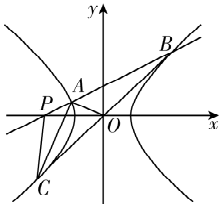
第二步：结合根与系数的关系可求得斜率的取值范围.

由 $\dfrac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=\dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}+2$，令 $\dfrac{y_1}{y_2}=t$，$0<t<\dfrac{1}{5}$，$f(t)=t+\dfrac{1}{t}+2$，由对勾函数的性质可知 $f(t)>\dfrac{36}{5}$.

所以 $\dfrac{5n^2}{n^2-1}>\dfrac{36}{5}$，所以 $1<n^2<\dfrac{36}{11}$，则 $\dfrac{11}{36}<k_{AB}^2<1$，

所以 $\dfrac{\sqrt{11}}{6}<k_{AB}<1$，故直线 AB 斜率的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{11}}{6},1\right)$.

…… 15 分



图②

3.【解】(1) 分析：设 $A\left(x_0,\dfrac{x_0^2}{2p}\right)$，进而求出 $\overrightarrow{FA}$ 的坐标，利用向量坐标对应相等建立方程组求解即可.

由题知 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，设 $A\left(x_0,\dfrac{x_0^2}{2p}\right)$，则 $\overrightarrow{FA}=\left(x_0,\dfrac{x_0^2}{2p}-\dfrac{p}{2}\right)=\left(\sqrt{3},-\dfrac{1}{4}\right)$，所以 $\begin{cases}x_0=\sqrt{3},\\ \dfrac{x_0^2}{2p}-\dfrac{p}{2}=-\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 得 $2p^2-p-6=0$，解得 $p=2$ 或 $p=-\dfrac{3}{2}$(舍)，…… 2 分

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. …… 3 分

(2) 第一步：设出直线 MN 的方程，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立直线 MN 和抛物线方程，利用根与系数的关系写出 x_1+x_2，x_1x_2 的表达式，进而求出 k_1+k_2，k_1k_2.

由题易知直线 MN 的斜率存在，设直线 MN：$y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由直线 PM，PN 的斜率存在知 $m\neq0$.

联立$\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+m,\end{cases}$得$x^2-4kx-4m=0$，

所以$\Delta=16(k^2+m)>0, x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4m.$ …… 5分

因为$k_1=\frac{y_1+2}{x_1}=\frac{kx_1+m+2}{x_1}=k+\frac{m+2}{x_1}, k_2=\frac{y_2+2}{x_2}=\frac{kx_2+m+2}{x_2}=k+\frac{m+2}{x_2}$，

所以$k_1+k_2=2k+(m+2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2k+(m+2)\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{k(m-2)}{m}$，$k_1k_2=\frac{(kx_1+m+2)(kx_2+m+2)}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+k(m+2)(x_1+x_2)+(m+2)^2}{x_1x_2}=\frac{8k^2+(m+2)^2}{-4m}$. …… 7分

第二步：将k_1+k_2, k_1k_2的表达式代入$3(k_1+k_2)-2k_1k_2=4$可得k与m的关系.

因为$3(k_1+k_2)-2k_1k_2=4$，即$3\times\frac{k(m-2)}{m}-2\times\frac{8k^2+(m+2)^2}{-4m}-4=0$，即$(2k+m-2)(4k+m-2)=0$，则$m=2-2k$或$m=2-4k$能满足题意. …… 8分

第三步：写出直线MN的方程，并求出点Q的坐标.

则$MN: y=kx+2-2k=k(x-2)+2$或$MN: y=kx+2-4k=k(x-4)+2$，所以定点Q的坐标为$(2,2)$或$(4,2)$. …… 10分

(3)第一步：根据(2)中结论并结合点Q与抛物线的位置关系，可得MN过点$(2,2)$时，$|MN|$有最小值.

若直线MN过点$(4,2)$，将$x=4$代入抛物线方程$x^2=4y$中，得$y=4$，此时点Q在抛物线外，根据点Q与抛物线的位置关系易知$|MN|$无最小值，所以MN只能过点$(2,2)$，此时$|MN|$有最小值. …… 12分

第二步：利用根与系数的关系及弦长公式求得$|MN|$.

因为$m=2-2k$，所以$x_1x_2=8k-8$，

则$|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(4k)^2-4(8k-8)}=4\sqrt{k^4-2k^3+3k^2-2k+2}$. … 14分

第三步：构造函数，利用函数的单调性求出最值.

令$f(k)=k^4-2k^3+3k^2-2k+2$，则$f'(k)=4k^3-6k^2+6k-2=2(2k-1)(k^2-k+1)$，其中$k^2-k+1>0$，

当$k<\frac{1}{2}$时，$f'(k)<0$，则$f(k)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，

当$k>\frac{1}{2}$时，$f'(k)>0$，则$f(k)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，

所以当$k=\frac{1}{2}$时，$f(k)$有最小值，即$|MN|$有最小值，$|MN|_{\min}=4\times\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-1+2}=5$.

所以当直线MN经过点$Q(2,2)$时，$|MN|$存在最小值，最小值为5. …… 17分

4. (1)【解】分析：根据距离公式以及题干条件求出点M的轨迹方程.

根据题意得$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}=2$，化简得$3x^2-y^2=3$，即轨迹$C$的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$. …… 3分

(2)(i)【证明】第一步：设出直线BN的方程，并与曲线C的方程联立，表示出点N的坐标.

由(1)知 $A(-1,0)$,$B(1,0)$.

由题意知直线 BN 的斜率存在且小于 0,设 $N(x_N,y_N)$,直线 BN 的方程为 $y=k(x-1)$,与曲线 C 的方程联立,消去 y 并整理得 $(3-k^2)x^2+2k^2x-(k^2+3)=0$,

所以 $\begin{cases}3-k^2\neq 0,\\ \Delta=4k^4+4(3-k^2)(3+k^2)>0,\end{cases}$ 则 $k^2\neq 3$, …… 5 分

则 $x_N\cdot 1=\dfrac{k^2+3}{k^2-3}$,故 $y_N=k\left(\dfrac{k^2+3}{k^2-3}-1\right)=\dfrac{6k}{k^2-3}$,得 $N\left(\dfrac{k^2+3}{k^2-3},\dfrac{6k}{k^2-3}\right)$.

第二步:利用角平分线定理得到线段长之间的关系,代入解得点 T 的横坐标为定值,即可证得结论成立.

设点 $T(x_0,y_0)$,则 $\dfrac{|NT|}{|BT|}=\dfrac{\left|x_0-\dfrac{k^2+3}{k^2-3}\right|}{|1-x_0|}=\dfrac{x_0-\dfrac{k^2+3}{k^2-3}}{1-x_0}$. …… 7 分

由题意得 $|NF|=2\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{k^2+3}{k^2-3}\right)$,$|BF|=3$, …… 8 分

已知 FT 平分 $\angle NFB$,由角平分线定理得 $\dfrac{|NT|}{|BT|}=\dfrac{|NF|}{|BF|}$,

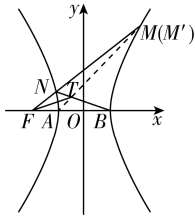
即 $\dfrac{x_0-\dfrac{k^2+3}{k^2-3}}{1-x_0}=\dfrac{2\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{k^2+3}{k^2-3}\right)}{3}$,化简得 $\dfrac{x_0-\dfrac{k^2+3}{k^2-3}}{1-x_0}=-\dfrac{k^2+1}{k^2-3}$,

即 $(k^2-3)x_0-(k^2+3)=(k^2+1)x_0-(k^2+1)$,解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$,

所以点 T 在定直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上. …… 10 分

(ii)【解】第一步:表示出直线 AT 的方程并与曲线 C 的方程联立,利用根与系数的关系得到点 M' 的坐标.

连接 AT 并延长交双曲线的右支于点 $M'(x_{M'},y_{M'})$,



由(i)知 $T\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}k\right)$,$A(-1,0)$,

所以 $k_{AT}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}k}{\dfrac{1}{2}}=-3k$,

所以直线 AT 的方程为 $y=-3k(x+1)$.

将直线 AT 的方程与曲线 C 的方程联立,消去 y 并整理得 $(1-3k^2)x^2-6k^2x-(3k^2+1)=0$,由 $1-3k^2\neq 0$ 得 $k^2\neq\dfrac{1}{3}$,$\Delta_1>0$,

所以 $-1\cdot x_{M'}=\dfrac{-(3k^2+1)}{1-3k^2}$,解得 $x_{M'}=\dfrac{3k^2+1}{1-3k^2}$,

从而 $y_{M'}=-3k(x_{M'}+1)=\dfrac{6k}{3k^2-1}$,

故 $M'\left(\dfrac{3k^2+1}{1-3k^2},\dfrac{6k}{3k^2-1}\right)$, …… 12 分

第二步:表示出直线 $M'F$ 与 NF 的斜率,得到 N,F,M' 三点共线,则 M' 与 M 重合,进而证明 A,T,M 三点共线,得到 k_{TM} 关于 k 的表达式.

则 $k_{M'F}=\dfrac{\dfrac{6k}{3k^2-1}}{\dfrac{3k^2+1}{1-3k^2}+2}=\dfrac{2k}{k^2-1}$.

由(i)知 $N\left(\dfrac{k^2+3}{k^2-3},\dfrac{6k}{k^2-3}\right)$,$k_{NF}=\dfrac{\dfrac{6k}{k^2-3}}{\dfrac{k^2+3}{k^2-3}+2}=\dfrac{2k}{k^2-1}=k_{M'F}$,故 $N,F,$

M'三点共线.

又N,F,M三点共线，所以M'与点M重合，A,T,M三点共线，所以$k_{TM}=k_{AT}=-3k$. …… 14分

第三步：结合点N在第二象限求得k的取值范围，将$k_{BN}^2-k_{TM}$用k表示，进而求得其取值范围.

因为点N在第二象限，所以$\begin{cases}\dfrac{k^2+3}{k^2-3}<0,\\ \dfrac{6k}{k^2-3}>0,\end{cases}$结合$k^2\neq\dfrac{1}{3}$，解得$k\in\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$， …… 15分

所以$k_{BN}^2-k_{TM}=k^2+3k=\left(k+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\in\left[-\dfrac{9}{4},\dfrac{1}{3}-\sqrt{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3}-\sqrt{3},0\right)$，即$k_{BN}^2-k_{TM}$的取值范围为$\left[-\dfrac{9}{4},\dfrac{1}{3}-\sqrt{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3}-\sqrt{3},0\right)$. …… 17分

题型5　探究性问题

1.【解】(1)分析：已知弦中点坐标与直线斜率，使用点差法推导出a^2与b^2的关系，再利用$a^2+b^2=c^2$求得a^2,b^2的值，进而求出双曲线方程.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减并整理得$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{b^2}{a^2}$，即$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4m}{2m}=\dfrac{b^2}{a^2}$，则$a^2=b^2$. …… 3分

又$a^2+b^2=4$，所以$a^2=b^2=2$，故C的方程为$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$. … 5分

(2)第一步：设出直线AB的方程并与双曲线方程联立，写出关于x的一元二次方程根与系数的关系.

设直线AB的方程为$y=\dfrac{1}{2}x+t$，由$\begin{cases}x^2-y^2=2,\\ y=\dfrac{1}{2}x+t,\end{cases}$得$\dfrac{3}{4}x^2-tx-t^2-2=0$，

则$\Delta=t^2+4\times\dfrac{3}{4}(t^2+2)=4t^2+6>0$，且$x_1x_2=\dfrac{-4t^2-8}{3},x_1+x_2=\dfrac{4t}{3}$. …… 8分

第二步：将直角条件转化为向量数量积为0，求得t的值，再利用中点坐标求出m的值，得出结论.

假设存在$m\in\mathbf{R}$，使$\angle AFB=90°$，则$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$.

因为$\overrightarrow{FA}=(x_1-2,y_1),\overrightarrow{FB}=(x_2-2,y_2)$，且$y_1=\dfrac{1}{2}x_1+t,y_2=\dfrac{1}{2}x_2+t$，

所以$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=\dfrac{5}{4}x_1x_2+\left(\dfrac{t}{2}-2\right)(x_1+x_2)+t^2+4=0$，

故$\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{-4t^2-8}{3}+\dfrac{t-4}{2}\cdot\dfrac{4t}{3}+t^2+4=0$，整理得$-4t+1=0$，解得$t=\dfrac{1}{4}$. …… 12分

由M为线段AB中点，可得$2m=\dfrac{4t}{3}$，解得$m=\dfrac{1}{6}$. 故存在$m=\dfrac{1}{6}$，使$\angle AFB=90°$. …… 15分

2.【解】(1)分析:设出点 A,B 的坐标与直线 AB 的方程,直曲联立,得到根与系数的关系式,由 O 在以 AB 为直径的圆上得到垂直关系,代入根与系数的关系式求得 p,进而得到抛物线的标准方程.

设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$,易知直线 AB 不与 y 轴垂直,设其方程为 $x=my+4$,

联立$\begin{cases}x=my+4,\\y^2=2px,\end{cases}$消去 x 得 $y^2-2pmy-8p=0$,则 $\Delta>0$,$y_1+y_2=2pm$,$y_1y_2=-8p$. ……3分

连接 OA,因为 O 在以 AB 为直径的圆上,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}+y_1y_2=16-8p=0$, ……5分

解得 $p=2$,所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$. ……6分

(2)第一步:利用共线向量的坐标表示求出点 E 的坐标及直线 AE 的方程.

直线 AE 与抛物线 C 相切,理由如下:

由(1)得直线 BO 的方程为 $y=\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}}x$,

即 $y=\frac{4}{y_2}x$,则 $D\left(-4,\frac{-16}{y_2}\right)$,

又 $y_1y_2=-16$,于是 $D(-4,y_1)$.

设 $E(t,0)$,则 $\overrightarrow{ED}=(-4-t,y_1)$,$\overrightarrow{QA}=\left(\frac{y_1^2}{4}-4,y_1\right)$,

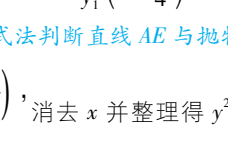
由 $\overrightarrow{ED}//\overrightarrow{QA}$,得$(-4-t)\cdot y_1-y_1\cdot\left(\frac{y_1^2}{4}-4\right)=0$,由 $y_1\neq0$,解得 $t=-\frac{y_1^2}{4}$,即 $E\left(-\frac{y_1^2}{4},0\right)$. ……8分

于是直线 AE 的方程为 $y=\frac{2}{y_1}\left(x+\frac{y_1^2}{4}\right)$. ……10分

第二步:利用判别式法判断直线 AE 与抛物线的位置关系.

联立$\begin{cases}y=\frac{2}{y_1}\left(x+\frac{y_1^2}{4}\right),\\y^2=4x,\end{cases}$消去 x 并整理得 $y^2-2y_1y+y_1^2=0$,$\Delta_1=(2y_1)^2-4y_1^2=0$,

所以直线 AE 与抛物线 C 相切. ……12分



(3)第一步:设出直角顶点的坐标,借助垂直关系设出两条直角边对应向量的坐标,表示出三角形另外两点的坐标并代入抛物线方程.

抛物线 C 上不存在三点 M,N,P 构成面积为 15 的等腰直角三角形. 理由如下:

假设存在满足条件的三角形,设 $P\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)$ 为直角顶点,则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$ 且 $|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PN}|$.

由对称性,不妨设 $\overrightarrow{PM}=(a,b)$,$a>0$,$b>0$,

则 $\overrightarrow{PN}=(b,-a)$,$M\left(\frac{y_0^2}{4}+a,y_0+b\right)$,$N\left(\frac{y_0^2}{4}+b,y_0-a\right)$,

由 M,N 均在抛物线上，得 $\begin{cases}(y_0+b)^2=4\left(\frac{y_0^2}{4}+a\right),\\(y_0-a)^2=4\left(\frac{y_0^2}{4}+b\right),\end{cases}$

化简得 $\begin{cases}2by_0+b^2=4a,\\-2ay_0+a^2=4b,\end{cases}$ ……14分

第二步：消去 y_0 得到 a 与 b 的关系式，利用基本不等式求 $\triangle MNP$ 面积的最小值，进而进行判断.

消去 y_0 并整理得 $ab(a+b)=4(a^2+b^2)$，……15分

则 $4(a^2+b^2)=ab(a+b)\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$，即 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号（提示：$\forall a,b>0$，$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号），

因此 $\triangle MNP$ 的面积 $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqslant16>15$，

所以不存在三点 M,N,P 构成面积为 15 的等腰直角三角形. ……17分

专题6 ▸ 函数与导数

题型1　利用导数研究函数的单调性、极值、最值

1. (1)【解】分析：对 $f(x)$ 求导得出 $g(x)$ 的解析式，利用导数研究其单调性即可.

由题可得 $g(x)=f'(x)=2\ln x-x+1+x\left(\frac{2}{x}-1\right)=2\ln x-2x+3$ $(x>0)$，……1分

则 $g'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$. ……2分

令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<1$，令 $g'(x)<0$，解得 $x>1$，……4分

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$. ……5分

(2)【证明】第一步：利用 $g(x)$ 的单调性判断出 $f(x)$ 的单调性，并结合零点存在定理得出 x_0 的取值范围.

由(1)知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $g(1)=1>0$，当 $x\to0^+$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，

所以 $\exists x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，使 $g(x_1)=g(x_2)=0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，

故 $f(x)$ 的极小值为 $f(x_1)$，则 $x_0=x_1$. ……7分

由于 $g(e^{-1})=1-\frac{2}{e}>0$，$g(e^{-2})=-1-\frac{2}{e^2}<0$，且 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $x_0\in(e^{-2},e^{-1})$. ……8分

第二步：求出函数 $f(x)$ 的极小值.

由题得 $f'(x_0)=g(x_0)=0$，即 $2\ln x_0-2x_0+3=0$，得 $\ln x_0=x_0-\frac{3}{2}$.

则 $f(x_0)=x_0(2x_0-3-x_0+1)=x_0^2-2x_0$. ……10分

第三步：令 $h(x)=x^2-2x$，$x\in(e^{-2},e^{-1})$，结合一元二次函数的

单调性即可证明结论.

令 $h(x)=x^2-2x, x\in(e^{-2},e^{-1})$，则 $h(x)$ 在 (e^{-2},e^{-1}) 上单调递减，所以 $h(x)>h(e^{-1})=(e^{-1})^2-2\cdot e^{-1}=\dfrac{1-2e}{e^2}$，…… 12 分

即 $f(x_0)>\dfrac{1-2e}{e^2}$. …… 13 分

2.【解】(1) 分析：根据切线斜率求出切点坐标，进而得切线方程.

当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-4x$，求导得 $f'(x)=e^x-4$，令 $f'(x)=e^x-4=-3$，解得 $x=0$，$f(0)=1$，故切点为 $(0,1)$，

故所求切线方程为 $y-1=-3(x-0)$，即 $y=-3x+1$. …… 3 分

(2) 分析：求导，然后对参数分类讨论.

$f(x)=e^{ax}-4x, a\in\mathbf{R}$，求导得 $f'(x)=ae^{ax}-4, a\in\mathbf{R}$， …… 4 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=ae^{ax}-4<0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减； …… 5 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=ae^{ax}-4<0$，解得 $x<\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a}$，

令 $f'(x)=ae^{ax}-4>0$，解得 $x>\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a}$，

此时 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. …… 7 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. …… 8 分

(3) 第一步：通过 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的关系，建立 $g(x)$ 的最值与 $f(x)$ 的最值的关系，然后换元，得到 b 的表达式.

因为 $g(x)=f(x)-b$，所以 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调区间相同，若函数 $g(x)=f(x)-b$ 的极小值为 0，由(2)可知必定有 $a>0$，又 $g(x)$ 的极小值也为 $g(x)$ 的最小值，$g(x)$ 的极小值为 $f(x)_{\min}-b=f\left(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a}\right)-b=e^{\ln\frac{4}{a}}-4\times\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{4}{a}-b=0$，

…… 10 分

即 $b=\dfrac{4}{a}-\dfrac{4}{a}\ln\dfrac{4}{a}(a>0)$，令 $t=\dfrac{4}{a}$，则 $t\in(0,+\infty)$，$b=t-t\ln t$ $(t>0)$. …… 11 分

第二步：构造函数，利用导数研究最值问题.

令 $h(t)=t-t\ln t(t>0)$，求导得 $h'(t)=1-\ln t-1=-\ln t(t>0)$，令 $h'(t)=-\ln t>0$，解得 $0<t<1$，令 $h'(t)=-\ln t<0$，解得 $t>1$，所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(t)$ 在 $t=1$ 处取得最大值 $h(1)=1$，即实数 b 的最大值为 1.

…… 15 分

题型 2　导数与函数的零点

1.【解】(1) 分析：对函数求导，分别对 $a\leqslant 0$，$a>0$ 两种情况进行讨论，结合导数符号求原函数的单调性.

$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=4ae^{2x}+2(a-1)e^x-1=(2ae^x-1)(2e^x+1)$， …… 2 分

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$，得 $x=-\ln(2a)$， …… 4 分

当 $x\in(-\infty,-\ln(2a))$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-\ln(2a),+\infty)$

时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(-\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(-\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增. …… 5 分

(2) 分析：由(1)知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，即 $f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意，所以 $a>0$. 由(1)知，若 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(x)_{\min}=f(-\ln(2a))=1-\frac{1}{2a}+\ln(2a)<0$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(2a))$ 上有一个零点，在 $(-\ln(2a),+\infty)$ 上有一个零点，根据 a 的范围分类讨论即可.

由(1)知，若 $a\leqslant 0$，$f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意.

…… 7 分

若 $a>0$，当 $x=-\ln(2a)$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(-\ln(2a))=1-\frac{1}{2a}+\ln(2a)$.

①当 $a=\frac{1}{2}$ 时，由于 $f(-\ln(2a))=0$，故 $f(x)$ 只有一个零点.

…… 9 分

②当 $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，因为函数 $y=1-\frac{1}{2a}$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，函数 $y=\ln(2a)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，所以函数 $y=1-\frac{1}{2a}+\ln(2a)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $1-\frac{1}{2a}+\ln(2a)>1-\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}+\ln\left(2\times\frac{1}{2}\right)=0$，即 $f(-\ln(2a))>0$，故 $f(x)$ 没有零点. …… 11 分

③当 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，由于 $1-\frac{1}{2a}+\ln(2a)<0$，即 $f(-\ln(2a))<0$，又 $f(-2)=2ae^{-4}+2(a-1)e^{-2}+2=\frac{2a}{e^2}\left(\frac{1}{e^2}+1\right)+2-\frac{2}{e^2}>2-\frac{2}{e^2}>0$，即 $\exists x_1\in(-2,-\ln(2a))$，使得 $f(x_1)=0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(2a))$ 上有一个零点； …… 13 分

设正整数 n_0 满足 $n_0>\ln\left(\frac{3}{2a}-1\right)>-\ln(2a)$，则 $f(n_0)=e^{n_0}(2ae^{n_0}+2a-2)-n_0$，又 $2ae^{n_0}+2a-2>2ae^{\ln\left(\frac{3}{2a}-1\right)}+2a-2=3-2a+2a-2=1$，所以 $f(n_0)>e^{n_0}-n_0>0$，即 $\exists x_2\in(-\ln(2a),n_0)$，使得 $f(x_2)=0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\ln(2a),+\infty)$ 上有一个零点，满足题意.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. …… 15 分

2. 【解】(1) 分析：利用导数的几何意义求切线方程.

当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x+2}{x^2+1}$，求导得 $f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$， …… 3 分

则 $f(1)=\frac{3}{2}$，$f'(1)=-1$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-$

1)，即 $2x+2y-5=0$. …… 5 分

(2) 分析：将两曲线交点问题转化为方程根的问题，构造函数，进而转化为函数零点问题，求导分析函数的单调性，根据 a 的取值范围讨论即可.

问题可转化为求方程 $\frac{x+a}{x^2+1}=\sin x$ 的不等实根的个数，方程等价于 $(x^2+1)\sin x-x-a=0$. …… 6 分

设 $g(x)=(x^2+1)\sin x-x-a, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $g'(x)=2x\sin x+(x^2+1)\cos x-1$. …… 8 分

记 $h(x)=g'(x), x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，可知 $h(x)=h(-x)$，则 $h(x)$ 是偶函数，且 $h'(x)=4x\cos x-(x^2-1)\sin x$.

①当 $x\in[0,1]$ 时，$4x\cos x\geqslant 0$，$(x^2-1)\sin x\leqslant 0$，故 $h'(x)\geqslant 0$ 且仅在 $x=0$ 时有 $h'(x)=0$，则 $h(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增，$h(x)\geqslant h(0)=0$；

②当 $x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$h(x)\geqslant 2x\sin x-1>2x\sin\frac{\pi}{6}-1=x-1>0$.

故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$h(x)\geqslant 0$.

又因为 $h(x)$ 是偶函数，所以当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$h(x)\geqslant 0$ 且不恒为 0，从而 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)+\frac{\pi}{2}-a$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+1-\frac{\pi}{2}-a$，所以 $-\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)+\frac{\pi}{2}-a\leqslant g(x)\leqslant\frac{\pi^2}{4}+1-\frac{\pi}{2}-a$. …… 12 分

当 $\frac{\pi^2}{4}+1-\frac{\pi}{2}-a<0$ 或 $-\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)+\frac{\pi}{2}-a>0$，即 $a>\frac{\pi^2+4-2\pi}{4}$ 或 $a<\frac{2\pi-\pi^2-4}{4}$ 时，函数 $y=g(x)$ 没有零点，即曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 无交点；当 $\frac{2\pi-\pi^2-4}{4}\leqslant a\leqslant\frac{\pi^2+4-2\pi}{4}$ 时，函数 $y=g(x)$ 有 1 个零点，即曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 有 1 个交点. …… 14 分

综上所述，当 $a\in\left(-\infty,\frac{2\pi-\pi^2-4}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi^2+4-2\pi}{4},+\infty\right)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 的交点个数为 0，当 $a\in\left[\frac{2\pi-\pi^2-4}{4},\frac{\pi^2+4-2\pi}{4}\right]$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 的交点个数为 1. …… 15 分

3. (1)【解】分析：对 $f(x)$ 求导，分类讨论研究导数的符号，进而确定单调性.

由题意，$f'(x)=e^x-b$.

当 $b\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $b>0$ 时，令 $e^x-b>0$，得 $x>\ln b$，则 $f(x)$ 在 $(\ln b,+\infty)$ 上单调递增，令 $e^x-b<0$，得 $x<\ln b$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln b)$ 上单调递减. …… 3 分

(2)【解】分析：将问题进行转化，通过两次构造函数，利用导数研究函数的单调性与最值，求得 a 的取值范围.

当 $b=1$ 时，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 可化为 $x+e^2-a\ln x\geqslant 0$.

令 $h(x)=x+e^2-a\ln x\ (x>0)$，$h'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，因为 $a>0$，所以当 $x\in(0,a)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，所以

$h(x)_{\min}=h(a)=a+e^2-a\ln a\geqslant 0$. …… 5分

设 $H(a)=a+e^2-a\ln a\ (a>0)$，则 $H'(a)=-\ln a$，当 $a\in(0,1)$ 时，$H'(a)>0$，$H(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$H'(a)<0$，$H(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且当 $a\to 0^+$ 时，$H(a)\to e^2$，$H(e^2)=0$，所以 a 的取值范围是 $(0,e^2]$. … 7分

(3)【证明】第一步：利用导数得到 $g(x)_{\min}$ 的表达式.

由题意，$g'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}\ (x>0)$，易知 $g'(x)$ 为增函数，$g'(2)=e^2-\dfrac{a}{2}$，由 $a>2e^2$ 得 $g'(2)<0$.

又 $g'(a)=e^a-1>0$，故 $\exists x_0\in(2,a)$，使得 $g'(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$，得 $a=x_0e^{x_0}$. …… 9分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，得 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-a\ln x_0=e^{x_0}(1-x_0\ln x_0)$. …… 10分

第二步：构造函数，利用导数得到 $g(x)_{\min}<0$.

令 $\varphi(x)=1-x\ln x$，$x\in(2,a)$，则 $\varphi'(x)=-1-\ln x<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(2,a)$ 上单调递减，$\varphi(x)<\varphi(2)=1-2\ln 2<0$，所以 $g(x)_{\min}=e^{x_0}(1-x_0\ln x_0)<0$. …… 11分

第三步：结合零点存在定理及函数放缩确定 $g(x)$ 零点的个数和范围.

又 $g(1)=e>0$，故 $\exists x_1\in(1,x_0)$，使得 $g(x_1)=0$. …… 12分

对于 $y=e^x-x-1$，$x\in(0,+\infty)$，求导得 $y'=e^x-1>0$，故 $y=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $y=e^x-x-1>0$，即 $e^x>x+1$.

…… 13分

对于 $y=\ln x-x+1$，$x\in(0,+\infty)$，求导得 $y'=\dfrac{1}{x}-1$，当 $0<x<1$ 时，$y'=\dfrac{1}{x}-1>0$，则 $y=\ln x-x+1$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，当 $x>1$ 时，$y'=\dfrac{1}{x}-1<0$，则 $y=\ln x-x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $y=\ln x-x+1\leqslant 0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，故 $-\ln x\geqslant -(x-1)$.

…… 15分

由 $g(a)=e^a-a\ln a$，令 $p(a)=e^a-a\ln a\ (a>2e^2)$，则 $p'(a)=e^a-\ln a-1>(a+1)-(a-1)-1=1>0$，所以 $p(a)$ 在 $(2e^2,+\infty)$ 上单调递增，得 $p(a)>p(2e^2)=e^{2e^2}-2e^2\ln(2e^2)>e^{14}-2e^2\ln e^3=e^{14}-6e^2>0$，所以 $g(a)>0$，故 $\exists x_2\in(x_0,a)$，使得 $g(x_2)=0$.

综上，函数 $g(x)$ 有两个大于 1 的零点. …… 17分

4. (1)【解】分析：求导，由导数的正负判断函数的单调区间.

因为 $f(x)=mx+x\ln x+1$，$x>0$，所以 $f'(x)=m+\ln x+1$.

…… 1分

由 $f'(x)<0$，得 $0<x<e^{-m-1}$；由 $f'(x)>0$，得 $x>e^{-m-1}$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,e^{-m-1})$ 上单调递减，在 $(e^{-m-1},+\infty)$ 上单调递增. …… 3分

(2)①【解】分析：分离参数，以此构造函数，由导数判断函数的单调性，从而得到最小值，结合草图即可求得 m 的取值范围.

由 $f(x)=e^x$，得 $mx+x\ln x+1=e^x$，$x>0$，则 $m=\dfrac{e^x}{x}-\ln x-\dfrac{1}{x}$.

…… 4分

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}$，$x>0$，则方程 $f(x)=e^x$ 有两个根 x_1，x_2 可转化为函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有两个不同的交点. …… 5 分

求导得 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-1)}{x^2}$，$x>0$，

当 $x>0$ 时，$\frac{e^x-1}{x^2}>0$，

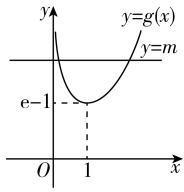
所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取得极小值，也是最小值. …… 7 分

$g(1)=e-1$，当 $x\to 0^+$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，$g(x)$ 的大致图象如图所示，

所以 $m>e-1$，即实数 m 的取值范围是 $(e-1,+\infty)$. …… 9 分



②【证明】第一步：消去参数 m，化简原不等式，将对数式单独放在不等号一侧，对另一侧式子构造函数，利用导数求出其取值范围.

由①可知，$m=\frac{e^{x_1}}{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{x_1}$，

则证不等式 $x_1+\ln x_2<m-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即证 $x_1+\ln x_2<\frac{e^{x_1}}{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，转化为证 $\ln(x_1x_2)<\frac{e^{x_1}}{x_1}-x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$. …… 10 分

令 $h(x)=\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$. …… 11 分

令 $m(x)=e^x-x-1(x>0)$，则 $m'(x)=e^x-1$，

因为 $m'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m(x)>m(0)=0$，

所以当 $x>0$ 时，$e^x-x-1>0$. …… 12 分

所以当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(1)=e-2-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$. …… 13 分

第二步：构造函数 $n(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)(x\geqslant 1)$，利用导数分析其单调性及最值，并结合 $g(x)$ 单调性得到 x_1x_2 的范围，从而得到 $\ln(x_1x_2)$ 的范围.

由①知 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}$，$g\left(\frac{1}{x}\right)=xe^{\frac{1}{x}}+\ln x-x$，$x>0$.

则 $\left[g\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{(x-1)(xe^{\frac{1}{x}}-x)}{x^2}$，

令 $n(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$，$x\geqslant 1$，

则 $n'(x)=g'(x)-g\left[\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{(x-1)(e^x-xe^{\frac{1}{x}}+x-1)}{x^2}$. ……

…… 14 分

令 $p(x)=e^x-xe^{\frac{1}{x}}+x-1(x\geqslant 1)$，则 $p'(x)=e^x-e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1$.

因为 $x\geqslant 1$，所以 $p'(x)=e^x-e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\geqslant e-e+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1>0$，

所以 $p(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $p(x)\geqslant p(1)=0$，

所以当 $x>1$ 时，$n'(x)>0$，

所以 $n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $n(x)\geqslant n(1)=0$.

所以当 $x>1$ 时，$g(x)>g\left(\frac{1}{x}\right)$. …… 15 分

由①及题意可知，$0<x_1<1<x_2$，所以 $g(x_1)=g(x_2)>g\left(\frac{1}{x_2}\right)$.

因为 $0<\frac{1}{x_2}<1$ 且 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $x_1<\frac{1}{x_2}$，

所以 $0<x_1x_2<1$，所以 $\ln(x_1x_2)<0$. …… 16 分

第三步：整合结论，代回原式即可证明不等式.

所以 $\ln(x_1x_2)<0<\frac{e^{x_1}}{x_1}-x_1-\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $x_1+\ln x_2<m-\frac{\sqrt{2}}{2}$. …… 17 分

题型 3　不等式恒成立与存在性问题

1.【解】(1) 分析：对 $f(x)$ 求导，从而分析其单调性.

因为 $f(x)=e^x\cos x$，所以 $f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$. …… 2 分

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$\cos x>\sin x$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x<\sin x$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

…… 5 分

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

…… 6 分

(2) 分析：将问题转化为不等式能成立问题，分离参数后构造新函数，利用导数判断其单调性与最值，进而求解.

存在 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$，使得 $f(x)-ag(x)\geqslant 0$ 成立，即存在 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$，使得 $e^x\cos x\geqslant a(1+\sin x)$ 成立.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 时，$1+\sin x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以问题转化为存在 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$，使得 $a\leqslant\frac{e^x\cos x}{1+\sin x}$ 成立. …… 9 分

令 $h(x)=\frac{e^x\cos x}{1+\sin x}$，其中 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$，则 $h'(x)=\frac{e^x(\cos x-\sin x)(1+\sin x)-e^x\cos^2x}{(1+\sin x)^2}=\frac{e^x(\cos x-1)(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}\leqslant 0$，且 $h'(x)$ 不恒为零，故函数 $h(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 上单调递减，

……12分

则 $h(x)_{\max}=h\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}}$，故 $a\leqslant\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}}$，所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}}]$. ……15分

2. (1)【证明】分析：构造函数 $h(x)=x-1-\ln x(x>0)$，利用导数与函数的单调性之间的关系，求出 $h(x)$ 的单调区间，进而可求得 $h(x)$ 的最小值，即可求解.

令 $h(x)=x-1-\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

则 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)=x-1-\ln x\geqslant h(x)_{\min}=h(1)=1-1=0$，故 $x-1\geqslant\ln x$. ……5分

(2)【证明】分析：对 $f(x)$ 求导，利用(1)中结果可得 $f'(x)<0$ 恒成立，进而得到结论.

因为 $f(x)=\frac{x-\ln x}{e^{x-1}}$，易知 $x\in(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=\frac{\ln x-x-\frac{1}{x}+1}{e^{x-1}}$，令 $m(x)=\ln x-x-\frac{1}{x}+1$，

由(1)知 $x-1\geqslant\ln x$，则 $m(x)=\ln x-x-\frac{1}{x}+1\leqslant x-1-x-\frac{1}{x}+1=-\frac{1}{x}<0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，又 $e^{x-1}>0$，所以 $f'(x)<0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在其定义域内为减函数. ……9分

(3)【解】第一步：转化题干中的条件.

易知 $x\in(0,+\infty)$，由 $f(x)\leqslant\frac{1}{ax}$，得到 $\frac{x-\ln x}{e^{x-1}}\leqslant\frac{1}{ax}$，即 $\frac{x^2-x\ln x}{e^{x-1}}\leqslant\frac{1}{a}$. ……11分

第二步：构造函数，利用导数研究函数的单调性进而求得参数范围.

令 $G(x)=\frac{x^2-x\ln x}{e^{x-1}}(x>0)$，则 $G'(x)=\frac{2x-\ln x-1-(x^2-x\ln x)}{e^{x-1}}=\frac{(x-1)\ln x-(x-1)^2}{e^{x-1}}=\frac{(x-1)(\ln x-x+1)}{e^{x-1}}$， ……12分

由(1)知 $\ln x-x+1\leqslant0$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$G'(x)<0$，

即 $G(x)=\frac{x^2-x\ln x}{e^{x-1}}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=1$ 时，$G(x)$ 取得最大值.

所以 $G(x)\leqslant G(1)=\frac{1-\ln 1}{e^{1-1}}=1$，故 $\frac{1}{a}\geqslant1$，得到 $0<a\leqslant1$，

所以实数 a 的取值范围为 $(0,1]$. ……15分

3. 【解】(1)分析：先设切点坐标，求出导函数得到切线斜率，再利用直线的点斜式方程写出切线方程的表达式，代入切点坐标得到切点横坐标，进而求得切线方程.

设切点坐标为 $(x_0,\ln x_0)$，对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\frac{1}{x}$，所以切线斜率为 $\frac{1}{x_0}$，

又因为切线过点 $(0,1)$，所以 $y-1=\frac{1}{x_0}(x-0)$，将切点坐标代

入，解得 $x_0=e^2$，所以切线方程为 $\frac{1}{e^2}x+1-y=0$. …… 3 分

(2) 分析：根据导函数的符号得到函数的单调性，进而得出最值.

令 $h(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=e$，当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$.

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $h(x)$ 在 $x=e$ 处取得最大值，最大值为 $h(e)=\frac{1}{e}$.

…… 6 分

(3) 第一步：把问题转化为 $h(x)_{max}\geqslant g(x)_{max}$.

由题设，将存在 $x_1\in(0,+\infty)$，使得对任意 $x_2\in(0,+\infty)$，都有 $\frac{f(x_1)}{x_1}\geqslant g(x_2)$ 成立转化为 $h(x)_{max}\geqslant g(x)_{max}$. …… 8 分

第二步：分 $a=0$，$a>0$，$a<0$ 三种情况讨论 $g(x)$ 的单调性，从而得到 a 的取值范围.

$g'(x)=\frac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}(x>0)$，

①当 $a=0$ 时，$g'(x)=\frac{1}{x}-1$，令 $g'(x)=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $g(1)=-1$，由 (2) 知，$h(x)_{max}=\frac{1}{e}$，又 $\frac{1}{e}>-1$，所以符合题意. …… 9 分

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，即 $2ax^2-(2a+1)x+1=0$，即 $(2ax-1)(x-1)=0$，方程的两个解分别为 $1,\frac{1}{2a}$.

a. 当 $\frac{1}{2a}=1$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，且 $g'(x)$ 不恒为 0，故函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则此时 $g(x)$ 无最大值，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，不符合题意； …… 10 分

b. 当 $\frac{1}{2a}>1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>\frac{1}{2a}$，令 $g'(x)<0$，得 $1<x<\frac{1}{2a}$，故函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$，$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递减，此时函数 $g(x)$ 无最大值，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，不符合题意； …… 11 分

c. 当 $0<\frac{1}{2a}<1$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2a}$ 或 $x>1$，令 $g'(x)<0$，得 $\frac{1}{2a}<x<1$，故函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2a}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2a},1\right)$ 上单调递减，则此时函数 $g(x)$ 无最大值，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，不符合题意. …… 12 分

③当 $a<0$，即 $\frac{1}{2a}<0$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$，令 $g'(x)<0$，得 $x>1$，故函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，此时函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $g(1)=$

$-a-1$，所以$\frac{1}{e}\geqslant -a-1$，即$-\frac{1}{e}-1\leqslant a<0$. …… 14分

综上所述，实数a的取值范围是$\left[-\frac{1}{e}-1,0\right)$. …… 15分

4.【解】(1)分析：设$P(x,y)$为$g(x)$图象上任意一点，根据点P关于点$(2,3)$的对称点为$Q(4-x,6-y)$，且点Q在$f(x)$的图象上求解.

当$\lambda=2$时，$f(x)=2x-e^x$，设$P(x,y)$为$g(x)$图象上任意一点，

则点P关于点$(2,3)$的对称点为$Q(4-x,6-y)$，且点Q在$f(x)$的图象上，所以$6-y=2(4-x)-e^{4-x}$，即$y=2x-2+e^{4-x}$，

所以$g(x)=2x-2+e^{4-x}$. …… 4分

(2)分析：通过分类讨论λ的范围，得到$f'(x)$的符号，进而得到函数$f(x)$在$[2,6]$上的单调性.

因为$f(x)=\lambda x-e^x$，所以$f'(x)=\lambda-e^x$，当$x\in[2,6]$时，$e^x\in[e^2,e^6]$.

①当$\lambda\leqslant e^2$时，$f'(x)\leqslant 0$且不恒为0，所以$f(x)$在$[2,6]$上单调递减；…… 5分

②当$\lambda\geqslant e^6$时，$f'(x)\geqslant 0$且不恒为0，所以$f(x)$在$[2,6]$上单调递增；…… 6分

③当$e^2<\lambda<e^6$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\ln\lambda$，

当$x\in[2,\ln\lambda)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in(\ln\lambda,6]$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. …… 7分

综上，当$\lambda\leqslant e^2$时，$f(x)$在$[2,6]$上单调递减；当$\lambda\geqslant e^6$时，$f(x)$在$[2,6]$上单调递增；当$e^2<\lambda<e^6$时，$f(x)$在$[2,\ln\lambda)$上单调递增，在$(\ln\lambda,6]$上单调递减. …… 8分

(3)第一步：转化题干中的不等式.

不等式$f(x)+e^x\leqslant\frac{1}{6}x^3+\sin x$在$[0,+\infty)$上恒成立，

则$\lambda x\leqslant\frac{1}{6}x^3+\sin x$在$[0,+\infty)$上恒成立，即$\frac{1}{6}x^3+\sin x-\lambda x\geqslant 0$在$[0,+\infty)$上恒成立. …… 10分

第二步：构造函数，分类讨论.

设$h(x)=\frac{1}{6}x^3+\sin x-\lambda x,x\in[0,+\infty)$，

则$h'(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x-\lambda$，

令$\varphi(x)=h'(x)(x\geqslant 0)$，则$\varphi'(x)=x-\sin x$，

令$m(x)=\varphi'(x)=x-\sin x(x\geqslant 0)$，则$m'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，故$m(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，且$m(0)=0$，

所以$m(x)=\varphi'(x)\geqslant 0$，所以$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，且$\varphi(0)=1-\lambda$， …… 13分

当$\lambda\leqslant 1$时，$\varphi(0)=1-\lambda\geqslant 0$，则$h'(x)\geqslant 0$且不恒为0，故$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，且$h(0)=0$，故$h(x)\geqslant 0$恒成立，满足题意； …… 15分

当$\lambda>1$时，$\varphi(0)<0$，且当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to+\infty$，则存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$\varphi(x_0)=h'(x_0)=0$，且当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，则$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，又$h(0)=0$，则当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)<0$，不满足题意.

故λ的取值范围是$(-\infty,1]$. …… 17分

题型4　同构问题

1. (1)【解】由题可知$f'(x)=\dfrac{e^{x-1}(x\ln x+1-\ln x)}{x^2}$,则$f'(1)=1$,

又$f(1)=0$,故所求切线方程为$y=1\times(x-1)$,即$y=x-1$.

…… 3分

(2)【证明】第一步:指对互化,找到同构式.

当$x\in(0,2)$时,要证$f(x)\leqslant x-1$,即证$\dfrac{\ln x}{x}\leqslant\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$,即证$\dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}\leqslant\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$在$x\in(0,2)$时恒成立. …… 5分

第二步:构造函数$p(x)=\dfrac{x}{e^x}$,利用导数求出其单调区间.

令$p(x)=\dfrac{x}{e^x}$,则$p'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$,故当$x<1$时,$p'(x)>0$,当$x>1$时,$p'(x)<0$,所以$p(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减. …… 7分

第三步:构造函数$t(x)=\ln x-x+1(x>0)$,利用导数可得$\ln x\leqslant x-1$,再由$x\in(0,2)$可得$\begin{cases}\ln x<1,\\x-1<1,\end{cases}$从而可证得结论.

令$t(x)=\ln x-x+1(x>0)$,则$t'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,

故当$0<x<1$时,$t'(x)>0$,当$x>1$时,$t'(x)<0$,所以$t(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,

则$t(x)_{\max}=t(1)=0$,故$\ln x\leqslant x-1$. …… 10分

当$x\in(0,2)$时,有$\begin{cases}\ln x<1,\\x-1<1,\end{cases}$故$p(\ln x)\leqslant p(x-1)$,

即$\dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}\leqslant\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$在$x\in(0,2)$时恒成立,

故当$x\in(0,2)$时,$f(x)\leqslant x-1$. …… 15分

2.【解】(1)分析:先求$f(x)$的定义域,然后求导研究函数的单调性、极值.

$f(x)=x^2\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$,对$f(x)$求导得$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$,

令$f'(x)>0$,即$2\ln x+1>0$,解得$x>e^{-\frac{1}{2}}$,

令$f'(x)<0$,即$2\ln x+1<0$,解得$0<x<e^{-\frac{1}{2}}$,

所以$f(x)$在$(0,e^{-\frac{1}{2}})$上单调递减,在$(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$上单调递增,

所以$f(x)=x^2\ln x$在$x=e^{-\frac{1}{2}}$处取得极小值,极小值为$f(e^{-\frac{1}{2}})=-\dfrac{1}{2e}$,无极大值. …… 5分

(2)分析:先求$g(x)$的定义域,利用导数研究其单调区间.

当$a\neq0$时,$g(x)=a\cdot e^{\frac{a}{x}}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

$g'(x)=a\cdot e^{\frac{a}{x}}\cdot\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)=-\dfrac{a^2e^{\frac{a}{x}}}{x^2}<0$,

故当$a\neq0$时,$g(x)=a\cdot e^{\frac{a}{x}}$的单调递减区间为$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$,无单调递增区间. …… 8分

(3)第一步:将不等式变形后,指对互化,构造同构式.

对$\forall x\in(1,+\infty)$，有$x^2\ln x>a\cdot e^{\frac{a}{x}}$，即$x\ln x>\frac{a}{x}\cdot e^{\frac{a}{x}}$，即$\ln x\cdot e^{\ln x}>\frac{a}{x}\cdot e^{\frac{a}{x}}$，其中$\ln x>0$. …… 10分

第二步：构造函数$q(x)=x\cdot e^x$，得$q(\ln x)>q\left(\frac{a}{x}\right)$，求导，考虑$a\geqslant 0$和$a<0$两种情况，结合单调性得到不等式，求出答案.

令$q(x)=x\cdot e^x$，则$q(\ln x)>q\left(\frac{a}{x}\right)$，$q'(x)=(1+x)e^x$，

若$a\geqslant 0$，则$\frac{a}{x}\geqslant 0$，又$q'(x)=(1+x)e^x>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，故$q(x)=x\cdot e^x$在$x\in(0,+\infty)$上单调递增，

所以$\ln x>\frac{a}{x}$，即$x\ln x>a$. …… 12分

令$w(x)=x\ln x$，$x>1$，则$w'(x)=1+\ln x>0$，故$w(x)=x\ln x$在$x\in(1,+\infty)$上单调递增，故$w(x)>w(1)=0$，即$x\ln x>0$，所以$a\leqslant 0$，与$a\geqslant 0$取交集，故$a=0$. …… 14分

若$a<0$，则$\frac{a}{x}<0$，易知当$x<0$时，$q(x)=x\cdot e^x<0$恒成立，当$x>0$时，$q(x)=x\cdot e^x>0$恒成立，所以$q(\ln x)>0>q\left(\frac{a}{x}\right)$，满足要求. …… 16分

综上，a的取值范围是$(-\infty,0]$. …… 17分

题型5　放缩问题

1. (1)【解】分析：根据导函数的几何意义，求出参数的值.

若x轴是曲线$y=f(x)$的一条切线，即存在x_0，使$f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$， …… 2分

求导得$f'(x)=e^x-1$，由$f'(x_0)=e^{x_0}-1=0$，解得$x_0=0$，

则$f(0)=e^0+a=0$，解得$a=-1$. …… 4分

(2)【解】分析：分离参数，将问题进行转化，构造函数，利用其导数求出最小值，根据恒成立的意义求出参数范围并得出参数最小值.

$f(x)\geqslant 0$在$x\in\mathbf{R}$上恒成立，即$e^x-x\geqslant -a$在$x\in\mathbf{R}$上恒成立， …… 5分

设$g(x)=e^x-x$，则$g'(x)=e^x-1$，

当$x<0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

当$x>0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$x=0$时，$g'(x)=0$，$g(x)$取得极小值，即最小值，$g(0)=e^0-0=1$， …… 7分

所以$-a\leqslant 1$，即$a\geqslant -1$. 所以a的最小值为-1. …… 9分

(3)【证明】分析：利用$e^x\geqslant x+1$，当且仅当$x=0$时等号成立，得到关于e的不等式后构造函数，再使用放缩法证明不等式即可.

由(2)可知$e^x-x-1\geqslant 0$，则$e^x\geqslant x+1$，当且仅当$x=0$时取等号. …… 10分

所以$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^1\cdot e^{\frac{1}{4}}\cdot\cdots\cdot e^{\frac{1}{n^2}}$($n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$). …… 12分

令$y=e^1\cdot e^{\frac{1}{4}}\cdot\cdots\cdot e^{\frac{1}{n^2}}=e^{1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}}$($n\in\mathbf{N}^*$且$n\geqslant 2$)，由$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，得$1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+$

$\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，化简得 $1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}<2$，所以 $y<e^2$，

即得 $(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^2$（$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$），原命题得证. …… 15 分

2.【解】(1) 分析：求导，利用导数求解.

若 $m>0$，则 $f'(x)=(x-1)(mx+2-m)e^{mx}=m(x-1)\cdot\left(x-\frac{m-2}{m}\right)e^{mx}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=\frac{m-2}{m}=1-\frac{2}{m}$，因为 $m>0$，所以 $1-\frac{2}{m}<1$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$ 或 $x<1-\frac{2}{m}$，令 $f'(x)<0$，得 $1-\frac{2}{m}<x<1$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$ 和 $\left(-\infty,1-\frac{2}{m}\right)$，

单调递减区间为 $\left(1-\frac{2}{m},1\right)$. …… 4 分

(2) 分析：依据题设条件，先将不等式进行化简，再构造函数，利用导数对参数进行分类讨论即可求解.

因为 $af(x)\leqslant(x-2)e^{(m+1)x}+e^{mx+1}$（$x\geqslant 0$）恒成立，所以 $a(x-1)^2e^{mx}\leqslant(x-2)e^{(m+1)x}+e^{mx+1}$ 恒成立，即 $a(x-1)^2e^{mx}\leqslant(x-2)e^x\cdot e^{mx}+e\cdot e^{mx}$ 恒成立，

因为 $e^{mx}>0$，所以 $a(x-1)^2\leqslant(x-2)e^x+e$ 对 $x\geqslant 0$ 恒成立.

…… 6 分

令 $g(x)=(x-2)e^x-a(x-1)^2+e(x\geqslant 0)$，则 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，

因为 $g(0)=e-2-a$，所以 $g(0)\geqslant 0$，故 $a\leqslant e-2$. …… 8 分

又 $g'(x)=(x-1)(e^x-2a)$，

若 $a\leqslant 0$，则 $e^x-2a>0$，令 $g'(x)>0$，得 $x>1$，令 $g'(x)<0$，得 $0\leqslant x<1$，所以函数 $g(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=0$ 成立. …… 9 分

若 $a>0$，令 $g'(x)=0$，则 $x=1$ 或 $x=\ln(2a)$，

因为 $0<a\leqslant e-2<1$，所以 $0<2a<2$，当 $0<2a\leqslant 1$，即 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\ln(2a)\leqslant 0$，由题知 $x\geqslant 0$，所以 $x=\ln(2a)$ 不满足题意.

所以令 $g'(x)>0$，得 $x>1$，令 $g'(x)<0$，得 $0\leqslant x<1$，所以函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $[0,1)$ 上单调递减，所以 $g(x)\geqslant g(1)=0$ 恒成立； …… 10 分

当 $1<2a<2$，即 $\frac{1}{2}<a\leqslant e-2<1$ 时，$0<\ln(2a)<1$，令 $g'(x)>0$，得 $x>1$ 或 $0\leqslant x<\ln(2a)$，令 $g'(x)<0$，得 $\ln(2a)<x<1$，所以函数 $g(x)$ 在 $[0,\ln(2a))$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln(2a),1)$ 上单调递减，

所以函数 $g(x)$ 的最小值在 $x=0$ 或 $x=1$ 处取得，因为 $g(0)=e-2-a\geqslant 0$，$g(1)=0$，所以 $g(x)\geqslant 0$ 成立. …… 11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,e-2]$. …… 12 分

(3) 第一步：构造函数 $h(x)=\ln x-x+1(x>0)$，利用导数证明 $\ln x\leqslant x-1$.

设 $h(x)=\ln x-x+1$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{x}$，当 $h'(x)>0$ 时，$0<x<1$，当 $h'(x)<0$ 时，$x>1$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(x)\leqslant h(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$.

…… 13 分

第二步：对 $\left(\frac{k}{n}\right)^n$ 进行适当的放大，然后利用等比数列的求

和公式计算，最后得到正整数 t 的最小值.

所以 $\ln\left(\frac{k}{n}\right)^n = n\ln\frac{k}{n} \leqslant n\left(\frac{k}{n}-1\right) = k-n\ (k, n\in\mathbf{N}^*)$，故 $\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant e^{k-n}$，所以 $\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n \leqslant e^{1-n}+e^{2-n}+e^{3-n}+\cdots+e^0 = \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}$，

故 $\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{3}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n \leqslant \frac{\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right]e}{e-1} < \frac{e}{e-1}$.

因为 $1<\frac{e}{e-1}<2$，所以正整数 t 满足 $t\geqslant 2$.

又因为当 $n=2$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}>1$，所以正整数 t 的最小值为 2. …… 17 分

题型 6　极值点偏移问题

1.【解】(1) 分析：先确定函数 $f(x)$ 的定义域，再对其求导得到 $f'(x)$，然后根据 a 的取值范围进行分类讨论即可.

易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，又 $f'(x) = \frac{4}{x}-ax+4-a = -\frac{(x+1)(ax-4)}{x}$.

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

…… 2 分

若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\frac{4}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{4}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{4}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{4}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. …… 4 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{4}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{4}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

…… 5 分

(2) 分析：求出 $f'(x_0)$ 的表达式，通过对 $f'(x_0)$ 与 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 作差得到关于 $\frac{x_2}{x_1}$ 的表达式，构造函数 $g(t)$ $\left(t=\frac{x_2}{x_1}\right)$ 并判断其单调性，进而得出 $f'(x_0)$ 与 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小关系，再结合 $f'(x)$ 的单调性即可得结论.

结论：$x_1+x_2>2x_0$. …… 6 分

证明：由(1)知，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 存在极值.

$f(x_2)-f(x_1) = 4(\ln x_2-\ln x_1)-\frac{1}{2}a(x_2+x_1)(x_2-x_1)+(4-a)(x_2-x_1)$，由 $f(x_2)-f(x_1) = f'(x_0)(x_2-x_1)$，$0<x_1<x_2$，得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，

则 $f'(x_0) = \frac{4(\ln x_2-\ln x_1)}{x_2-x_1}-\frac{1}{2}a(x_2+x_1)+4-a$，

又 $f'(x) = \frac{4}{x}-ax+4-a$，则 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{8}{x_1+x_2}-a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+4-a$，

所以 $f'(x_0)-f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{4(\ln x_2-\ln x_1)}{x_2-x_1}-\frac{8}{x_2+x_1} =$

$$\frac{4}{x_2-x_1}\left[(\ln x_2-\ln x_1)-\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}\right]=\frac{4}{x_2-x_1}\left[\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}\right].$$

……10分

设$\frac{x_2}{x_1}=t,t>1$，则$\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$. …11分

令$g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$g(t)>g(1)=0$，

故$\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}>0$. ……13分

又$0<x_1<x_2$，即$x_2-x_1>0$，所以$f'(x_0)-f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，

即$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(x_0)$.

又由$f'(x)=\frac{4}{x}-ax+4-a$可知$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

则$\frac{x_1+x_2}{2}>x_0$，即$x_1+x_2>2x_0$. ……15分

2.【解】(1)分析：通过二次求导逐步确定$f(x)$的单调性.

当$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=e^{x-1}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$，

则$f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

令$g(x)=f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(x>0)$，则$g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}$.

令$g'(x)=0$，解得$x=1+\ln\frac{1}{2}=1-\ln 2$， ……2分

故当$x\in(0,1-\ln 2)$时，$g'(x)<0$，当$x\in(1-\ln 2,+\infty)$时，$g'(x)>0$，

即$g(x)$在$(0,1-\ln 2)$上单调递减，在$(1-\ln 2,+\infty)$上单调递增.

∵$g(1)=f'(1)=0$，∴$g(1-\ln 2)<g(1)=0$，即$f'(1-\ln 2)<0$，

又$g(0)=f'(0)=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}<0$，

∴当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

故$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

……4分

(2)(i)第一步：将极值点个数问题转化为导函数变号零点个数问题，分离参数后转化为两函数图象交点个数问题.

由题意知$f'(x)=e^{x-1}-ax-a$.

∵$f(x)$存在两个极值点x_1,x_2，

∴$f'(x)$存在两个变号零点x_1,x_2.

令$f'(x)=0$，即$e^{x-1}-a(x+1)=0$，显然$x=-1$不是方程$e^{x-1}-a(x+1)=0$的根，

∴$a=\frac{e^{x-1}}{x+1}$有两个不等实根x_1,x_2.

设 $h(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x+1}(x\neq -1)$，则直线 $y=a$ 与 $h(x)$ 的图象有两个不同的交点. …… 6 分

第二步：利用导数研究 $h(x)$ 的单调性，进而得到 $h(x)$ 的大致图象，数形结合求得 a 的取值范围.

$h'(x)=\dfrac{xe^{x-1}}{(x+1)^2}(x\neq -1)$，则当 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

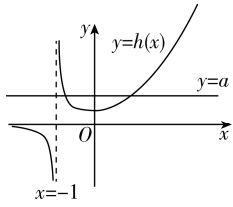
当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to 0$；

当 x 从左侧趋近 -1 时，$h(x)\to-\infty$；

当 x 从右侧趋近 -1 时，$h(x)\to+\infty$；

当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$；$h(0)=\dfrac{1}{e}$.

由此可得 $h(x)$ 的大致图象如图所示.



若直线 $y=a$ 与 $h(x)$ 的图象有两个不同的交点，则 $a\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$，

即 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. …… 8 分

(ii) 第一步：换元简化形式，分析两个新元之和的取值范围.

由(i)知，$a=\dfrac{e^{x_1-1}}{x_1+1}=\dfrac{e^{x_2-1}}{x_2+1}$，$x_1\in(-1,0)$，$x_2\in(0,+\infty)$.

令 $t_1=x_1+1\in(0,1)$，$t_2=x_2+1\in(1,+\infty)$，且 $t_1<t_2$，

则 $t_1+t_2=x_1+x_2+2\in\left[\dfrac{2}{e-1}+1,2\ln 3\right)$. …… 10 分

第二步：通过比值代换完成消元.

则 $a=\dfrac{e^{t_1-2}}{t_1}=\dfrac{e^{t_2-2}}{t_2}$，

$\therefore \ln a=t_1-2-\ln t_1=t_2-2-\ln t_2$，

设 $m=\dfrac{t_2}{t_1}(m>1)$，则 $t_2=mt_1$，得 $t_1-2-\ln t_1=mt_1-2-\ln m-\ln t_1$，

$\therefore t_1=\dfrac{\ln m}{m-1}$，$t_2=\dfrac{m\ln m}{m-1}$，

$\therefore t_1+t_2=\dfrac{(m+1)\ln m}{m-1}\in\left[\dfrac{2}{e-1}+1,2\ln 3\right)$. …… 12 分

第三步：构造函数 $\varphi(m)$，多次求导判断出 $\varphi(m)$ 的单调性，结合 $\varphi(m)\in\left[\dfrac{2}{e-1}+1,2\ln 3\right)$ 求解.

设 $\varphi(m)=\dfrac{(m+1)\ln m}{m-1}(m>1)$，则 $\varphi'(m)=\dfrac{m^2-1-2m\ln m}{m(m-1)^2}$.

…… 13 分

令 $p(m)=m^2-1-2m\ln m(m>1)$，则 $p'(m)=2m-2\ln m-2=2(m-1-\ln m)$.

令 $q(m)=p'(m)$，则 $q'(m)=2-\dfrac{2}{m}=\dfrac{2m-2}{m}>0$，

$\therefore p'(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，得 $p'(m)>p'(1)=0$，

$\therefore p(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore p(m)>p(1)=0$，即 $\varphi'(m)>0$，

$\therefore \varphi(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. …… 15 分

又 $\varphi(e)=\dfrac{e+1}{e-1}=\dfrac{2}{e-1}+1$，$\varphi(3)=2\ln 3$，$\therefore e\leqslant m\leqslant 3$，

$\therefore e\leqslant\dfrac{t_2}{t_1}\leqslant 3$，即$\dfrac{x_2+1}{x_1+1}$的取值范围为$[e,3]$. …… 17 分

专题 7 ▸ 新定义问题

1.【解】(1) 分析：求出数列 $\{\Delta a_n\}$ 的通项公式，结合二阶等差数列的定义判断.

因为 $a_n=4n^2-5n+3$，所以 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=[4(n+1)^2-5(n+1)+3]-(4n^2-5n+3)=8n-1$，…… 2 分

所以 $\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=[8(n+1)-1]-(8n-1)=8$，故数列 $\{\Delta a_n\}$ 为等差数列，故数列 $\{a_n\}$ 为二阶等差数列. …… 5 分

(2) ①第一步：求出等差数列 $\{\Delta a_n\}$ 的通项公式，得到 a_{n+1} 与 a_n 的关系.

根据题意可得 $\Delta a_1=a_2-a_1=1-0=1$，$\Delta a_2=a_3-a_2=3-1=2$，

因为数列 $\{\Delta a_n\}$ 为等差数列，所以数列 $\{\Delta a_n\}$ 的公差为 $\Delta a_2-\Delta a_1=2-1=1$，

故 $\Delta a_n=1+(n-1)\times 1=n$，所以 $a_{n+1}-a_n=\Delta a_n=n$. …… 7 分

第二步：利用累加法求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=2$，$\cdots$，$a_n-a_{n-1}=n-1$，

以上各式等号两边分别相加得 $a_n-a_1=1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$，故 $a_n=a_1+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$，又 $a_1=0$ 也满足该式，故对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$. … 10 分

②第一步：分离参数，得到关于 k 的不等式.

由题意可知 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<k\cdot 2^{n-1}$，即$\dfrac{n^2-n}{2}<k\cdot 2^{n-1}$，易知 $2^{n-1}>0$，故 $k>\dfrac{n^2-n}{2^n}$. …… 11 分

第二步：令 $b_n=\dfrac{n^2-n}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，分析数列 $\{b_n\}$ 的单调性，求出该数列的最大项.

令 $b_n=\dfrac{n^2-n}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{(n+1)^2-(n+1)}{2^{n+1}}-\dfrac{n^2-n}{2^n}=\dfrac{n(3-n)}{2^{n+1}}$，…… 12 分

当 $n\leqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_{n+1}>b_n$，可得 $b_1<b_2<b_3$；

当 $n=3$ 时，可得 $b_3=b_4$；

当 $n\geqslant 4$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_{n+1}<b_n$，可得 $b_4>b_5>b_6>\cdots$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_4=b_3=\dfrac{3^2-3}{2^3}=\dfrac{3}{4}$，…… 14 分

第三步：求实数 k 的取值范围.

故 $k>\dfrac{3}{4}$，所以实数 k 的取值范围是$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$. …… 15 分

2.【解】(1) 分析：利用定义求解即可.

由题意，若 $f(x)=2\sin x$，

令 $f(x)\cdot f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin x\cdot 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=4\sin x\cdot\cos x=2\sin 2x=1$，得 $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$，…… 2 分

所以 $2x=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，则 $x=k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，

故 $M_{\frac{\pi}{2}}=\left\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\text{ 或 }x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$. …… 4分

(2) 第一步：集合 M_2 中的元素即为方程 $f(x)f(x+2)=1$ 的解，结合 $x,x+2$ 所在区间分类讨论方程解的情况.

设 $g(x)=f(x)\cdot f(x+2)-1,x\in\mathbf{R}$.

①当 $x\geqslant 0$ 时，$x+2>0$，所以 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}},f(x+2)=e^{-\frac{x+2}{2}}$，

$g(x)=f(x)\cdot f(x+2)-1=e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{-\frac{x+2}{2}}-1=e^{-(x+1)}-1<0$，

此时方程 $g(x)=0$ 无解. …… 6分

②当 $x<-2$ 时，$x+2<0$，$g(x)=(x+a)(x+2+a)-1$，

令 $g(x)=0$，得 $x^2+(2a+2)x+a^2+2a-1=0$，因为 $\Delta=(2a+2)^2-4(a^2+2a-1)=8>0$，

所以方程 $x^2+(2a+2)x+a^2+2a-1=0$ 在实数范围内有两个不相等的实数解，为 $-a-1\pm\sqrt{2}$，

所以方程 $g(x)=0$ 在 $(-\infty,-2)$ 上最多有两个解. …… 8分

③当 $-2\leqslant x<0$ 时，$0\leqslant x+2<2$，所以 $f(x)=x+a,f(x+2)=e^{-\frac{x+2}{2}}$，

由 $f(x)f(x+2)=1$ 得 $e^{\frac{x+2}{2}}=x+a$，

令 $h(x)=e^{\frac{x+2}{2}}-x-a,x\in[-2,0)$，得 $h'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x+2}{2}}-1$，

令 $h'(x)=0$，即 $\frac{1}{2}e^{\frac{x+2}{2}}-1=0$，解得 $x=2\ln 2-2$，

易知 $h'(x)$ 在 $[-2,0)$ 上单调递增，

所以当 $x\in[-2,2\ln 2-2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(2\ln 2-2,0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(2\ln 2-2)=e^{\ln 2}-(2\ln 2-2)-a=4-2\ln 2-a$，

$h(-2)=3-a,h(0)=e-a$，

此时方程 $h(x)=0$ 在 $[-2,0)$ 上最多有两个解. …… 11分

第二步：分析满足集合 M_2 的元素数量对应的方程的解的情况，得不等式组，求出参数范围.

为了满足集合 M_2 中有3个元素，

则需方程 $x^2+(2a+2)x+a^2+2a-1=0$ 在 $(-\infty,-2)$ 上有两个解且方程 $h(x)=0$ 在 $[-2,0)$ 上有一个解或者方程 $x^2+(2a+2)x+a^2+2a-1=0$ 在 $(-\infty,-2)$ 上有一个解且方程 $h(x)=0$ 在 $[-2,0)$ 上有两个解，

所以 $\begin{cases}-a-1-\sqrt{2}<-2,\\-a-1+\sqrt{2}<-2,\\4-2\ln 2-a=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-a-1-\sqrt{2}<-2,\\-a-1+\sqrt{2}<-2,\\e-a\leqslant 0,\\3-a\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-a-1-\sqrt{2}<-2,\\-a-1+\sqrt{2}\geqslant -2,\\4-2\ln 2-a<0,\\e-a>0,\end{cases}$

分别解得 $a=4-2\ln 2$ 或 $e\leqslant a\leqslant 3$ 或无解，

综上，a 的取值范围是 $\{a\mid a=4-2\ln 2\text{ 或 }e\leqslant a\leqslant 3\}$. …… 14分

(3) 分析：先给出符合要求的函数，如 $f(x)=e^{\sin x}$，再证明该函数符合定义要求.

存在，$f(x)=e^{\sin x}$（答案不唯一）. …… 15分

证明：对于 $f(x)=e^{\sin x}$，$f(x+\pi)=e^{\sin(x+\pi)}=e^{-\sin x}$，

则 $f(x)f(x+\pi)=e^{\sin x}e^{-\sin x}=1$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

则 $f(x)=e^{\sin x}$ 满足 $M_\pi=\mathbf{R}$，符合题意. …… 17分