18~19 题 · 夺高分

题组 1

18. (1)【解】分析：根据古典概型概率计算公式，结合分步乘法计数原理计算即可得解.

设“恰好两次操作后盒子中小球的颜色全部相同”为事件 A，

根据操作规则，事件 A 发生即“恰好两次操作后，盒子中 5 个小球的颜色都为黑色”，且两次操作中有一次取出 1 个红球和 1 个黑球，有一次取出 2 个红球，…… 1 分

所以 $P(A)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\dfrac{C_2^2}{C_5^2}+\dfrac{C_3^2}{C_5^2}\times\dfrac{C_1^1C_4^1}{C_5^2}=\dfrac{9}{50}$. …… 3 分

(2)【解】分析：确定随机变量的取值，根据古典概型概率计算公式及分步乘法计数原理计算对应取值的概率，进而得到分布列.

操作两次后，X_2 的可能取值为 2,3,4,5，…… 4 分

$$P(X_2=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{100},$$

$$P(X_2=3)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{24}{100}=\frac{6}{25},$$

$$P(X_2=4)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^2}{C_5^2}+\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{57}{100},$$

$$P(X_2=5)=\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_1^1C_4^1}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{18}{100}=\frac{9}{50},$$ …… 6 分

所以 X_2 的分布列为

X_2	2	3	4	5
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{57}{100}$	$\frac{9}{50}$

…… 8 分

(3)【证明】分析：根据题意推出 $E(X_{n+1})=\dfrac{3}{5}E(X_n)+2$，得到数列 $\{E(X_n)-5\}$ 为等比数列，从而得到 $E(X_n)$ 的表达式，即可证明结论.

设 $P(X_n=k)=p_k,k=2,3,4,5$，

则 $p_2+p_3+p_4+p_5=1,E(X_n)=2p_2+3p_3+4p_4+5p_5$，…… 9 分

故 $P(X_{n+1}=2)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}p_2=\dfrac{1}{10}p_2$，

$$P(X_{n+1}=3)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}p_2+\frac{C_3^2}{C_5^2}p_3=\frac{3}{5}p_2+\frac{3}{10}p_3,$$

$$P(X_{n+1}=4)=\frac{C_3^2}{C_5^2}p_2+\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}p_3+\frac{C_4^2}{C_5^2}p_4=\frac{3}{10}p_2+\frac{3}{5}p_3+\frac{3}{5}p_4,$$

$$P(X_{n+1}=5)=\frac{C_2^2}{C_5^2}p_3+\frac{C_1^1C_4^1}{C_5^2}p_4+\frac{C_5^2}{C_5^2}p_5=\frac{1}{10}p_3+\frac{2}{5}p_4+p_5,$$

…… 11 分

所以 $E(X_{n+1})=\dfrac{1}{5}p_2+\left(\dfrac{9}{5}p_2+\dfrac{9}{10}p_3\right)+\left(\dfrac{6}{5}p_2+\dfrac{12}{5}p_3+\dfrac{12}{5}p_4\right)+\left(\dfrac{1}{2}p_3+2p_4+5p_5\right)$

$=\left(\dfrac{6}{5}p_2+\dfrac{9}{5}p_3+\dfrac{12}{5}p_4+3p_5\right)+2(p_2+p_3+p_4+p_5)$

$=\frac{3}{5}(2p_2+3p_3+4p_4+5p_5)+2(p_2+p_3+p_4+p_5)$

$=\frac{3}{5}E(X_n)+2,$

所以 $E(X_{n+1})-5=\frac{3}{5}[E(X_n)-5]$. …… 13 分

又 $E(X_1)=2\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+3\times\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}+4\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{16}{5}$，所以 $E(X_1)-5=-\frac{9}{5}\neq0$，则 $\{E(X_n)-5\}$ 是以 $-\frac{9}{5}$ 为首项，$\frac{3}{5}$ 为公比的等比数列，所以 $E(X_n)-5=-\frac{9}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$， …… 15 分

故 $E(X_n)=5-\frac{9}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}<5$. …… 17 分

19. (1)【解】分析：由函数的单调性转化为导函数 $e^x-2ax\geqslant0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，分离参数并构造函数，利用导数求解.

当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x-ax^2$，则 $f'(x)=e^x-2ax$. …… 1 分

由题意可知，$e^x-2ax\geqslant0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $2a\leqslant\frac{e^x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. …… 2 分

设函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(1)=e$，所以 $2a\leqslant e$，即 $a\leqslant\frac{e}{2}$，所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$. …… 4 分

(2)【证明】第一步：假设存在，根据“自公切线”的定义进行转化，得到直线斜率满足的关系式，并进行化简.

当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x-ax^2$，则 $f'(x)=e^x-2ax$.

假设存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 和点 $(x_2,f(x_2))$ 处存在“自公切线”l，则 l 的斜率 $k=e^{x_1}-2ax_1=e^{x_2}-2ax_2$，则 $2k=e^{x_1}+e^{x_2}-2a(x_1+x_2)$，即 $k=\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}-a(x_1+x_2)$.

同时 $k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(e^{x_1}-ax_1^2)-(e^{x_2}-ax_2^2)}{x_1-x_2}=\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}-a(x_1+x_2)$，故 $\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$，即 $\frac{e^{x_1-x_2}-1}{e^{x_1-x_2}+1}=\frac{x_1-x_2}{2}$. …… 6 分

第二步：换元并构造函数，利用导数证明方程不成立，从而得证.

不妨设 $x_1<x_2$，令 $t=x_1-x_2<0$，$F(t)=\frac{e^t-1}{e^t+1}-\frac{t}{2}(t<0)$，则 $F'(t)=\frac{2e^t}{(e^t+1)^2}-\frac{1}{2}=\frac{-(e^t-1)^2}{2(e^t+1)^2}<0$，所以 $F(t)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$F(t)>F(0)=0$，故 $\frac{e^t-1}{e^t+1}=\frac{t}{2}$ 不成立.

所以当 $x>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 不存在“自公切线”. …… 8 分

(3)【解】第一步：结合(2)的分析，求出自公切线斜率满足的关系式，求出所有可能的情况.

因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，又由(2)可得，当 $x>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 不存在“自公切线”，所以当 $x<0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 也不存在“自公切线”.

假设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 和点 $(x_2,f(x_2))$ 处存在“自公切线”l，则 x_1 和 x_2 必须一正一负，不妨设 $x_1<0,x_2>0$，

当 $x<0$ 时，$f(x)=e^{-x}-ax^2$，$f'(x)=-e^{-x}-2ax$，则 l 的斜率 $k=-e^{-x_1}-2ax_1=e^{x_2}-2ax_2$，$2k=-e^{-x_1}-2ax_1+e^{x_2}-2ax_2$，即 $k=\frac{-e^{-x_1}+e^{x_2}}{2}-a(x_1+x_2)$. …… 9 分

同时 $k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(e^{-x_1}-ax_1^2)-(e^{x_2}-ax_2^2)}{x_1-x_2}=\frac{e^{-x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}-a(x_1+x_2)$，所以 $\frac{-e^{-x_1}+e^{x_2}}{2}=\frac{e^{-x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{-e^{-x_1}+e^{x_2}}{x_2-x_1}$，得 $-e^{-x_1}+e^{x_2}=0$ 或 $x_2-x_1=2$，即 $x_1+x_2=0$ 或 $x_2-x_1=2$. …… 11 分

第二步：分别分析 $x_1+x_2=0$ 和 $x_2-x_1=2$ 时的情况，构造函数并分析其单调性，从而得出 a 在各范围内曲线 $y=f(x)$ 是否有“自公切线”.

①当 $x_1+x_2=0$ 时，因为 $k=-e^{-x_1}-2ax_1=e^{x_2}-2ax_2$，所以 $-e^{x_2}+2ax_2=e^{x_2}-2ax_2$，所以 $e^{x_2}-2ax_2=0$.

令 $G(x)=e^x-2ax(x>0)$，则 $G'(x)=e^x-2a$.

当 $2a\leqslant 1$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$G(x)>G(0)=1$，所以函数 $G(x)$ 没有零点，此时没有满足题意的 x_2，即曲线 $y=f(x)$ 没有“自公切线”.

当 $2a>1$，$x\in(0,\ln 2a)$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 单调递减，当 $x\in(\ln 2a,+\infty)$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$ 单调递增，

所以 $G(x)_{\min}=G(\ln 2a)=2a-2a\ln 2a=2a(1-\ln 2a)$，$G(0)=1>0$，且 $x\to+\infty$ 时，$G(x)\to+\infty$，

当 $1<2a<e$，即 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，$G(x)_{\min}>0$，$G(x)$ 没有零点，即曲线 $y=f(x)$ 没有“自公切线”；

当 $2a=e$，即 $a=\frac{e}{2}$ 时，$G(x)_{\min}=0$，$G(x)$ 有一个零点，即曲线 $y=f(x)$ 有一条“自公切线”；

当 $2a>e$，即 $a>\frac{e}{2}$ 时，$G(x)_{\min}<0$，$G(x)$ 有两个零点，即曲线 $y=f(x)$ 有两条“自公切线”. …… 13 分

②当 $x_2-x_1=2$ 时，$x_2=x_1+2$，又 $x_1<0$，$x_2>0$，所以 $-2<x_1<0$，又由 $k=-e^{-x_1}-2ax_1=e^{x_2}-2ax_2$，得 $-e^{-x_1}-2ax_1=e^{x_1+2}-2a(x_1+2)$，所以 $4a=e^{x_1+2}+e^{-x_1}$.

设函数 $H(x)=e^{x+2}+e^{-x}$，$x\in(-2,0)$，则 $H'(x)=e^{x+2}-e^{-x}$，

当 $x\in(-2,-1)$ 时，$H'(x)<0$，$H(x)$ 单调递减，当 $x\in(-1,0)$ 时，$H'(x)>0$，$H(x)$ 单调递增，且 $H(-2)=1+e^2$，$H(-1)=2e$，$H(0)=e^2+1$，所以当 $4a=2e$，即 $a=\frac{e}{2}$ 时，x_1 有一个解，即曲线 $y=f(x)$ 有一条“自公切线”；

当 $2e<4a<e^2+1$，即 $\frac{e}{2}<a<\frac{e^2+1}{4}$ 时，x_1 有两个解，即曲线 $y=f(x)$ 有两条“自公切线”；

当 $4a<2e$ 或 $4a\geqslant e^2+1$，即 $a<\frac{e}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{e^2+1}{4}$ 时，x_1 无解，即曲线 $y=f(x)$ 没有“自公切线”. …… 15 分

第三步：总结分析两种情况下 x_1 和 x_2 的取值，确定最终解.

又因为当 $a=\frac{e}{2}$ 时，在情况①$x_1+x_2=0$ 中，$x_2=1$，$x_1=-x_2=-1$，在情况②$x_2-x_1=2$ 中，$x_1=-1$，$x_2=x_1+2=1$，

所以当 $a=\frac{e}{2}$ 时，$x_1+x_2=0$ 与 $x_2-x_1=2$ 同时成立，曲线 $y=f(x)$ 有且只有一条“自公切线”.

综上所述，若曲线 $y=f(x)$ 有且只有两条“自公切线”，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{e^2+1}{4},+\infty\right)$. …… 17 分

题组2

18.【解】(1) 分析：利用导数的几何意义可求得切线方程，将(0,0)代入，解 b 的值即可.

由题可知 $g'(x)=\cos x-b\cos x+bx\sin x$，则 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{b\pi}{2}$，

又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，所以 $g(x)$ 的图象在点 $\left(\frac{\pi}{2},g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-1=\frac{b\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，将(0,0)代入，解得 $b=\frac{4}{\pi^2}$.

…… 3分

(2)(i) 分析：分 $-1\leqslant a\leqslant 1$，$a>1$ 两种情况结合“理想”函数的定义判断即可.

由题可知 $f'(x)=a\cos x-1$.

①当 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又 $f(0)=0$，故 $x\neq 0$ 时，恒有 $\frac{f(x)}{x}<0$，符合题意. … 5分

②当 $a>1$ 时，$f'(0)=a-1>0$，易知存在 $x_0>0$，使得 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，则 $f(x_0)>f(0)=0$，

又 $f(2a)=a(\sin 2a-2)<0$，故当 $x_1\in(0,x_0)$，$x_2=2a$ 时，$\frac{f(x_1)f(x_2)}{x_1x_2}<0$，不符合题意. …… 7分

综上，实数 a 的取值范围为 $[-1,1]$. …… 8分

(ii) 第一步：写出 $h(x)$ 的表达式，令 $\varphi(x)=\tan x-(b+2)x+2\sin x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，求出 $\varphi'(x)$.

由(i)知 a 取最大值，即 $a=1$，

由题可知 $h(x)=\sin x-bx\cos x+2(\sin x-x)\cos x=\cos x\cdot[\tan x-(b+2)x+2\sin x]$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

令 $\varphi(x)=\tan x-(b+2)x+2\sin x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\varphi'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x-b-2$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

第二步：构造函数，求导判断 $\varphi'(x)$ 的单调性，进而得到 $\varphi(x)$ 的单调性，结合“理想”函数的定义求得 b 的取值范围.

令 $\mu(x)=\varphi'(x)$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mu'(x)=2\left(\frac{1}{\cos^3 x}-1\right)\sin x$，

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$\mu'(x)<0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\mu'(x)>0$，

所以 $\varphi'(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，当 $x>-\frac{\pi}{2}$ 且 $x\to-\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x)\to+\infty$，当 $x<\frac{\pi}{2}$ 且 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x)\to+\infty$，$\varphi'(0)=1-b$. …… 12分

①当 $b\leqslant 1$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$\varphi(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又 $\varphi(0)=0$，故 $\varphi(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上恒小于0，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒大于0，又当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$h(x)=\varphi(x)\cdot\cos x$ 且 $\cos x>0$，故在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上，恒有 $\frac{h(x)}{x}>0$，符合题意. …… 14分

②当 $b>1$ 时，$\varphi'(0)<0$，必存在 $m\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $\varphi'(m)=$

0，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减，在 $\left(m,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，因为 $\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(m)<0$，当 $x<\frac{\pi}{2}$ 且 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，故存在 $n\in\left(m,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $\varphi(n)=0$.

故 $h(x)$ 在 $(0,n)$ 上恒小于 0，在 $\left(n,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒大于 0，则当 $x_3\in(0,n)$，$x_4\in\left(n,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{h(x_3)h(x_4)}{x_3x_4}<0$，不符合题意.

…… 16 分

综上，b 的取值范围为 $(-\infty,1]$. …… 17 分

19.【解】(1) 第一步：利用椭圆的定义求出 a.

由题意，$\triangle F_1PQ$ 的周长为 $4a=8$，所以 $a=2$. …… 2 分

第二步：结合 $\triangle F_1PQ$ 的周长和 $\angle F_1PQ=90°$ 时 $\triangle F_1PQ$ 的面积求出 $|F_1P|$，$|PQ|$，进而求出 c 和 b，得到椭圆 C 的方程.

设 $|F_1P|=m$，$|PQ|=t$，因为当 $\angle F_1PQ=90°$ 时，$\triangle F_1PQ$ 的面积为 $\frac{8}{3}$，所以 $\frac{1}{2}mt=\frac{8}{3}$，即 $mt=\frac{16}{3}$①，

又 $m+t+\sqrt{m^2+t^2}=8$，所以 $m^2+t^2=(8-m-t)^2=64-16m-16t+m^2+t^2+2mt$，

将①代入化简得 $m+t=\frac{14}{3}$②，

①②联立解得 $\begin{cases}m=2,\\ t=\frac{8}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=\frac{8}{3},\\ t=2.\end{cases}$ …… 4 分

当 $m=2$ 时，$m=a$，P 为 C 的上顶点，所以焦距 $2c=2\sqrt{2}$，则 $c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

当 $m=\frac{8}{3}$ 时，$|PF_2|=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$，$(2c)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{80}{9}$，所以 $c^2=\frac{20}{9}$，$b^2=a^2-c^2=4-\frac{20}{9}=\frac{16}{9}$，所以 $b=\frac{4}{3}$，

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1$.

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 或 $\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1$. …… 6 分

(2) 第一步：由 C 的离心率不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，结合(1)得出 C 的唯一方程.

因为 C 的离心率不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

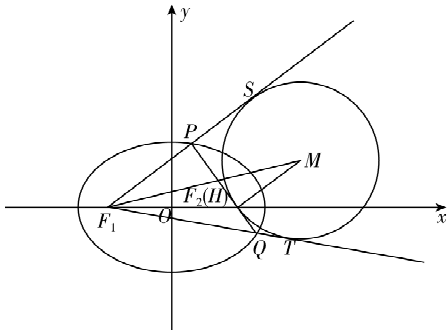
…… 7 分

第二步：设圆 M 分别与 F_1P 的延长线，F_1Q 的延长线和线段 PQ 相切于点 S,T,H，根据切线长定理，结合椭圆定义，可知点 H 与点 F_2 重合.

如图，设圆 M 分别与 F_1P 的延长线，F_1Q 的延长线和线段 PQ 相切于点 S,T,H，

则 $|F_1S|+|F_1T|=|F_1P|+|PS|+|F_1Q|+|QT|=|F_1P|+|PH|+|F_1Q|+|QH|=|F_1P|+|F_1Q|+|PQ|=4a=8$，

又 $|F_1S|=|F_1T|$，所以 $|F_1S|=|F_1T|=4$，则 $|F_1P|+|PH|=4$，故点 H 与点 F_2 重合. …… 8 分



(i) 分析：求出$\triangle F_1MF_2$三边的长度，再根据余弦定理求出$\cos\angle F_1MF_2$.

当圆M的半径为2时，在$\triangle F_1MF_2$中，$|F_1M|=\sqrt{|F_1S|^2+4}=2\sqrt{5}$，$|F_1F_2|=2\sqrt{2}$，$|MF_2|=2$，

所以$\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{20+4-8}{2\times2\sqrt{5}\times2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. …… 10分

(ii) 分析：分直线PQ的斜率存在与不存在两种情况讨论. 当直线PQ的斜率存在时，设出直线PQ的方程，与椭圆C的方程联立求得一元二次方程根与系数的关系的表达式，利用弦长公式求出$|PQ|$的表达式，进而得出$\dfrac{|PQ|^2}{r}$的表达式，利用导数求此时$\dfrac{|PQ|^2}{r}$的最大值. 再求出直线PQ的斜率不存在时$\dfrac{|PQ|^2}{r}$的值，进而得到所求最大值.

当直线PQ的斜率存在时，设直线PQ的方程为$y=k(x-\sqrt{2})$$(k\neq0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

在$\triangle F_1MF_2$中，$|F_1M|^2=16+r^2$，$|MF_2|=r$，$|F_1F_2|=2\sqrt{2}$，所以$\cos\angle F_1F_2M=\dfrac{r^2+8-(16+r^2)}{2\cdot r\cdot2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{r}$，则$\tan\angle F_1F_2M=-\dfrac{\sqrt{r^2-2}}{\sqrt{2}}$$(r>\sqrt{2})$，故直线$MF_2$的斜率$k_{MF_2}=\dfrac{\sqrt{r^2-2}}{\sqrt{2}}$，则$k=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{r^2-2}}$，所以$k^2=\dfrac{2}{r^2-2}$. …… 11分

联立$\begin{cases}y=k(x-\sqrt{2}),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$整理得$(1+2k^2)x^2-4\sqrt{2}k^2x+4k^2-4=0$，

$\Delta=16k^2+16>0$，则$x_1+x_2=\dfrac{4\sqrt{2}k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+2k^2}$， …… 12分

所以$|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{32k^4-4(1+2k^2)(4k^2-4)}}{1+2k^2}=\dfrac{4(1+k^2)}{1+2k^2}$，

所以$\dfrac{|PQ|^2}{r}=\dfrac{16(1+k^2)^2}{r(1+2k^2)^2}=\dfrac{16\left(1+\dfrac{2}{r^2-2}\right)^2}{r\left(1+\dfrac{4}{r^2-2}\right)^2}=\dfrac{16r^3}{(r^2+2)^2}$.

…… 14分

令$f(r)=\dfrac{16r^3}{(r^2+2)^2}$，$r>\sqrt{2}$，

则$f'(r)=\dfrac{48r^2(r^2+2)^2-2(r^2+2)\cdot2r\cdot16r^3}{(r^2+2)^4}=\dfrac{16r^2(6-r^2)}{(r^2+2)^3}$，

当$r\in(\sqrt{2},\sqrt{6})$时，$f'(r)>0$，$f(r)$单调递增，当$r\in(\sqrt{6},+\infty)$时，$f'(r)<0$，$f(r)$单调递减，

所以当 $r=\sqrt{6}$ 时，$f(r)$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$，即 $\frac{|PQ|^2}{r}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

当直线 PQ 的斜率不存在时，设点 P 的纵坐标为 $y_P(y_P>0)$，由 $\frac{(\sqrt{2})^2}{4}+\frac{y_P^2}{2}=1$，解得 $y_P=1$，则 $|PQ|=2$，$|PF_1|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$.

由 $(|PF_1|+|PS|)^2+r^2=(|F_1F_2|+|F_2M|)^2$，得 $(3+1)^2+r^2=(2\sqrt{2}+r)^2$，解得 $r=\sqrt{2}$，此时 $\frac{|PQ|^2}{r}=2\sqrt{2}<\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

综上，$\frac{|PQ|^2}{r}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. …… 17 分

题组 3

18. (1)【解】(i) 第一步：设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，$b_n=dn+b$，化简 S_{b_n}，列出方程组，求出 t 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

$\{b_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d，$b_n=dn+b$，则 $S_n=b_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$，

则 $S_{b_n}=b_1b_n+\frac{b_n(b_n-1)}{2}d=(d+b)(dn+b)+\frac{(dn+b)(dn+b-1)}{2}d=\frac{d^3}{2}n^2+\left(bd+bd^2+\frac{d^2}{2}\right)n+\frac{db}{2}+b^2+\frac{b^2d}{2}=4n^2-22n+t$，

则 $\begin{cases}\frac{d^3}{2}=4,\\ bd+bd^2+\frac{d^2}{2}=-22,\\ \frac{db}{2}+b^2+\frac{b^2d}{2}=t,\end{cases}$

解得 $d=2$，$b=-4$，$t=28$，故 $b_n=2n-4$. …… 4 分

第二步：归纳出 $\{a_n\}$ 的通项公式并利用数学归纳法证明，进而求出 $\{c_n\}$ 的通项公式，最后利用等差数列的定义即可证明 $\{c_n\}$ 为等差数列.

由 $a_n+\frac{1}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$，$a_1=\frac{3}{2}$，可得 $a_2=2-\frac{1}{a_1}=\frac{4}{3}$，$a_3=2-\frac{1}{a_2}=\frac{5}{4}$，由此归纳出 $a_n=\frac{n+2}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$①. …… 6 分

下面用数学归纳法证明：

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{3}{2}$ 满足①式，

假设当 $n=k$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时①式成立，即 $a_k=\frac{k+2}{k+1}$，

则当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}=2-\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+3}{k+2}=\frac{(k+1)+2}{(k+1)+1}$，满足①式.

故 $a_n=\frac{n+2}{n+1}$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{\frac{n+2}{n+1}-1}=n+1$，则 $c_n=b_{\frac{1}{a_n-1}}=b_{n+1}=2(n+1)-4=2n-2$，

则 $c_{n+1}-c_n=2(n+1)-2-(2n-2)=2$，故 $\{c_n\}$ 是等差数列.

…… 8 分

(ii) 分析：列出数列 $\{c_n\}$ 的前 5 项，利用超几何分布的知识求出分布列，利用数学期望公式求解即可.

由(i)可知，$c_1=0,c_2=2,c_3=4,c_4=6,c_5=8$，其中小于5的有3项，大于5的有2项，则$X$的可能取值为1,2,3，

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，

则X的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

…… 11分

则$E(X)=1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{5}$. …… 12分

(2)【证明】第一步：不等式两边取对数并移项，得出需证明$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln\left(\dfrac{n+2}{2}\right)+n$.

欲证$2\cdot e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdot e^{a_3}\cdot\cdots\cdot e^{a_n}>(n+2)e^n$，只需证$\ln(2\cdot e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdot e^{a_3}\cdot\cdots\cdot e^{a_n})>\ln[(n+2)e^n]$，即证$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln\left(\dfrac{n+2}{2}\right)+n$. …… 13分

第二步：证明当$x>1$时，$x>\ln x+1$，即可得出$a_n>\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)+1$，计算证明即可.

令$g(x)=\ln x-x+1,x>1$，则$g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}<0$，则$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，则$g(x)<g(1)=0$，故当$x>1$时，$x>\ln x+1$. …… 14分

因为$a_n=\dfrac{n+2}{n+1}>1$，所以$a_n>\ln a_n+1$，即$a_n>\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)+1$，

则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{4}{3}+\ln\dfrac{5}{4}+\cdots+\ln\dfrac{n+2}{n+1}+n=\ln\left(\dfrac{n+2}{2}\right)+n$，

故$2\cdot e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdot e^{a_3}\cdot\cdots\cdot e^{a_n}>(n+2)e^n$成立. …… 17分

19.【解】(1)分析：当$\triangle MF_1F_2$为等腰三角形时，可得$|MF_2|=|F_1F_2|$或$|MF_1|=|F_1F_2|$，分类讨论求离心率.

设双曲线C的半焦距为$c(c>0)$.

由对称性，不妨设点M在双曲线的右支上，则$|MF_1|>|MF_2|$.

若$|MF_2|=|F_1F_2|$，则$|MF_2|=2c,|MF_1|=2c+2a$，

$\therefore\angle MF_2F_1>\angle MF_1F_2=\angle F_1MF_2$，

$\because\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2}$，$\therefore\angle F_1MF_2>\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\angle MF_2F_1+\angle MF_1F_2+\angle F_1MF_2>\pi$，矛盾. …… 2分

若$|MF_1|=|F_1F_2|$，则$|MF_1|=2c,|MF_2|=2c-2a$，

$\therefore\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{4c^2+(2c-2a)^2-4c^2}{2\cdot2c\cdot(2c-2a)}=\dfrac{1}{4}$，

解得$c=2a$，$\therefore C$的离心率为2. …… 4分

(2)①第一步：求出C的方程，设$l:x=ty+m,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，将$l$和$C$的方程联立得到$y_1+y_2,y_1y_2$的表达式.

由题知，$a=1$，则$c=2,b=\sqrt{3}$，$\therefore C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. …… 5分

由题知，直线l的斜率不为0，设$l:x=ty+m,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\\x=ty+m,\end{cases}$

可得$(3t^2-1)y^2+6tmy+3(m^2-1)=0, 3t^2-1\neq 0$,

则$\Delta=36t^2m^2-12(3t^2-1)(m^2-1)=12(3t^2+m^2-1)>0, y_1+y_2=-\dfrac{6tm}{3t^2-1}, y_1y_2=\dfrac{3(m^2-1)}{3t^2-1}$. …… 7分

第二步：根据$A_2A\perp A_2B$写出向量垂直的坐标表示.

$\because A_2A\perp A_2B, \therefore \overrightarrow{A_2A}\perp\overrightarrow{A_2B}, \therefore \overrightarrow{A_2A}\cdot\overrightarrow{A_2B}=0, \therefore (x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$, …… 8分

第三步：代入一元二次方程根与系数的关系解m，进而求得直线l与x轴交点的坐标.

$\therefore (t^2+1)y_1y_2+t(m-1)(y_1+y_2)+(m-1)^2=0$，即$(t^2+1)\cdot\dfrac{3(m^2-1)}{3t^2-1}+t(m-1)\cdot\left(-\dfrac{6tm}{3t^2-1}\right)+(m-1)^2=0$,

$\therefore m^2+m-2=0, \therefore m=-2$或$m=1$.

当$m=1$时，直线l过点$(1,0)$，不符合题意，舍去.

当$m=-2$时，满足$\Delta>0$.

$\therefore l: x=ty-2, \therefore l$与$x$轴交点的坐标为$(-2,0)$. …… 10分

②第一步：计算$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$，得到$MA$与$MB$的关系.

将$(-4,6)$代入$x=ty+m$中，得$-4=6t+m, \therefore m=-6t-4$,

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-3)(y_2-3)\\&=(ty_1+m-2)(ty_2+m-2)+(y_1-3)(y_2-3)\\&=(t^2+1)y_1y_2+(tm-2t-3)(y_1+y_2)+m^2-4m+13\\&=(t^2+1)\cdot\frac{3(m^2-1)}{3t^2-1}+(tm-2t-3)\cdot\frac{-6tm}{3t^2-1}+m^2-4m+13\\&=\frac{36t^2+2m^2+18tm+4m-16}{3t^2-1}\\&=\frac{36t^2+72t^2+96t+32-108t^2-72t-24t-16-16}{3t^2-1}=0,\end{aligned}$$

$\therefore MA\perp MB$. …… 13分

第二步：利用“费马点”的性质得到$\dfrac{S_1+S_2}{S_3}$的表达式.

$\therefore$“费马点”P在$\triangle MAB$的内部，且$\angle APB=\angle BPM=\angle MPA=120^\circ$,

$$\therefore \frac{S_1+S_2}{S_3}=\frac{\frac{1}{2}(|PA|+|PB|)\cdot|PM|\sin 120^\circ}{\frac{1}{2}|PA|\cdot|PB|\sin 120^\circ}=\frac{(|PA|+|PB|)\cdot|PM|}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{|PM|}{|PA|}+\frac{|PM|}{|PB|}.$$

$\because |MA|^2+|MB|^2=|AB|^2, |MA|^2=|PA|^2+|PM|^2-2|PA|\cdot|PM|\cos 120^\circ, |MB|^2=|PB|^2+|PM|^2-2|PB|\cdot|PM|\cos 120^\circ, |AB|^2=|PA|^2+|PB|^2-2|PA|\cdot|PB|\cos 120^\circ$,

$\therefore |PA|^2+|PM|^2+|PA|\cdot|PM|+|PB|^2+|PM|^2+|PB|\cdot|PM|=|PA|^2+|PB|^2+|PA|\cdot|PB|$,

$\therefore 2|PM|^2+|PA|\cdot|PM|+|PB|\cdot|PM|=|PA|\cdot|PB|$,

即$2+\dfrac{|PA|}{|PM|}+\dfrac{|PB|}{|PM|}=\dfrac{|PA|}{|PM|}\cdot\dfrac{|PB|}{|PM|}$.

令$\dfrac{|PA|}{|PM|}=x(x>0), \dfrac{|PB|}{|PM|}=y(y>0)$,

则$2+x+y=xy, \therefore \dfrac{S_1+S_2}{S_3}=\dfrac{x+y}{xy}=1-\dfrac{2}{xy}$. …… 15分

第三步：利用基本不等式求最值.

$\because 2+x+y=xy\geqslant 2+2\sqrt{xy}$，当且仅当$x=y$时，等号成立，

$\therefore \sqrt{xy}\geqslant 1+\sqrt{3}, \therefore xy\geqslant 4+2\sqrt{3}$.

∴ 当且仅当 $x=y=\sqrt{3}+1$ 时，$\frac{S_1+S_2}{S_3}$ 取得最小值，最小值为 $\sqrt{3}-1$. …… 17 分

题组 4

18.【解】(1) 分析：由题求出相关线段的长度，利用等体积法（$V_{B-PCE}=V_{P-BCE}$），求出点 B 到平面 PCE 的距离 h_B，从而得到 PB 与平面 PCE 所成角的正弦值 $\frac{h_B}{PB}$.

由 P 在底面 ABC 上的射影 E 是线段 AB 上靠近点 A 的四等分点，可得 $PE\perp$ 平面 ABC.

∵ $AB,EC\subset$ 平面 ABC，∴ $PE\perp AB,PE\perp EC$.

由题可知，$AB=4$，$AE=\frac{1}{4}AB=1$，$PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=3$，$PB=\sqrt{PE^2+BE^2}=3\sqrt{2}$，$CE=\sqrt{CA^2+AE^2-2CA\times AE\times\cos 45^\circ}=\sqrt{8+1-2\times2\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{5}$. …… 2 分

设点 B 到平面 PCE 的距离为 h_B.

由 $V_{B-PCE}=V_{P-BCE}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle PCE}\cdot h_B=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot PE$，

∴ $h_B=\frac{S_{\triangle BCE}\cdot PE}{S_{\triangle PCE}}=\frac{\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}\times\sin 45^\circ\times3}{\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

故 PB 与平面 PCE 所成角的正弦值为 $\frac{h_B}{PB}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. …… 6 分

一题多解 分析：证得 $PE\perp AB$，求得 PE 和 PB 的长度，过 B 作 $BG\perp CE$ 交 CE 于点 G，连接 PG，证得 $BG\perp$ 平面 PEC，得到 $\angle BPG$ 为 PB 与平面 PCE 所成的角，在 $\triangle BCE$ 中，求得 CE 的长度，利用面积相等求得 BG 的长度，再在 $\mathrm{Rt}\triangle BPG$ 中，求 $\angle BPG$ 的正弦值即为 PB 与平面 PCE 所成角的正弦值.

由 P 在底面 ABC 上的射影 E 是线段 AB 上靠近点 A 的四等分点，可得 $PE\perp$ 平面 ABC.

∵ $AB\subset$ 平面 ABC，∴ $PE\perp AB$.

由题可知，$AB=4$，$AE=\frac{1}{4}AB=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PAE$ 中，可得 $PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=3$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PBE$ 中，可得 $PB=\sqrt{PE^2+BE^2}=3\sqrt{2}$. …… 2 分

∵ $PE\subset$ 平面 PEC，∴ 平面 $PEC\perp$ 平面 ABC，

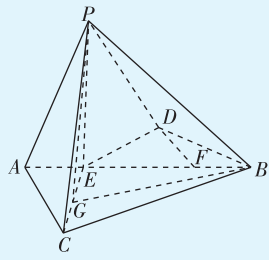
过 B 作 $BG\perp CE$ 交 CE 于点 G，连接 PG，如图①所示，

∵ $BG\subset$ 平面 ABC，平面 $PEC\cap$ 平面 $ABC=CE$，由面面垂直的性质定理，可得 $BG\perp$ 平面 PEC，故 $\angle BPG$ 为 PB 与平面 PCE 所成的角. …… 4 分

在 $\triangle BCE$ 中，$CB=2\sqrt{2}$，$BE=3$，$\angle CBE=45^\circ$，由余弦定理得 $CE^2=CB^2+BE^2-2CB\cdot BE\cos\angle CBE=5$，∴ $CE=\sqrt{5}$.

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}CE\cdot BG=\frac{1}{2}BC\cdot BE\sin 45^\circ$，∴ $BG=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BPG$ 中，$\sin\angle BPG=\frac{BG}{PB}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故直线 PB 与平面 PCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. …… 6 分



图①

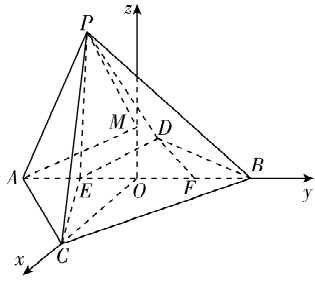
(2)第一步:由几何性质知,三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心在过 AB 的中点 O 且与平面 CAB 垂直的直线上,建立空间直角坐标系,求出点 A,P 的坐标.

设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 M,由几何性质知,球心 M 在过 AB 的中点 O 且与平面 CAB 垂直的直线上,连接 OC,以 O 为原点,OC 所在直线为 x 轴,OB 所在直线为 y 轴,过点 O 且平行于 PE 的直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,如图②所示,则 $A(0,-2,0)$,$P(0,-1,3)$. …… 8分

第二步:设出球心坐标,由半径相等求得外接球半径,进而可求外接球体积.

设 $M(0,0,t)$,外接球 M 的半径为 R,连接 MA,MP,由 $MA=MP=R$,可知 $4+t^2=1+(t-3)^2=R^2$,

$\therefore t=1,R=\sqrt{5}$,故 $M(0,0,1)$,三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$. …… 10分



图②

(3)分析:求出相关点的坐标,设 $D(a,b,0)(a<0)$,求出 a,b 满足的关系式,分别求出平面 PBC 和平面 PBD 的法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$,根据 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$,结合 a,b 满足的关系式和 $a<0$,求得 D 点的坐标,进而可求 DE 的长度.

易知 $C(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$E(0,-1,0)$,$F(0,1,0)$,

设 $D(a,b,0)(a<0)$,由 $DE+DF=4>EF=2$,

可知在平面 xOy 中,D 在以 E,F 为焦点的椭圆上,故 $\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{3}=1$①. …… 12分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

由 $\overrightarrow{PB}=(0,3,-3)$,$\overrightarrow{PC}=(2,1,-3)$,$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}3y_1-3z_1=0,\\ 2x_1+y_1-3z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$.

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

由 $\overrightarrow{BD}=(a,b-2,0)$,$\overrightarrow{PD}=(a,b+1,-3)$,$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}ax_2+(b-2)y_2=0,\\ ax_2+(b+1)y_2-3z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=2-b$，则 $\boldsymbol{n}_2=(2-b,a,a)$. …… 15分

$\because \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\therefore b=2a+2$②.

①②联立解得 $\begin{cases}a=0,\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2},\\b=-1,\end{cases}$

又 $a<0$，故 $\begin{cases}a=0,\\b=2\end{cases}$ 不符合题意，舍去.

$\therefore$ 存在点 D 使得平面 $PBD\perp$ 平面 PBC，且点 D 坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},-1,0\right)$.

$\therefore DE=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+(-1+1)^2}=\dfrac{3}{2}$. …… 17分

19. (1)【证明】分析：将点 $(x,-y)$ 代入曲线方程中验证.

将点 $(x,-y)$ 代入曲线 C 的方程中，得到 $\dfrac{x^2}{x+2}+y^2=1$，与曲线 C 的方程相同，说明点 (x,y) 及其关于 x 轴的对称点 $(x,-y)$ 均在曲线 C 上，所以曲线 C 关于 x 轴对称. …… 2分

(2)【解】第一步：讨论直线 AB 的斜率为 0 的情况.

若直线 AB 的斜率为 0，则 $AB:y=0$，与曲线 C 的方程联立得 $x^2-x-2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$，故此时没有 3 个交点，不合题意. …… 3分

第二步：讨论直线 AB 的斜率不为 0 的情况，设直线 $AB:x=ny-1$，与曲线 C 的方程联立，得到关于 y 的方程，由题知该方程有 3 个根，得到 $\dfrac{|AB|}{|BC|}$ 与方程根的关系，利用换元法，结合一元二次方程根与系数的关系和基本不等式求 $\dfrac{|AB|}{|BC|}$ 的取值范围.

若直线 AB 的斜率不为 0，设直线 $AB:x=ny-1$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{x+2}+y^2=1,\\x=ny-1,\end{cases}$ 可得 $ny^3+(n^2+1)y^2-3ny=0$，即 $y[ny^2+(n^2+1)y-3n]=0$①.

由题意可知 $n\neq0$，因为 $(n^2+1)^2+12n^2>0$，所以①式有 3 个根，设为 $y_1,y_2,y_3(y_1<y_2<y_3)$，则 $\begin{cases}y_B=y_2=0,\\y_1+y_3=-\left(n+\dfrac{1}{n}\right),\\y_1y_3=-3,\end{cases}$

所以 $\dfrac{|AB|}{|BC|}=-\dfrac{y_1}{y_3}$ 或 $\dfrac{|AB|}{|BC|}=-\dfrac{y_3}{y_1}$. …… 6分

设 $-\dfrac{y_1}{y_3}=t(t>0)$，则 $t+\dfrac{1}{t}=2-\dfrac{(y_1+y_3)^2}{y_1y_3}=2+\dfrac{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2}{3}\geqslant\dfrac{10}{3}$，当且仅当 $n=\pm1$ 时，等号成立，解得 $t\geqslant3$ 或 $0<t\leqslant\dfrac{1}{3}$.

故当 $\dfrac{|AB|}{|BC|}=-\dfrac{y_1}{y_3}$ 时，$\dfrac{|AB|}{|BC|}$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$.

同理可得，$\dfrac{|AB|}{|BC|}=-\dfrac{y_3}{y_1}$ 时，$\dfrac{|AB|}{|BC|}$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$.

综上，$\dfrac{|AB|}{|BC|}$ 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$. …… 8分

(3)【解】第一步：讨论直线 l 的斜率为 0 时的交点个数.

若直线 l 的斜率为 0，则 $l:y=0$，与曲线 C 的方程联立得 $x^2-x-2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$，此时恰好有 2 个交点. … 9分

第二步：讨论直线 l 的斜率不为 0 时的情况，设直线 $l:x=my+1$，与曲线 C 的方程联立得 $my^3+(m^2+3)y^2+my-2=0$，构

造函数，利用函数的导数研究方程根的个数即可求解.

若直线 l 的斜率不为 0，设直线 $l:x=my+1$，

因为当 $x>-2$ 时，$\frac{x^2}{x+2}\geqslant 0$，且 $\frac{x^2}{x+2}=1-y^2$，所以 $1-y^2\geqslant 0$，所以 $y\in[-1,1]$，反之也成立，即 $x>-2\Leftrightarrow y\in[-1,1]$. …… 10 分

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{x+2}+y^2=1,\\ x=my+1,\end{cases}$ 可得 $my^3+(m^2+3)y^2+my-2=0$.

设 $f(y)=my^3+(m^2+3)y^2+my-2$，$y\in[-1,1]$，

则 $f'(y)=3my^2+2(m^2+3)y+m$，$y\in[-1,1]$，

令 $q(y)=f'(y)$，$y\in[-1,1]$，则 $q'(y)=6my+2(m^2+3)$，

因为 $q'(-1)=-6m+2(m^2+3)=2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}>0$，

$q'(1)=6m+2(m^2+3)=2\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}>0$，

所以 $q'(y)>0$ 在 $y\in[-1,1]$ 上恒成立，所以当 $y\in[-1,1]$ 时，$f'(y)$ 单调递增. …… 13 分

因为 $f'(-1)=-2m^2+4m-6=-2(m-1)^2-4<0$，

$f'(1)=2m^2+4m+6=2(m+1)^2+4>0$，

所以存在唯一的 $y_0\in(-1,1)$，使得 $f'(y_0)=0$，

当 $y\in(-1,y_0)$ 时，$f'(y)<0$，$f(y)$ 单调递减，当 $y\in(y_0,1)$ 时，$f'(y)>0$，$f(y)$ 单调递增.

因为 $f(1)=m^2+2m+1=(m+1)^2\geqslant 0$，$f(-1)=m^2-2m+1=(m-1)^2\geqslant 0$，且 $f(0)=-2<0$，

所以存在 $y_4\in[-1,0)$，$y_5\in(0,1]$，使得 $f(y_4)=f(y_5)=0$，

所以 $f(y)=0$ 在 $y\in[-1,1]$ 上有 2 个不相等的实数根，即直线 $x=my+1$ 与曲线 C 的交点的个数为 2.

综上，当 $x>-2$ 时，过点 $(1,0)$ 的直线 l 与曲线 C 有 2 个交点. …… 17 分

题组 5

18. (1)【解】分析：利用抛物线定义可得 $\triangle MPF$ 是等边三角形，进而根据定义求 p.

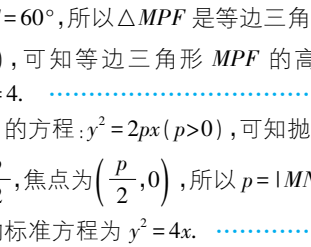
如图①，连接 MF，过点 F 作 $FN\perp MP$ 于点 N，根据抛物线的定义可知，$|PM|=|PF|$，

又因为 $\angle MPF=60°$，所以 $\triangle MPF$ 是等边三角形.

由 $P(x_0,2\sqrt{3})$，可知等边三角形 MPF 的高为 $2\sqrt{3}$，所以 $|PM|=|PF|=4$. …… 2 分

根据抛物线 E 的方程：$y^2=2px(p>0)$，可知抛物线 E 的准线为直线 $x=-\frac{p}{2}$，焦点为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，所以 $p=|MN|=2$，

故抛物线 E 的标准方程为 $y^2=4x$. …… 4 分



图①

(2)(i)【证明】分析：结合向量的坐标运算，证明过焦点的直线 AC 与抛物线的两交点的纵坐标之积为定值，即 $y_3y_1=-4$，再代入 $\lambda=-\frac{y_1}{y_3}$，即可证明.

如图②，由 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$F(1,0)$，可设 $C(x_3,y_3)$，则 $\overrightarrow{AF}=(1-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{FC}=(x_3-1,y_3)$，

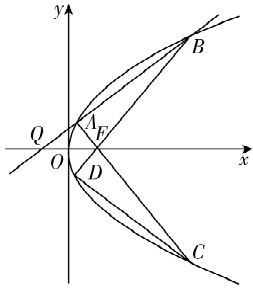
因为 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FC}$，所以 $(1-x_1,-y_1)=\lambda(x_3-1,y_3)$，即 $\lambda=-\dfrac{y_1}{y_3}$.

又因为 $\overrightarrow{AF}//\overrightarrow{FC}$，所以 $(1-x_1)y_3+(x_3-1)y_1=0$，

因为 A,C 在抛物线 E 上，所以 $x_1=\dfrac{y_1^2}{4}$，$x_3=\dfrac{y_3^2}{4}$，代入上式可得 $\left(1-\dfrac{y_1^2}{4}\right)y_3+\left(\dfrac{y_3^2}{4}-1\right)y_1=0$，整理得 $(y_3-y_1)(y_3y_1+4)=0$，

由于 $y_3\neq y_1$，所以 $y_3y_1=-4$，则由 $\lambda=-\dfrac{y_1}{y_3}=-\dfrac{y_1^2}{y_1y_3}=-\dfrac{y_1^2}{-4}=\dfrac{y_1^2}{4}=x_1$，得 $\lambda=x_1$，

同理可证明 $\mu=x_2$. …… 10 分



图②

(ii)【解】分析：证明直线 AB 与抛物线的两交点的横坐标之积为定值 $x_1x_2=a^2$，再把线段长度问题转化为坐标问题，化简求解可得 $a=-1$，再利用判别式可得 k 的取值范围.

根据题意可知直线 AB 的斜率存在且不为 0，可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)$，

与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立，消去 y 得 $k^2x^2-2(ak^2+2)x+a^2k^2=0$.

因为直线 AB 与抛物线有两个交点，所以 $\Delta=4(ak^2+2)^2-4k^2\cdot a^2k^2>0\Rightarrow ak^2+1>0$，$x_1x_2=a^2$. …… 12 分

由 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FC}$ 得 $|\overrightarrow{AF}|=\lambda|\overrightarrow{FC}|$，即 $|FC|=\dfrac{|AF|}{\lambda}$，

同理 $|FD|=\dfrac{|BF|}{\mu}$，故若 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{|DF|}{|CF|}$，则 $\mu|AF|^2=\lambda|BF|^2$，

再由抛物线的定义可得 $|AF|=x_1+1$，$|BF|=x_2+1$，结合 $\lambda=x_1$，$\mu=x_2$，可得 $x_2(x_1+1)^2=x_1(x_2+1)^2$，

整理得 $(x_1-x_2)(x_1x_2-1)=0$，又因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1x_2=1$.

…… 15 分

又因为 $x_1x_2=a^2$，所以 $a^2=1$，又 $a<0$，所以 $a=-1$，代入 $ak^2+1>0$，得 $-1<k<1$，由于 $k\neq0$，

所以当 k 的取值范围为 $(-1,0)\cup(0,1)$，且 $a=-1$ 时，有 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{|DF|}{|CF|}$. …… 17 分

19. (1)【解】分析：利用导数的几何意义求出切线方程，再计算该切线在两坐标轴上的截距，进而得到三角形面积.

当 $a=4$ 时，$g(x)=x\ln x-2x^2+x$，$x>0$，

则 $g(1)=1\cdot\ln 1-2+1=-1$，即切点坐标为 $(1,-1)$.

$g'(x)=\ln x+1-4x+1=\ln x-4x+2$，则 $g'(1)=\ln 1-4+2=-2$，

故切线方程为 $y-(-1)=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+1$. …… 2 分

令 $x=0$，得 $y=1$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，

则切线与两坐标轴围成的三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

…… 4 分

(2)【解】第一步：参变分离，将存在正实数使不等式成立的问题转化为求函数的最小值问题.

依题意，$e^{2x}-x\leqslant x\ln x-2x^2+(a-3)x$，即 $e^{2x}\leqslant x\ln x-2x^2+(a-2)x$ 有解，

因为 $x>0$，所以不等号两边同时除以 x 得 $\dfrac{e^{2x}}{x}\leqslant \ln x-2x+a-2$，

即 $a\geqslant\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-\ln x+2x+2\right)_{\min}$．…… 6 分

第二步：构造函数 $h(x)$，利用导数求函数 $h(x)$ 的最小值．

令 $h(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}-\ln x+2x+2(x>0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{2xe^{2x}-e^{2x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}+2=\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}+\dfrac{2x-1}{x}=\dfrac{2x-1}{x^2}(e^{2x}+x)$．…… 7 分

因为 $x^2>0$，$e^{2x}+x>0$，

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=2e+\ln 2+3$，

第三步：得出结论．

即 $a\geqslant 2e+\ln 2+3$，

所以实数 a 的取值范围为 $[2e+\ln 2+3,+\infty)$．…… 9 分

(3)【证明】第一步：比值换元，将双变量问题转变为单变量问题．

因为 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个不同的零点，所以 $e^{3tx_1}=x_1$，$e^{3tx_2}=x_2$，

所以 $x_1>0$，$x_2>0$，又 $x_1<x_2$，所以 $0<x_1<x_2$，

则可以在 $(0,+\infty)$ 上研究函数 $f(x)$，

由 $x_1x_2^2>e^3$ 两边同时取对数得 $\ln x_1+2\ln x_2>3$，…… 10 分

已知 x_1，x_2 是方程 $e^{3tx}-x=0$，即 $\dfrac{\ln x}{x}=3t(x>0)$ 的两根，所以 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，

设 $k=\dfrac{x_2}{x_1}$，$k>1$．

将 $x_2=kx_1$ 代入得 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln(kx_1)}{kx_1}$，则 $k\ln x_1=\ln x_1+\ln k$，可得 $\ln x_1=\dfrac{\ln k}{k-1}$，

则 $\ln x_2=\ln(kx_1)=\ln k+\ln x_1=\ln k+\dfrac{\ln k}{k-1}=\dfrac{k\ln k}{k-1}$．…… 12 分

即 $\ln x_1+2\ln x_2=\dfrac{\ln k}{k-1}+\dfrac{2k\ln k}{k-1}=\dfrac{2k+1}{k-1}\ln k$，

则问题转化为证明当 $k>1$ 时，$\dfrac{2k+1}{k-1}\ln k>3$，即证 $\ln k>\dfrac{3(k-1)}{2k+1}$（提示：比值换元或差值换元是将双变量问题转变为单变量问题的常见技巧）．…… 13 分

第二步：构造新函数并证明结论．

设 $M(k)=\ln k-\dfrac{3(k-1)}{2k+1}(k>1)$，则 $M'(k)=\dfrac{(4k-1)(k-1)}{k(2k+1)^2}$．

…… 15 分

因为 $k>1$，所以 $k-1>0$ 且 $4k-1>0$，

因此在 $k\in(1,+\infty)$ 上，$M'(k)>0$，$M(k)$ 单调递增，

所以 $M(k)>M(1)=0$，即 $\ln k>\dfrac{3(k-1)}{2k+1}$，

则 $x_1x_2^2>e^3$ 得证．…… 17 分

题组 6

18. (1)【证明】分析：分别证得 $AE\perp PB$ 和 $AE\perp BC$，利用线面垂直的判定定理，证得 $AE\perp$ 平面 PBC，再由面面垂直的判定定理，即可证得平面 $AEF\perp$ 平面 PBC.

在△PAB 中，因为 $PA=AB$，且 E 为线段 PB 的中点，所以 $AE\perp PB$. …… 1 分

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$.

…… 2 分

因为 $AB\perp BC$，$AB\cap PA=A$，且 AB，$PA\subset$ 平面 PAB，$BC\not\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB， …… 3 分

又因为 $AE\subset$ 平面 PAB，所以 $AE\perp BC$.

因为 $PB\cap BC=B$，且 PB，$BC\subset$ 平面 PBC，$AE\not\subset$ 平面 PBC，所以 $AE\perp$ 平面 PBC，

又因为 $AE\subset$ 平面 AEF，所以平面 $AEF\perp$ 平面 PBC. … 5 分

(2)【解】存在. …… 6 分

理由如下：

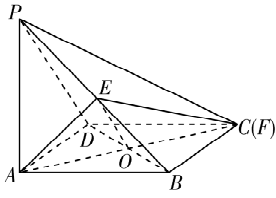
第一步：连接 AC，BD 交于点 O，则 O 为 BD 的中点，证得 $OE//PD$.

如图①所示，连接 AC，BD 交于点 O，可得 O 为 BD 的中点，连接 OE，因为 E 为 PB 的中点，所以 $OE//PD$. …… 7 分

第二步：利用线面平行的判定定理，证得 $PD//$平面 ACE，进而可知点 F 与点 C 重合时，$PD//$平面 AEF，得到结论.

又因为 $PD\not\subset$ 平面 ACE，$OE\subset$ 平面 ACE，所以 $PD//$平面 ACE，

当点 F 与点 C 重合时，$PD//$平面 AEF，即在线段 BC 上存在点 F，使得 $PD//$平面 AEF. …… 8 分



图①

(3)【解】分析：连接 EF，BF，BG，EG，PF，GF，则四棱锥 $P-AEGF$ 可分为三棱锥 $P-AEF$ 和三棱锥 $P-EFG$. 利用锥体的体积公式，求得四棱锥 $P-ABCD$ 的体积. 求出 G 点的位置，分别求得 V_{P-AEF} 和 V_{P-EFG}，根据 $V_{P-AEGF}=V_{P-EFG}+V_{P-AEF}$，求得 V_{P-AEGF}，进而可求体积之比.

如图②所示，在线段 PC 上取一点 G(异于 P，C 两点)，连接 EF，BF，BG，EG，PF，GF，则四棱锥 $P-AEGF$ 可分为三棱锥 $P-AEF$ 和三棱锥 $P-EFG$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，AD，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，所以 PA，AD，AB 两两垂直，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 2=\frac{8}{3}$. …… 9 分

以 A 为原点，AB，AD，AP 所在的直线分别为 x，y，z 轴，建立如图②所示的空间直角坐标系，可得 $A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(1,0,1)$，$F(1,2,0)$，

则 $\overrightarrow{AE}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AF}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$. …… 10 分

设 $\overrightarrow{PG}=t\overrightarrow{PC}$，其中 $0<t<1$，则 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=(0,0,2)+t(2,2,-2)=(2t,2t,2-2t)$，

因为 A，E，G，F 共面，则存在实数 x，y 使得 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$，

即 $(2t,2t,2-2t)=x(1,0,1)+y(1,2,0)$，可得 $\begin{cases}2t=x+y,\\2t=2y,\\2-2t=x,\end{cases}$

解得 $t=\frac{2}{3}$. …… 12 分

即 $\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$，所以 G 为 PC 上靠近点 C 的三等分点，由 F 为线段 DC 的中点，设点 F 到直线 PC 的距离为 h，可得 $\frac{S_{\triangle PFG}}{S_{\triangle PFC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot PG\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot PC\cdot h}=\frac{2}{3}$，则 $V_{B-PGF}=\frac{2}{3}V_{B-PFC}$.

设 E 到平面 PCD 的距离为 d，B 到平面 PCD 的距离为 d_1，易知 $d=\frac{1}{2}d_1$，

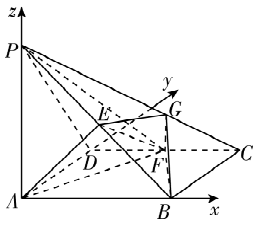
所以 $V_{P-EFG}=V_{E-PGF}=\frac{1}{2}V_{B-PGF}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}V_{B-PFC}=\frac{1}{3}V_{P-BCF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}S_{\triangle BCF}\times PA=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times2=\frac{2}{9}$. …… 14 分

因为 $DC/\!/AB$，$DC\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $DC/\!/$ 平面 PAB，

所以点 F 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离，又 $BC\perp$ 平面 PAB，$BC=2$，所以点 F 到平面 PAB 的距离为 2，则 $V_{P-AEF}=V_{F-PAE}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAE}\times2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{2}{3}$，

所以 $V_{P-AEGF}=V_{P-EFG}+V_{P-AEF}=\frac{2}{9}+\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$，所以 $\frac{V_{P-AEGF}}{V_{P-ABCD}}=\frac{1}{3}$.

…… 17 分



图②

19. (1)【解】分析：对 $f(x)=-2x\ln x-x^2$ 进行二次求导，结合零点存在定理分析 $f'(x)$ 的零点情况，进而确定 $f(x)$ 的单调性，求出最小值.

当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x\ln x-x^2$，

则 $f'(x)=-2\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)-2x=-2(\ln x+x+1)$. … 1 分

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-2\left(\frac{1}{x}+1\right)$，当 $x\in[e^{-2},1]$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $[e^{-2},1]$ 上单调递减. …… 2 分

又因为 $f'(e^{-2})=2(1-e^{-2})>0$，$f'(1)=-4<0$，所以 $\exists x_0\in(e^{-2},1)$，使得 $f'(x_0)=0$，所以当 $x\in(e^{-2},x_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 (e^{-2},x_0) 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减. …… 3 分

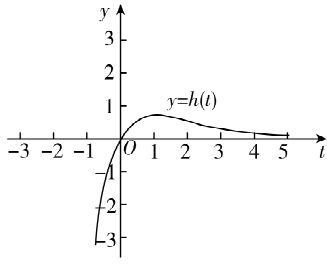
因为 $f(e^{-2})=4e^{-2}-e^{-4}=e^{-2}(4-e^{-2})>0$，$f(1)=-1<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[e^{-2},1]$ 上的最小值为 -1. …… 4 分

(2)【解】分析：求导后令 $f'(x)=0$，分离参数，将零点个数问题转化为图象的交点个数问题，作出新函数的图象，讨论交点个数，利用导函数的变号零点就是原函数的极值点求解.

$f'(x)=a[e^{x+1}+(x-1)e^{x+1}]-2\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)-2x=axe^{x+1}-2(\ln x+x+1)$，令 $f'(x)=0$，得 $a=\frac{2(\ln x+x+1)}{xe^{x+1}}=\frac{2(\ln x+x+1)}{e^{\ln x+x+1}}$. …… 6 分

易知函数 $y=\ln x+x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且值域为 $\mathbf{R}$，令 $\ln x+x+1=t, t\in\mathbf{R}$，所以 $a=\dfrac{2t}{e^t}$.

设 $h(t)=\dfrac{2t}{e^t}$，$t\in\mathbf{R}$，则 $h'(t)=\dfrac{2(1-t)}{e^t}$，当 $t<1$ 时，$h'(t)>0$，当 $t>1$ 时，$h'(t)<0$，所以函数 $h(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(1)=\dfrac{2}{e}$，



当 $t\to-\infty$ 时，$h(t)\to-\infty$，当 $t\to+\infty$ 时，$h(t)\to0$，所以作出 $h(t)$ 的大致图象如图所示. …… 8 分

①当 $a>\dfrac{2}{e}$ 时，方程 $h(t)=a$ 无解，即 $f'(x)$ 无零点，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调，则 $f(x)$ 没有极值点. …… 9 分

②当 $a=\dfrac{2}{e}$ 时，$f'(x)=2e^{\ln x+x}-2(\ln x+x+1)$，设 $m(x)=e^x-x-1(x\in\mathbf{R})$，则 $m'(x)=e^x-1$，

当 $x<0$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减；

当 $x>0$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，

所以 $m(x)\geqslant m(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$，

所以 $f'(x)\geqslant2(\ln x+x+1)-2(\ln x+x+1)=0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $f(x)$ 没有极值点. …… 10 分

③当 $0<a<\dfrac{2}{e}$ 时，方程 $h(t)=a$ 有两个解，即 $f'(x)$ 有两个变号零点，则 $f(x)$ 有两个极值点. …… 11 分

④当 $a\leqslant0$ 时，方程 $h(t)=a$ 有一个解，即 $f'(x)$ 有一个变号零点，则 $f(x)$ 有一个极值点. …… 12 分

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 有一个极值点；当 $0<a<\dfrac{2}{e}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点；当 $a\geqslant\dfrac{2}{e}$ 时，$f(x)$ 没有极值点. …… 13 分

(3)【证明】第一步：证明当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

设 $n(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $n'(x)=\dfrac{(\cos x)\cdot x-\sin x}{x^2}$，记 $p(x)=x\cos x-\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，

则 $p'(x)=\cos x+x\cdot(-\sin x)-\cos x=-x\sin x<0$，则 $p(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$p(x)<p(0)=0$，则 $n'(x)<0$，则 $n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，所以 $n(x)>n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$，

即当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，不等式 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 成立. …… 15 分

第二步：结合(2)的结论缩小参数取值范围.

由(2)知，当函数 $f(x)$ 无极值点时，$a\geqslant\dfrac{2}{e}$，则 $0<\dfrac{1}{2a}\leqslant\dfrac{e}{4}<\dfrac{\pi}{4}$.

在不等式 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 中，取 $x=\dfrac{1}{2a}$，则有 $2a\sin\dfrac{1}{2a}>\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$，即不等式 $a\sin\dfrac{1}{2a}>\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$ 成立. …… 17 分