15~17 题 · 争满分

题组 1

15.【解】(1)分析：$(S_{n+1}+1)a_n=(S_n+1)a_{n+1}$ 可变为同构形式，从而得到 S_n 与 a_n 的关系，再根据 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

由 $(S_{n+1}+1)a_n=(S_n+1)a_{n+1}$，$a_n>0$，得 $\dfrac{S_{n+1}+1}{a_{n+1}}=\dfrac{S_n+1}{a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\dfrac{S_n+1}{a_n}=\dfrac{S_1+1}{a_1}=2$，即 $S_n=2a_n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$. ····· 3 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-1)-(2a_{n-1}-1)$，整理得 $a_n=2a_{n-1}$，

所以 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=2^{n-1}$. ····· 5 分

(2)第一步：求出数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，从而得到数列 $\left\{\dfrac{a_n}{S_n\cdot S_{n+1}}\right\}$ 的通项公式.

由(1)得 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$， ····· 7 分

所以 $\dfrac{a_n}{S_n\cdot S_{n+1}}=\dfrac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$，

····· 9 分

第二步：利用裂项相消法求 T_n.

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+2}-2}$. ··· 13 分

16.(1)**【证明】**第一步：由线面垂直的判定定理证得 $BC\perp$ 平面 PAB，进而得到 $BC\perp AE$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$.

因为底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\perp BC$，

又 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB.

····· 3 分

因为 $AE\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp AE$. ····· 4 分

第二步：由等腰三角形中线性质证明 $AE\perp PB$，从而证得 $AE\perp$ 平面 PBC，再由面面垂直的判定定理证明结论.

因为 $PA=AB$，E 为 PB 的中点，所以 $AE\perp PB$， ····· 5 分

又 $PB\cap BC=B$，且 PB，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AE\perp$ 平面 PBC，

又 $AE\subset$ 平面 AEF，所以平面 $AEF\perp$ 平面 PBC. ····· 7 分

(2)**【解】**分析：$V_{AEFCDP}=V_{P-ABCD}-V_{F-ABE}$，设 $BF=x$，$x\in(0,2)$，根据锥体体积公式列出体积的表达式，结合二次函数性质求出最小值.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，$PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=2\sqrt{2}$. ····· 8 分

因为 $CF:CB=BE:BP$，设 $BF=x$，$x\in(0,2)$，则 $\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{BE}{2\sqrt{2}}$，

得 $BE=\sqrt{2}(2-x)$，$x\in(0,2)$. ····· 10 分

$V_{AEFCDP}=V_{P-ABCD}-V_{F-ABE}=\dfrac{1}{3}S_{\text{正方形}ABCD}\cdot PA-\dfrac{1}{3}S_{\text{三角形}ABE}\cdot BF$

$=\frac{1}{3}\times2\times2\times2-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}(2-x)\times\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{1}{3}(x^2-2x+8)$

$=\frac{1}{3}[(x-1)^2+7],x\in(0,2)$，……14分

结合二次函数性质可知，当 $x=1$ 时，多面体 $AEFCDP$ 的体积取得最小值，最小值为 $\frac{7}{3}$.……15分

17.【解】(1) 分析：对函数求导，根据导函数符号判断单调性，进而求得最小值.

函数 $f(x)=xe^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$.

……2分

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值，也是最小值，$f(-1)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$. 故 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$.……5分

(2) 第一步：分析方程根的情况，将问题进行转化.

由 $f(x)=ax^2$ 得 $x(e^x-ax)=0$，显然 $x=0$ 是方程的一个实根.

要使方程有两个不等实根，只需 $e^x-ax=0$ 有且仅有一个非零实根，即 $x\neq0$ 时，方程 $\frac{e^x}{x}=a$ 仅有一个实根.……6分

第二步：构造函数分析其单调性，确定参数取值范围.

令 $h(x)=\frac{e^x}{x}(x\neq0)$，则 $h'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

令 $h'(x)=0$，则 $\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0$，解得 $x=1$.……8分

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，此时 $h(x)<0$，且 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to0^-$，当 $x\to0^-$ 时，$h(x)\to-\infty$，故当 $x<0$ 时，$h(x)\in(-\infty,0)$.……10分

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减. 当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 $h(1)=e$，当 $x\to0^+$ 时，$h(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$.……12分

因此当 $a<0$ 时，$h(x)=a$ 有唯一非零实根；

当 $a=e$ 时，$h(x)=a$ 有唯一实根 $x=1$；

当 $0\leqslant a<e$ 时，$h(x)=a$ 无实根；

当 $a>e$ 时，$h(x)=a$ 有两个不等实根.……14分

故 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup\{e\}$.……15分

题组2

15. (1)**【证明】** 分析：已知两平面平行，利用面面平行的性质定理证得线线平行，进而证出线面平行.

由题知平面 α//侧面 BCC_1B_1，平面 $\alpha\cap$平面 $ABC=EF$，平面 $BCC_1B_1\cap$平面 $ABC=BC$，由面面平行的性质定理可得 EF//BC.……2分

又因为 $EF\not\subset$平面 BCC_1B_1，$BC\subset$平面 BCC_1B_1，所以 EF//平面 BCC_1B_1.……4分

(2)**【解】** 分析：由面面平行得到线线平行，确定点 E，F 的位置，求出 $\triangle AEF$ 的面积，再结合棱台的高，用锥体体积公式计算体积.

因为 $BB_1\perp$底面 $A_1B_1C_1$，平面 $A_1B_1C_1$ // 平面 ABC，所以 $BB_1\perp$平面 ABC，即三棱台的高为 $BB_1=\sqrt{3}$.……6分

又平面 α// 侧面 BCC_1B_1，平面 $\alpha\cap$平面 $ABB_1A_1=A_1E$，平面

BCC_1B_1 ∩平面 $ABB_1A_1=B_1B$，则 $A_1E/\!/B_1B$，结合 $A_1B_1/\!/AB$，$AB=2A_1B_1=2$，可得 E 为 AB 的中点，同理 F 为 AC 的中点，

…… 9 分

故 $AE=AF=1$，又 $\angle BAC=60°$，所以 $\triangle AEF$ 是边长为 1 的正三角形，所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$. …… 11 分

又 A_1 到平面 ABC 的距离等于三棱台的高 $\sqrt{3}$，故 $V_{A-A_1EF}=V_{A_1-AEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\times\sqrt{3}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}=\frac{1}{4}$. …… 13 分

16. (1)【证明】第一步：将向量数量积转化为三角形边与角的关系.

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=ac+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 得 $bc\cos A=ac+ac\cos B$，

因为 $c\neq0$，所以 $b\cos A=a+a\cos B$. …… 2 分

第二步：用正弦定理化边为角，结合两角差的正弦公式，由三角形内角的取值范围排除矛盾情况，证得结论.

由正弦定理得 $\sin B\cos A=\sin A+\sin A\cos B$，

所以 $\sin B\cos A-\sin A\cos B=\sin A$，即 $\sin(B-A)=\sin A$.

…… 4 分

在 $\triangle ABC$ 中，因为 A,C 为内角，所以 $B-A=A$ 或 $B-A=\pi-A$.

若 $B-A=\pi-A$，则 $B=\pi$（舍去），故 $B-A=A$，即 $B=2A$，得证.

…… 6 分

(2)【解】第一步：由正弦定理及高的定义，将 b 和 d 均用关于 A 的三角函数表示.

由(1)知 $B=2A$，由正弦定理得，$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{a\sin 2A}{\sin A}=2a\cos A=4\cos A$. …… 8 分

又 d 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高，故 $d=a\sin B=2\sin 2A$.

…… 10 分

第二步：代入目标式化简，结合 A 的取值范围求 $b^2+4\sqrt{3}d$ 的取值范围.

$b^2+4\sqrt{3}d=16\cos^2A+8\sqrt{3}\sin 2A=8+8(\cos 2A+\sqrt{3}\sin 2A)=8+16\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)$. …… 12 分

由 $\begin{cases}0<A<\pi,\\0<2A<\pi,\\0<\pi-A-2A<\pi,\end{cases}$ 解得 $A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $2A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，所以 $b^2+4\sqrt{3}d$ 的取值范围为 $(16,24]$. …… 15 分

17. (1)【解】分析：根据题中条件，通过抛物线的定义求抛物线方程.

由题意，$P_1\left(\frac{1}{2p},1\right)$，设抛物线 C 的焦点为 F，则 $|P_1F|=\frac{1}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$ 或 $p=2$，

又 $0<p<2$，所以 $p=\frac{1}{2}$，故抛物线 C 的方程为 $y^2=x$.

…… 4 分

(2)【证明】分析：寻找 $\frac{1}{y_{n+1}}$，$\frac{1}{y_n}$ 的关系，从而判断数列 $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ 是等差数列.

依题意，$\odot P_n$ 的半径为 $x_n=y_n^2$，$\odot P_{n+1}$ 的半径为 $x_{n+1}=y_{n+1}^2$，又 $\odot P_n$ 和 $\odot P_{n+1}$ 外切，

则$|P_nP_{n+1}|=x_n+x_{n+1}$，即$\sqrt{(x_n-x_{n+1})^2+(y_n-y_{n+1})^2}=x_n+x_{n+1}$，两边平方整理得$(y_n-y_{n+1})^2=4x_nx_{n+1}$，所以$(y_n-y_{n+1})^2=4y_n^2y_{n+1}^2$. …… 7分

又$0<y_{n+1}<y_n$，所以$y_n-y_{n+1}=2y_ny_{n+1}$，即$\frac{1}{y_{n+1}}-\frac{1}{y_n}=2$.

因为$\frac{1}{y_1}=1$，所以数列$\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$是以1为首项，2为公差的等差数列. …… 10分

(3)【证明】分析：求出$\sqrt{S_n}$的表达式，当$n=1$时直接证明，当$n\geqslant 2$时进行不等式放缩，结合裂项相消法进行证明.

由(2)得$\frac{1}{y_n}=1+2(n-1)=2n-1$，即$y_n=\frac{1}{2n-1}$. …… 11分

又$S_n=\pi x_n^2=\pi y_n^4$，所以$\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{\pi}}{(2n-1)^2}$.

①当$n=1$时，$T_1=\sqrt{S_1}=\sqrt{\pi}<\frac{5\sqrt{\pi}}{4}$成立； …… 12分

②当$n\geqslant 2$时，因为$\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{\pi}}{(2n-1)^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4n^2-4n+1}<\frac{\sqrt{\pi}}{4n^2-4n}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

所以$T_n=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}+\cdots+\sqrt{S_n}<\sqrt{\pi}+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=\sqrt{\pi}+\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{5\sqrt{\pi}}{4}-\frac{\sqrt{\pi}}{4n}<\frac{5\sqrt{\pi}}{4}$.

综上，$T_n<\frac{5\sqrt{\pi}}{4}$得证. …… 15分

题组3

15.【解】(1)分析：根据频率分布直方图中所有小矩形面积和为1可求a，再根据中位数的求法求解.

由题图知$10\times(0.004+2a+0.03+0.026+0.01)=1$，解得$a=0.015$. …… 3分

设中位数为m，则$10\times0.004+10\times0.015+10\times0.03+(m-70)\times0.026=0.5$，

解得$m\approx70.4$，故中位数约为70.4. …… 6分

(2)分析：随机变量X服从二项分布，列出不等式组求解.

因为样本中80分及以上的频率为$10\times(0.015+0.01)=0.25$，故随机变量$X\sim B\left(30,\frac{1}{4}\right)$. …… 7分

所以$P(X=k)=C_{30}^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{30-k}(k=0,1,2,\cdots,30)$.

…… 8分

当$1\leqslant k\leqslant 29$时，令$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\end{cases}$

得$\begin{cases}C_{30}^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{30-k}\geqslant C_{30}^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{31-k},\\C_{30}^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{30-k}\geqslant C_{30}^{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{29-k},\end{cases}$ …… 10分

解得$\frac{27}{4}\leqslant k\leqslant\frac{31}{4}$. …… 12分

又因为 $k\in\mathbf{N}$，所以 $P(X=k)$ 取得最大值时 k 的值为 7.

…… 13 分

教材溯源 第(2)问源于人教 A 版选择性必修第三册 P81—P82 探究与发现.

记随机变量 $X\sim B(n,p)$，$p_k=P(X=k)$ $(k\in\mathbf{N}^*)$，由分布列的表达式可知，$\dfrac{p_k}{p_{k-1}}=\dfrac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}=\dfrac{(n-k+1)p}{k(1-p)}=\dfrac{k(1-p)+(n+1)p-k}{k(1-p)}=1+\dfrac{(n+1)p-k}{k(1-p)}$.

当 $k<(n+1)p$ 时，$p_k>p_{k-1}$，p_k 随 k 值的增加而增加；当 $k>(n+1)p$ 时，$p_k<p_{k-1}$，p_k 随 k 值的增加而减小.

如果 $(n+1)p$ 为正整数，当 $k=(n+1)p$ 时，$p_k=p_{k-1}$，此时这两项概率均为最大值. 如果 $(n+1)p$ 为非整数，而 k 取 $(n+1)p$ 的整数部分，则 p_k 是唯一的最大值.

若为选填题，可根据结论直接写出答案；若为解答题，则需要给出解答过程(列不等式组或作商法均可)，再用结论验证.

16.【解】(1) 第一步：在 $\triangle ABD$ 中已知两边及其夹角，利用余弦定理求出第三边 BD.

连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理有 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle DAB=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos 120^\circ=49$，

所以 $BD=7$. …… 3 分

第二步：根据 $\angle CDA=\angle CBA=90^\circ$ 的条件判断 AC 为四边形 $ABCD$ 外接圆的直径，在 $\triangle ABD$ 中利用正弦定理求解.

由题意 $\angle CDA+\angle CBA=180^\circ$，则四边形 $ABCD$ 内接于圆，且 AC 为该圆的直径.

设该圆半径为 R，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $AC=2R=\dfrac{BD}{\sin\angle DAB}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$. …… 6 分

(2) 第一步：已知 $\triangle ABD$ 为确定三角形，则四边形 $ABCD$ 的面积取决于 $\triangle BCD$ 的面积，用边长表示出面积后，分析面积最大时的边长关系.

因为 $\angle DAB+\angle BCD=180^\circ$，所以四边形 $ABCD$ 内接于圆.

四边形 $ABCD$ 的面积 $S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，其中 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin 120^\circ=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$. …… 7 分

要使四边形面积最大，只需 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}CB\cdot CD\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}CB\cdot CD$ 最大，即 $CB\cdot CD$ 最大. …… 8 分

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=CB^2+CD^2-2CB\cdot CD\cos 60^\circ$，即 $49=CB^2+CD^2-CB\cdot CD$.

所以 $49+CB\cdot CD=CB^2+CD^2\geqslant 2CB\cdot CD$，即 $CB\cdot CD\leqslant 49$，当且仅当 $CB=CD=7$ 时取等号，此时 $\triangle BCD$ 为等边三角形.

…… 10 分

第二步：在 $\triangle ABD$ 中得到 $\cos\angle ABD$，计算 $\sin\angle ABD$，再由两角和的余弦公式计算四边形 $ABCD$ 面积最大时 $\cos\angle ABC$ 的值，从而在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理求得 AC.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABD=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\dfrac{11}{14}$.

因为 $\angle ABD\in(0,\pi)$，所以 $\sin\angle ABD=\sqrt{1-\cos^2\angle ABD}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$. …… 12 分

则当四边形 $ABCD$ 面积最大时，$\cos\angle ABC=\cos(\angle ABD+60°)=-\frac{1}{7}$，…… 13 分

在△ABC 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=64$，

所以 $AC=8$. …… 15 分

17. (1)【证明】第一步：作辅助线，并建系，写出相关点的坐标及相关向量的坐标.

如图，取线段 BD 的中点 O，连接 CO，AO，

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle BAD=60°$，

所以△ABD 和△CBD 均为等边三角形，所以 $AO\perp BD$，$CO\perp BD$. …… 2 分

以 O 为坐标原点，OB，OA 所在直线分别为 x，y 轴，过点 O 且垂直于平面 ABD 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$. …… 4 分

设 $C(0,a,b)$，$b>0$，则 $\begin{cases}|OC|^2=a^2+b^2=3,\\|AC|^2=(a-\sqrt{3})^2+b^2=8,\end{cases}$

所以 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，即 $C\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. …… 6 分

易知 $\overrightarrow{BA}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AC}=\left(0,-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. …… 7 分

第二步：求出平面 BAC 和平面 DAC 的法向量，再利用法向量的数量积为 0 证明结论.

设平面 BAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面 DAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}_1=-x_1+\sqrt{3}y_1=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}_1=-\frac{4\sqrt{3}}{3}y_1+\frac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0,\end{cases}$

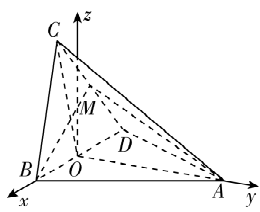
$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}_2=-x_2-\sqrt{3}y_2=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}_2=-\frac{4\sqrt{3}}{3}y_2+\frac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0,\end{cases}$

令 $y_1=y_2=1$，则 $\boldsymbol{m}_1=(\sqrt{3},1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{m}_2=(-\sqrt{3},1,\sqrt{2})$，

…… 9 分

则 $\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2=-3+1+2=0$，所以平面 $BAC\perp$ 平面 DAC.

…… 10 分



(2)【解】分析：计算平面 ABM 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$，平面 ABD 的法向量 $\boldsymbol{n}_2$，求出 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 从而求解.

因为点 M 为棱 CD 的中点，所以 $M\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

则 $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{7\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

设平面 ABM 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_3,y_3,z_3)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}_1=-x_3+\sqrt{3}y_3=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}_1=-\frac{1}{2}x_3-\frac{7\sqrt{3}}{6}y_3+\frac{\sqrt{6}}{3}z_3=0,\end{cases}$

令 $y_3=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=\left(\sqrt{3},1,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. …… 12 分

易知平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$， …… 13 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3+1+\frac{25}{2}}}=\frac{5\sqrt{33}}{33}$，由图可知二面角 $M-AB-D$ 的平面角为锐角，所以二面角 $M-AB-D$ 的余弦值为 $\frac{5\sqrt{33}}{33}$. …… 15 分

题组 4

15.【解】(1) 分析：根据题目条件列出关于 m,n 的方程组进行求解.

由题知 $\sum_{i=1}^{5}y_i^2=4^2+6^2+m^2+n^2+10^2=265$，则 $m^2+n^2=113$①，

又 $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1\times4+3\times6+5m+7n+9\times10=203$，得 $5m+7n=91$②，

联立①②，结合 $m,n\in\mathbf{N}^*$，可得 $m=7,n=8$. …… 5 分

(2) 分析：计算 $\bar{x},\bar{y}$，根据公式求出 $\hat{b}$，再根据 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}$ 求出 $\hat{a}$，最后写出经验回归方程.

由题可求出 $\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=5,\bar{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i=7$， …… 7 分

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$=\frac{(1-5)\times(4-7)+(3-5)\times(6-7)+(5-5)\times(7-7)+(7-5)\times(8-7)+(9-5)\times(10-7)}{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}$$

$=\frac{28}{40}=0.7$， …… 10 分

则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}=7-0.7\times5=3.5$，得 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.7x+3.5$. …… 13 分

16. (1)**【证明】** 分析：切化弦，再利用正弦定理和余弦定理进行转化，即可证明.

由 $\frac{1}{\tan A}+\frac{2}{\tan B}=\frac{3}{\tan C}$，可得 $\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{2\cos B}{\sin B}=\frac{3\cos C}{\sin C}$. … 2 分

由正弦定理可得 $\frac{\cos A}{a}+\frac{2\cos B}{b}=\frac{3\cos C}{c}$，

故 $bc\cos A+2ac\cos B=3ab\cos C$. …… 4 分

由余弦定理可得 $\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)=\frac{3}{2}(a^2+b^2-c^2)$，化简得 $a^2+2b^2=3c^2$. …… 7 分

(2)**【解】** 分析：由余弦定理结合基本不等式得到 $\cos C\geqslant\frac{\sqrt{2}}{3}$，得到角 C 取得最大值时 $\sin C$ 的值，最后由三角形面积公式求出 a.

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-\frac{1}{3}(a^2+2b^2)}{2ab}=\dfrac{\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2}{2ab}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

当且仅当$\dfrac{2}{3}a^2=\dfrac{1}{3}b^2$，即$b=\sqrt{2}a$时取等号，此时$C$最大，且

$\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. ……12分

故当角C取得最大值时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{3}=\sqrt{14}$，解得$a=\sqrt{6}$. ……15分

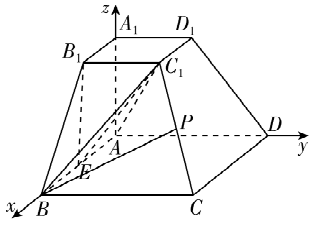
17. (1)【证明】分析：要证明$B_1E\perp C_1D_1$，可证明$B_1E\perp AB$，即只需证明AB垂直于B_1E所在的平面即可.

如图，连接EC_1，因为$AB\perp BC$，$BC/\!/B_1C_1$，所以$AB\perp B_1C_1$. ……1分

因为$BC_1=AC_1$，E是AB的中点，所以$AB\perp EC_1$，……2分

又因为$B_1C_1\cap EC_1=C_1$，B_1C_1，$EC_1\subset$平面B_1C_1E，所以$AB\perp$平面B_1C_1E，……4分

因为$B_1E\subset$平面B_1C_1E，所以$AB\perp B_1E$，又易知$AB/\!/C_1D_1$，所以$B_1E\perp C_1D_1$. ……5分



(2)【解】存在. ……6分

第一步：证明垂直关系，从而建立空间直角坐标系，写出相关点的坐标.

理由如下：由题易知$B_1E=2\sqrt{2}$，$B_1C_1=2$，$C_1E=2\sqrt{3}$，所以$B_1C_1^2+B_1E^2=C_1E^2$，所以$B_1E\perp B_1C_1$，

又由(1)知$C_1D_1\perp B_1E$，且$C_1D_1\cap B_1C_1=C_1$，C_1D_1，$B_1C_1\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$B_1E\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$. ……8分

由棱台性质可得$B_1E\perp$平面$ABCD$，$A_1B_1=B_1C_1=2$.

因为E是AB的中点，$AB=4$，所以$AE=2$，

所以$AE/\!/A_1B_1$且$AE=A_1B_1$，所以四边形A_1B_1EA为平行四边形，所以$B_1E/\!/A_1A$.

又$B_1E\perp$平面$ABCD$，所以$AA_1\perp$平面$ABCD$，所以AB，AD，AA_1两两垂直. ……11分

以A为坐标原点，AB，AD，AA_1所在直线分别为x，y，z轴建立如图所示的空间直角坐标系，则$B(4,0,0)$，$C(4,4,0)$，$D(0,4,0)$，$C_1(2,2,2\sqrt{2})$.

第二步：设$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CC_1}$，表示出点$P$坐标，求出平面$CDD_1C_1$的一个法向量，根据直线$BP$与平面$CDD_1C_1$所成角的余弦值列方程，从而解出$\lambda$.

$\overrightarrow{CD}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(-2,-2,2\sqrt{2})$，设$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CC_1}$($0<\lambda<1$)，则$P(4-2\lambda,4-2\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$，$\overrightarrow{BP}=(-2\lambda,4-2\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$.

设平面CDD_1C_1的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-4x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=-2x-2y+2\sqrt{2}z=0,\end{cases}$令$y=\sqrt{2}$，则$\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},1)$.

……13分

设直线BP与平面CDD_1C_1所成的角为θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{BP}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BP}|}=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{4\lambda^2+(4-2\lambda)^2+8\lambda^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

化简得 $(2\lambda-1)^2=0$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{C_1P}{C_1C}=\dfrac{1}{2}$. …… 15 分

题组 5

15.【解】(1) 分析：利用三角恒等变换公式化简 $f(x)$，再结合已知条件得出函数 $f(x)$ 的最小正周期，从而求出 ω，再由自变量的取值范围求出值域.

$f(x)=\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}\cos^2\left(\omega x-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=2\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$. …… 2 分

由题意知 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$，所以 $\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$， …… 4 分

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$. …… 5 分

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 的值域为 $[1+\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.

…… 7 分

(2) 分析：根据函数 $y=f(x+\theta)-\sqrt{3}$ 为奇函数得到其函数图象过点 $(0,0)$，再由三角函数的性质结合 θ 的范围求出 θ 的值.

由题意知函数 $y=f(x+\theta)-\sqrt{3}=2\sin\left(2x+2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数，且其定义域为 $\mathbf{R}$，所以其函数图象过点 $(0,0)$. …… 9 分

令 $x=0$，得 $2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，即 $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\theta=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，

因为 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $k=1,\theta=\dfrac{5\pi}{12}$. …… 13 分

16. (1)**【解】**分析：由双曲线标准方程可求其渐近线方程，进而求出点 Q 的坐标，由此可求抛物线方程.

设点 Q 的坐标为 $(6,y_0)$，因为点 Q 在第一象限，所以 $y_0>0$.

由题意知双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 过第一象限的渐近线方程为 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$，因为点 Q 在双曲线的渐近线上，所以 $y_0=4\sqrt{3}$，

…… 2 分

所以点 Q 的坐标为 $(6,4\sqrt{3})$，又点 $Q(6,4\sqrt{3})$ 在抛物线 E 上，所以 $48=2p\times6$，所以 $p=4$， …… 4 分

故抛物线 E 的标准方程为 $y^2=8x$. …… 5 分

(2)**【证明】**第一步：联立直线 AB 的方程与抛物线方程，得到一元二次方程根与系数的关系.

易知直线 AB 的斜率不为 0，设直线 AB 的方程为 $x=my-3$，

联立 $\begin{cases}y^2=8x,\\x=my-3,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-8my+24=0,\Delta=64m^2-96>0$，即 $2m^2-3>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=8m,y_1y_2=24$. …… 8 分

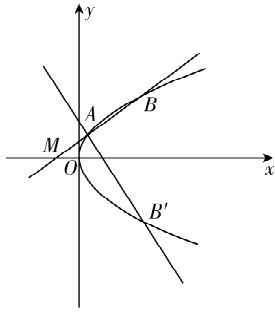
第二步：求出直线 AB' 的方程并令 $y=0$，求出 x 的表达式并逐步化简即可.

又 B 关于 x 轴的对称点 B' 的坐标为 $(x_2,-y_2)$，所以直线 AB' 的方程为 $y+y_2=\dfrac{-y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$.

根据抛物线的对称性可知定点必定在 x 轴上，…… 11 分

令 $y=0$，得 $x=y_2\cdot\dfrac{x_2-x_1}{-y_2-y_1}+x_2=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}=\dfrac{y_1(my_2-3)+y_2(my_1-3)}{y_1+y_2}=\dfrac{2my_1y_2-3(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\dfrac{48m-24m}{8m}=3$，

所以直线 AB' 必过定点 $(3,0)$. …… 15 分



17. (1)【证明】分析：根据已知得 $PC\perp BC$，$BC\perp AC$，由线面垂直的判定定理证明结论.

由题意知 $PC=BC=4$，$PB=4\sqrt{2}$，则 $PC^2+BC^2=PB^2$，

故 $PC\perp BC$. …… 1 分

由四边形 $ADBC$ 为正方形，得 $BC\perp AC$， …… 2 分

又 $PC\cap AC=C$，PC，$AC\subset$ 平面 PAC，所以 $BC\perp$ 平面 PAC.

…… 3 分

(2)【解】第一步：将三棱锥 $B-ACP$ 补形成正三棱柱 $APC-EFB$.

因为 $BC\perp$ 平面 PAC，$\triangle PAC$ 为等边三角形，所以将三棱锥 $B-ACP$ 补形成正三棱柱 $APC-EFB$，如图①. …… 4 分

第二步：应用正弦定理求 $\triangle APC$ 的外接圆半径，应用勾股定理求外接球半径，即可得三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积.

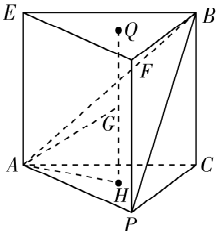
设 $\triangle APC$ 的中心为点 H，$\triangle BEF$ 的中心为 Q，连接 QH，取 QH 的中点 G，连接 AG，则 G 为三棱锥 $B-ACP$ 的外接球球心. 连接 AH，

又 $\triangle APC$ 的外接圆半径为 $AH=\dfrac{AC}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$， …… 5 分

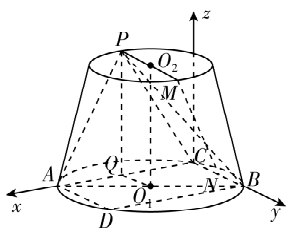
$GH=\dfrac{1}{2}BC=2$，所以外接球的半径 $R=AG=\sqrt{AH^2+GH^2}=\sqrt{\dfrac{28}{3}}$， …… 6 分

因此三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\dfrac{112}{3}\pi$.

…… 7 分



图①



图②

(3)【解】第一步：建立空间直角坐标系，求出相关点的坐标.

易知 $BC\perp AC$，以 C 为坐标原点，CA，CB 所在直线分别为 x，y 轴，以过点 C 且垂直于平面 $ADBC$ 的直线为 z 轴，建立如图②所示的空间直角坐标系. 取 AC 的中点为 Q，连接 PQ，QO_1，O_1O_2，PO_2.

因为 $BC\perp$ 平面 PAC，$BC\subset$ 平面 $ADBC$，所以平面 $PAC\perp$ 平面 $ADBC$.

易知 $PA=PC$，所以 $PQ\perp AC$，又 $PQ\subset$ 平面 PAC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ADBC=AC$，所以 $PQ\perp$ 平面 $ADBC$.

又 $O_1O_2\perp$ 平面 $ADBC$，所以 $PQ/\!/O_1O_2$，易知 $PQ=O_1O_2$，所以四边形 PQO_1O_2 为平行四边形，所以 $PO_2=QO_1=\dfrac{1}{2}BC=2$，

易知 $PQ=4\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$，则 $O_1O_2=2\sqrt{3}$.

易得 $C(0,0,0)$，$O_2(2,2,2\sqrt{3})$，$B(0,4,0)$，$N(0,2,0)$.

…… 10 分

第二步：设点 M 的坐标，结合 $MO_2=2$，得到 M 点的轨迹方程.

设 $M(x,y,2\sqrt{3})$，连接 O_2M，因为 $PO_2=MO_2=2$，所以 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 且 $x\in[0,4]$. …… 11 分

第三步：由向量法求异面直线夹角的余弦值，结合基本不等式求最大值.

易知 $\overrightarrow{NM}=(x,y-2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}=(0,4,0)$，设异面直线 MN，AD 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{NM}||\overrightarrow{AD}|}\right|=\left|\dfrac{4(y-2)}{4\sqrt{x^2+(y-2)^2+12}}\right|=\dfrac{|y-2|}{\sqrt{x^2+(y-2)^2+12}}$，

所以 $\cos^2\theta=\dfrac{(y-2)^2}{x^2+(y-2)^2+12}=\dfrac{4-(x-2)^2}{x^2+4-(x-2)^2+12}=\dfrac{-x^2+4x}{4x+12}=\dfrac{-(x+3)^2+10(x+3)-21}{4(x+3)}=-\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{21}{4(x+3)}+\dfrac{5}{2}\leqslant-2\times\sqrt{\dfrac{x+3}{4}\cdot\dfrac{21}{4(x+3)}}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2$，

当且仅当 $x=\sqrt{21}-3$ 时取等号，则 $0\leqslant\cos\theta\leqslant\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$，…… 14 分

所以异面直线 MN 与 AD 所成角的余弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$. …… 15 分

题组 6

15.【解】(1) 分析：根据焦距和离心率求出 c，a，进而得到双曲线方程.

依题意，双曲线 C 的半焦距 $c=\sqrt{5}$，

由离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$，解得 $a=1$，则 $b^2=c^2-a^2=4$，

所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$. …… 5 分

(2) 第一步：三角形的一个顶点坐标已知，其对边所在直线的方程已知，通过点到直线距离公式求得三角形的高.

由(1)知双曲线 C 的左顶点 A 的坐标为 $(-1,0)$，点 A 到直线 $l:3x-y-3=0$ 的距离 $d=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. …… 7 分

第二步：联立直线方程与双曲线方程求出点 P，Q 的横坐标，利用弦长公式计算 $|PQ|$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$x_1<x_2$，由 $\begin{cases}y=3x-3,\\4x^2-y^2=4,\end{cases}$ 消去 y 并整理

得 $5x^2-18x+13=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=\frac{13}{5}$，则 $|PQ|=\sqrt{1+3^2}|x_1-x_2|=\frac{8\sqrt{10}}{5}$. …… 10 分

第三步：求三角形的面积.

所以△APQ 的面积 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{24}{5}$. …… 13 分

16. (1)【证明】分析：由问题逆推，要证明异面直线垂直优先寻找线面垂直关系，要证明线面垂直，先寻找线线垂直，结合三角形形状利用 BC 中点解决问题.

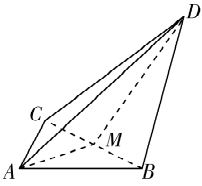
因为 $AB\perp AC$，$AB=AC=1$，所以在 Rt△ABC 中，由勾股定理可得 $BC=\sqrt{2}$.

又因为 $BD=CD=\sqrt{2}$，所以△BCD 是等边三角形. …… 2 分

取 M 为 BC 的中点，连接 AM，DM，可知 $AM\perp BC$，$DM\perp BC$.

又因为 $AM\cap DM=M$，AM，$DM\subset$ 平面 AMD，所以 $BC\perp$ 平面 AMD，

又因为 $AD\subset$ 平面 AMD，所以 $AD\perp BC$. …… 6 分



(2)【解】第一步：结合第(1)问中已知的垂直关系，易得二面角的平面角，求出其三角函数值.

由 $AM\perp BC$，$DM\perp BC$，可知∠AMD 是二面角 $A-BC-D$ 的平面角，所以 $\tan\angle AMD=-\sqrt{2}$，由 $\frac{\sin\angle AMD}{\cos\angle AMD}=-\sqrt{2}$，

$\sin^2\angle AMD+\cos^2\angle AMD=1$，$\angle AMD\in[0,\pi]$，

得 $\sin\angle AMD=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle AMD=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 8 分

第二步：利用二面角的平面角的三角函数值，求出三棱锥 $D-ABC$ 的高，进一步求出其体积，结合余弦定理求出 AD 的长.

由 $AM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$MD=\sqrt{DC^2-CM^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得三棱锥 $D-ABC$ 的高 $h=MD\cdot\sin(\pi-\angle AMD)=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=1$，其体积 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$，

又在△AMD 中，由余弦定理可得 $AD^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=3$，即 $AD=\sqrt{3}$， …… 11 分

第三步：先计算△ACD 的面积，再由等体积法计算出点 B 到平面 ACD 的距离 d，进而得到直线 BD 与平面 ACD 所成角的正弦值，由此可得到所成的角.

又 $AC^2+CD^2=AD^2$，所以 $AC\perp CD$，△ACD 的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设点 B 到平面 ACD 的距离为 d，则 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times d=\frac{1}{6}$，解得 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 BD 与平面 ACD 所成的角 θ 的正弦值为 $\frac{d}{BD}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=$

$\frac{1}{2}$，……14分

因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以直线 BD 与平面 ACD 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.……15分

17.【解】(1)分析：分析符合要求的情况，求概率.

游戏停止时共抽取5次，即前4次抽到2金券2银券，且第5次抽到金券，

故所求概率为 $P=\frac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}\times\frac{2}{6}=\frac{90}{210}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$.……4分

(2)分析：列出获得奖金的可能情况，分析如何获得对应的奖金数，求出对应概率即可.

奖金不低于270元，则可能为300元，290元，280元，270元.

①若奖金为300元，即前3次连续抽到3张金券，其概率为 $p_1=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$.……5分

②若奖金为290元，即前3次抽到2张金券和1张−10元银券，且第4次抽到金券，其概率为 $p_2=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{70}$.……6分

③若奖金为280元，即前3次抽到2张金券和1张−20元银券，且第4次抽到金券，同②知，其概率为 $p_3=\frac{1}{70}$.…7分

④若奖金为270元，

一种情况是前3次抽到2张金券和1张−30元银券，且第4次抽到金券，同②知，其概率为 $\frac{1}{70}$；

另一种情况是前4次抽到2张金券、1张−10元银券和1张−20元银券，且第5次抽到金券，其概率为 $\frac{C_4^2}{C_{10}^4}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{105}$，

所以 $p_4=\frac{1}{70}+\frac{1}{105}=\frac{1}{42}$.……8分

综上所述，奖金不低于270元的概率为 $p_1+p_2+p_3+p_4=\frac{3}{35}$.

……9分

(3)分析：构造新随机变量 X_i，并计算其期望，再利用给出的公式，求该顾客获得的奖金的期望.

记银券分别为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_6$，对应面值−10元，−20元，…，−60元.

记 $X_i=\begin{cases}1,Y_i\text{ 在停止前被抽到},\\0,Y_i\text{ 在停止前未被抽到}.\end{cases}$

银券 Y_i 与4张金券被抽到的先后次序是等可能的，$X_i=1$ 表示 Y_i 在与4张金券一起排列时，排在了前3个位置上，所以每张银券被抽到的概率 $P(X_i=1)=\frac{C_3^1A_4^4}{A_5^5}=\frac{3}{5}$，$i=1,2,\cdots,6$，

……12分

所以 $E(X_i)=P(X_i=1)=\frac{3}{5}$，$i=1,2,\cdots,6$.……13分

因为奖金 $Z=300-\sum_{i=1}^{6}10i\cdot X_i=300-10\sum_{i=1}^{6}i\cdot X_i$，

所以 $E(Z)=300-10\sum_{i=1}^{6}i\cdot E(X_i)=300-10\times21\times\frac{3}{5}=174$，

即该顾客获得的奖金的期望为174元.……15分

一题多解 (3) 分析：构造新随机变量 X_i，并计算其期望，再利用给出的公式求该顾客获得的奖金的期望.

记银券分别为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_6$，对应面值 -10 元，-20 元，$\cdots$，-60 元.

记 $X_i=\begin{cases}1,Y_i\text{ 在停止前被抽到},\\0,Y_i\text{ 在停止前未被抽到},\end{cases}$

X 为停止时抽到银券的张数，则 X 的可能取值为 $0,1,2,3,4,5,6$，且 $X=\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$.

由题得 $P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{35}$，

$P(X=2)=P=\dfrac{1}{7}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{21}$，$P(X=4)=\dfrac{C_4^2C_6^4}{C_{10}^6}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{14}$，

$P(X=5)=\dfrac{C_4^2C_6^5}{C_{10}^7}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=6)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^8}=\dfrac{2}{15}$，

计算得 $E(X)=\dfrac{18}{5}$. …… 12 分

又因为 $X=\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$，所以 $E(X)=E(\sum\limits_{i=1}^{6}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{6}E(X_i)$.

因为每张银券被抽到是等可能的，所以 $E(X_i)=\dfrac{1}{6}E(X)=\dfrac{3}{5}$，$i=1,2,\cdots,6$. …… 13 分

因为奖金 $Z=300-\sum\limits_{i=1}^{6}10i\cdot X_i=300-10\sum\limits_{i=1}^{6}i\cdot X_i$，

所以 $E(Z)=300-10\sum\limits_{i=1}^{6}i\cdot E(X_i)=300-10\times21\times\dfrac{3}{5}=174$，

即该顾客获得的奖金的期望为 174 元. …… 15 分

题组 7

15.【解】(1) 分析：求导，利用导数判断函数 $f(x)$ 的单调性和极值.

当 $a=4$，$b=\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=\ln x-4x+\dfrac{3}{2}x^2$，其定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-4+3x=\dfrac{(3x-1)(x-1)}{x}$. …… 2 分

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{3}$ 或 $x>1$；令 $f'(x)<0$，解得 $\dfrac{1}{3}<x<1$.

则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减. …… 4 分

所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{7}{6}-\ln 3$，极小值为 $f(1)=-\dfrac{5}{2}$. …… 6 分

(2) 第一步：分情况讨论函数 $f(x)$ 的单调性，求 $f(x)$ 的最大值.

若 $b=0$，则 $f(x)=\ln x-ax$，定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$. …… 7 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，可知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 无最大值，不合题意. …… 8 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{a}$，令 $f'(x)<0$，解得

$x>\frac{1}{a}$,

可知函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减,

则函数$f(x)$的最大值为$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1$. …… 10分

第二步:构造函数,求出其单调性,进而求出a的取值范围.

即$-\ln a-1<2a-3$,可得$2a+\ln a-2>0$. …… 11分

设$g(a)=2a+\ln a-2$,$a>0$,易知$g(a)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

且$g(1)=0$,由不等式$g(a)>0=g(1)$可得$a>1$,

所以a的取值范围为$(1,+\infty)$. …… 13分

16.【解】(1)分析:设C的半焦距为$c(c>0)$,根据椭圆C经过点$A(2,1)$以及离心率$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得$a^2$与$b^2$的值,进而得到椭圆$C$的方程.

设C的半焦距为$c(c>0)$,因为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

经过点$A(2,1)$,所以$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$①,

又离心率为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$②,联立①②式,解得$a^2=8$,$b^2=2$,

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. …… 4分

(2)第一步:当直线l的斜率存在时,设直线l的方程为$y=kx+m$,代入椭圆方程,得到关于x的一元二次方程,设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由根与系数的关系得到x_1+x_2,$x_1\cdot x_2$的表达式.

当直线l的斜率存在时,设直线l的方程为$y=kx+m$,

代入椭圆方程,消去y得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-8=0$,$\Delta=16(8k^2-m^2+2)>0$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由一元二次方程根与系数的关系,

得$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-8}{1+4k^2}$. …… 7分

第二步:由$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$,代入$x_1+x_2$,$x_1\cdot x_2$的表达式,求解直线$l$所过定点的坐标.

因为$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$,

即$(1+k^2)x_1\cdot x_2-[2+k(1-m)](x_1+x_2)+(1-m)^2+4=0$,所以

$(1+k^2)\times\frac{4m^2-8}{1+4k^2}-[2+k(1-m)]\left(-\frac{8km}{1+4k^2}\right)+(1-m)^2+4=0$,

化简整理得$(2k+m-1)(6k+5m+3)=0$, …… 9分

当$2k+m-1=0$时,$m=1-2k$,直线方程为$y=kx+1-2k=k(x-2)+1$,所以直线l过定点$A(2,1)$,不符合题意.

当$6k+5m+3=0$时,$m=-\frac{6k+3}{5}$,满足$\Delta>0$,直线方程为$y=kx-\frac{6k+3}{5}=k\left(x-\frac{6}{5}\right)-\frac{3}{5}$,

所以直线l过定点$\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$. …… 12分

第三步:当直线l的斜率不存在时,设直线方程为$x=t(t\neq2)$,代入椭圆方程,得到$y^2=2-\frac{t^2}{4}$,设$M(t,y_0)$,$N(t,-y_0)$,由$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(t-2)(t-2)-(y_0-1)(y_0+1)=0$,代入$y_0^2$的表

达式，求解直线 l 过点 $\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

当直线 l 的斜率不存在时，设直线方程为 $x=t(t\neq 2)$，代入椭圆方程得 $y^2=2-\frac{t^2}{4}$.

设 $M(t,y_0)$，$N(t,-y_0)$，则 $y_0^2=2-\frac{t^2}{4}$，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(t-2)(t-2)-(y_0-1)(y_0+1)=0$，即 $(t-2)^2-(y_0^2-1)=0$，将 $y_0^2=2-\frac{t^2}{4}$ 代入，化简得 $(5t-6)(t-2)=0$，解得 $t=\frac{6}{5}$ 或 $t=2$（舍去），

所以直线 l 的方程为 $x=\frac{6}{5}$，此时直线 l 过点 $\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

第四步：得到结论.

综上，直线 l 过定点 $\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$. …… 15 分

17. (1)【证明】分析：抓住翻折过程中不变的垂直关系，然后利用线面垂直的判定定理进行证明.

如图①，取 AC 的中点 E，BC 的中点 F，连接 AF，DF.

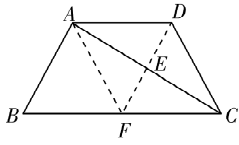
∵ $BC=4$，F 是 BC 的中点，∴ $FC=2=AD$，

又 $AD/\!/BC$，且 $AD=DC$，∴ 四边形 $ADCF$ 为菱形，∴ $DF\perp AC$，$DE=EF$，…… 2 分

∴ $\triangle DAC$ 在翻折过程中，总有 $AC\perp PE$，$AC\perp EF$，

又∵ PE，$EF\subset$ 平面 PEF，$PE\cap EF=E$，∴ $AC\perp$ 平面 PEF.

…… 4 分



图①

(2)【解】第一步：找到直线 AB 与直线 PE 所成的角，并求出四边形 $ABFE$ 的面积.

∵ E，F 分别为棱 AC，BC 的中点，∴ $EF/\!/AB$，且 $EF=\frac{1}{2}AB=1$，又直线 AB 与直线 PE 所成的角为 60°，∴ 直线 EF 与直线 PE 所成的角为 60°，

则 $\angle PEF=60°$ 或 120°. …… 6 分

∴ $\triangle PEF$ 为边长为 1 的正三角形或顶角为 120°，腰长为 1 的等腰三角形，又四边形 $ABFE$ 是上、下底长分别为 1，2 的梯形，且 $AB\perp AE$，$AE=AD\cdot\cos 30°=\sqrt{3}$，∴ 四边形 $ABFE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+1)\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

第二步：证明平面 $PEF\perp$ 平面 ABC，作出四棱锥 $P-ABFE$ 的高从而求解.

由(1)知 $AC\perp$ 平面 PEF，又 $AC\subset$ 平面 ABC，∴ 平面 $PEF\perp$ 平面 ABC.

过点 P 作 $PH\perp EF$ 于点 H（图略），∵ 平面 $PEF\cap$ 平面 $ABC=EF$，$PH\subset$ 平面 PEF，∴ $PH\perp$ 平面 ABC，则 $PH=PE\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，…… 8 分

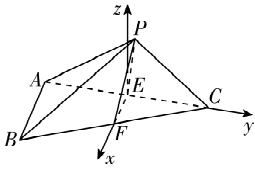
∴ 四棱锥 $P-ABFE$ 的体积 $V_{P-ABFE}=\frac{1}{3}S_{四边形ABFE}\times PH=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$. …… 9 分

(3)【解】第一步：建立空间直角坐标系，分别求出平面 PAB

与平面 PEF 的法向量.

由(1)(2)知平面 $PEF\perp$ 平面 ABC,且 $EF\perp AC$,

以 E 为坐标原点,分别以 EF,AC 所在直线为 x 轴、y 轴,以过点 E 且与平面 EFC 垂直的直线为 z 轴,建立如图②所示的空间直角坐标系.



图②

设在翻折过程中 $\angle PEF=\theta$,$0<\sin\theta\leqslant 1$,

则 $A(0,-\sqrt{3},0)$,$B(2,-\sqrt{3},0)$,$P(\cos\theta,0,\sin\theta)$,

$\therefore \overrightarrow{AP}=(\cos\theta,\sqrt{3},\sin\theta)$,$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$, …… 11 分

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\cos\theta+\sqrt{3}y+z\sin\theta=0,\\ 2x=0,\end{cases}$

令 $y=\sin\theta$,则 $x=0$,$z=-\sqrt{3}$,$\therefore \boldsymbol{n}=(0,\sin\theta,-\sqrt{3})$. …… 13 分

$\because AC\perp$ 平面 PEF,$\therefore$ 可取平面 PEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.

第二步:结合 θ 的正弦值的取值范围求解平面 PAB 与平面 PEF 夹角余弦值的取值范围.

$$\therefore |\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+3}}=\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+3}}.$$

又 $0<\sin^2\theta\leqslant 1$,$\therefore 0<\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+3}\leqslant\dfrac{1}{4}$,则 $0<\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+3}}\leqslant\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 在翻折过程中平面 PAB 与平面 PEF 夹角余弦值的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$. …… 15 分

题组 8

15.【解】(1)分析:写出零假设,计算 χ^2,与对应的临界值比较作出判断.

零假设 H_0:学生的近视情况与夜晚使用台灯光照的类型无关. …… 1 分

$$\chi^2=\frac{240\times(80\times60-60\times40)^2}{140\times100\times120\times120}\approx 6.857>6.635.$$ …… 5 分

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即认为学生的近视情况与夜晚使用台灯光照的类型有关. …… 7 分

(2)分析:近视人数服从二项分布,可以使用概率公式计算.

夜晚使用光照类型为白光的台灯的学生患近视的概率 $p=\dfrac{80}{120}=\dfrac{2}{3}$. …… 8 分

记抽取的 3 名学生中近视的人数为 X,则 X 服从二项分布 $B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$. …… 9 分

可得 $P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=3\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$.

…… 13 分

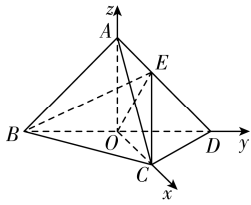
16.【解】(1)分析:建立空间直角坐标系,用向量法求得二面角的大小.

因为 $AB=AD=BD=2$,O 为 BD 的中点,所以 $\triangle ABD$ 为等边

三角形，$AO\perp BD$，且 $AO=\sqrt{3}$.

又因为 $OC\perp$ 平面 ABD，$AO\subset$ 平面 ABD，$BD\subset$ 平面 ABD，所以 $OC\perp AO$，$OC\perp BD$.

故以 O 为原点，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OA}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



由题意可得 $O(0,0,0)$，$B(0,-1,0)$，$D(0,1,0)$，$A(0,0,\sqrt{3})$，$C(\sqrt{3},0,0)$，则 $\overrightarrow{OA}=(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OD}=(0,1,0)$. …… 2 分

因为 $DE=2EA$，即 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，即 $E\left(0,\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. …… 4 分

易知平面 BCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$. …… 5 分

设平面 EBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}x+y=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{4}{3}y+\frac{2\sqrt{3}}{3}z=0,\end{cases}$ 故可取 $\boldsymbol{n}_2=(-1,\sqrt{3},-2)$.

…… 7 分

设二面角 $E-BC-D$ 的大小为 θ，由图可知 θ 为锐角，

且 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|-2|}{1\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\theta=45°$，即二面角 $E-BC-D$ 的大小为 $45°$. …… 9 分

(2) 分析：假设存在点 F，设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CA}$，求出平面 COE 的法向量 $\boldsymbol{t}$，再由 BF//平面 COE 得 $\boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，进而求出 λ，得到点 F 的位置.

存在，点 F 位于线段 CA 的延长线上，且满足 $AF=AC$.

…… 10 分

理由如下：设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CA}$，由(1)知 $\overrightarrow{CA}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{CF}=(-\sqrt{3}\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)$.

设平面 COE 的法向量为 $\boldsymbol{t}=(a,b,c)$，

由(1)知 $\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{OE}=\left(0,\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{OC}=\sqrt{3}a=0,\\ \boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}b+\frac{2\sqrt{3}}{3}c=0,\end{cases}$ 令 $c=-1$，则 $a=0$，$b=2\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{t}=(0,2\sqrt{3},-1)$. …… 12 分

因为 BF//平面 COE，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,1,\sqrt{3}\lambda)$，所以 $\boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{BF}=2\sqrt{3}\times1+\sqrt{3}\lambda\times(-1)=0$，解得 $\lambda=2$，即 $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CA}$.

因此存在点 F，使得 BF//平面 COE，点 F 位于线段 CA 的延长线上，且 $AF=AC$. …… 15 分

17.【解】(1) 分析：由 S_n 求出的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，解出满足要求的 n.

由题知 $S_n=n^2-8n$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1-8=-7$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-8n)-[(n-1)^2-8(n-1)]=2n-9$. …… 2 分

经验证，$n=1$ 也满足 $a_n=2n-9$，故通项公式为 $a_n=2n-9$，$n\in\mathbf{N}^*$. …… 3 分

令 $a_n<0$，即 $2n-9<0$，解得 $n<\dfrac{9}{2}$，所以满足条件的最大正整数 $n=4$. …… 5 分

(2)(i) 分析：根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，依次求出数列 $\{b_n\}$ 的前 4 项，进而求得 T_4.

由 $a_n=2n-9$ 得 $a_1=-7$，$a_2=-5$，$a_3=-3$，$a_4=-1$，$a_5=1$.

由题知 $b_n=\dfrac{1}{|a_na_{n+1}|}$，所以 $b_1=\dfrac{1}{35}$，$b_2=\dfrac{1}{15}$，$b_3=\dfrac{1}{3}$，$b_4=1$，

则 $T_4=b_1+b_2+b_3+b_4=\dfrac{10}{7}$. …… 8 分

(ii) 分析：利用裂项相消法求出 T_n 的表达式，得到 $T_n<\dfrac{27}{14}$ 即可确定 k 的最小值.

由题意得 $b_n>0$，则 $\{T_n\}$ 是递增数列.

当 $n\geqslant 5$ 时，$a_n=2n-9>0$，则 $b_n=\dfrac{1}{(2n-9)(2n-7)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-9}-\dfrac{1}{2n-7}\right)$. …… 10 分

所以 $\sum\limits_{i=5}^{n}b_i=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=5}^{n}\left(\dfrac{1}{2i-9}-\dfrac{1}{2i-7}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n-7}\right)$，

…… 12 分

得 $T_n=T_4+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n-7}\right)=\dfrac{27}{14}-\dfrac{1}{4n-14}<\dfrac{27}{14}(n\geqslant 5,n\in\mathbf{N}^*)$.

…… 14 分

又 $\{T_n\}$ 是递增数列，所以 $14T_n<27$，所以 $k\geqslant 27$，故满足条件的 k 的最小值为 27. …… 15 分

题组 9

15.【解】(1) 分析：将点 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 代入 $f(x)$ 的解析式中可求得 b，再根据切线斜率与导数的关系可求得 a.

由 $f(1)=b-1=\dfrac{1}{2}$，得 $b=\dfrac{3}{2}$，则 $f'(x)=\dfrac{x+a-a\ln x-3}{2x^2}(x>0)$，

所以 $f'(1)=\dfrac{1+a-3}{2}=0$，即 $a=2$.

综上，$a=2$，$b=\dfrac{3}{2}$. …… 4 分

(2) 第一步：根据 $f(x)$ 的导函数构造新函数，对新函数求导，研究其单调性.

由(1)可知 $f'(x)=\dfrac{x-2\ln x-1}{2x^2}(x>0)$，令 $g(x)=x-2\ln x-1$

$(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{x-2}{x}$. …… 6 分

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. …… 7 分

第二步：由零点存在定理说明 $f(x)$ 的导函数存在两个变号零点.

又 $g(1)=0$，$g(2)<g(1)=0$，$g(e^2)>0$，所以 $\exists x_0\in(2,e^2)$，使得 $g(x_0)=0$，故 $f'(1)=f'(x_0)=0$. …… 9 分

第三步：结合导函数的变号零点及函数定义域，讨论原函数的单调性并说明极值点个数.

故当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，当 $1<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

…… 12 分

所以 $f(x)$ 有两个极值点. …… 13 分

16. (1)【解】第一步：利用 S_n，a_n 的关系，得到关于 S_n 的递推公式.

因为 $a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，所以 $S_{n+1}-S_n=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$.

又因为 $a_1=1$，所以 $\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\neq0$，所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=1$.

…… 2 分

第二步：求出 S_n 的表达式，进而求 a_n.

所以 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，则 $\sqrt{S_n}=n$，所以 $S_n=n^2$. …… 4 分

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=2n-1$. …… 6 分

(2)【证明】第一步：根据 a_n 求出 b_n，然后利用错位相减法求出 T_n 表达式，从而证明 $T_n<\dfrac{5}{9}$.

由题意及(1)得，$b_n=\dfrac{2n-1}{4^n}$， …… 7 分

所以 $T_n=1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^1+3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots+(2n-1)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$，①

$\dfrac{1}{4}T_n=1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\cdots+(2n-3)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+(2n-1)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$，② …… 9 分

①−②得 $\dfrac{3}{4}T_n=\dfrac{1}{4}+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\cdots+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n-(2n-1)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$，

整理得 $T_n=\dfrac{5}{9}-\left(\dfrac{2n}{3}+\dfrac{5}{9}\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n<\dfrac{5}{9}$. …… 11 分

第二步：通过放缩法，将 T_n 除首项外的各项缩小，得到 $T_n\geqslant\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$，从而得证.

又 $T_n=1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^1+3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots+(2n-1)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\geqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$，所以 $\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)\leqslant T_n<\dfrac{5}{9}$，得证. …… 15 分

17. (1)【证明】分析：由题得出线线垂直，根据线面垂直的判定定理进行证明.

因为 $AB=BC$，D 为 AC 的中点，所以 $BD\perp AC$.

又 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AC$. … 2 分

由题知 D，E 分别为 AC，A_1C_1 的中点，则 $DE\parallel AA_1$，故

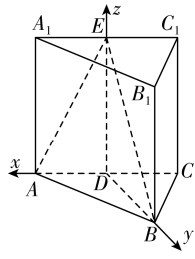
$DE\perp AC$.

又 $BD\cap DE=D$，BD，$DE\subset$ 平面 BDE，所以 $AC\perp$ 平面 BDE.

…… 5 分

(2)【解】分析：以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，分别计算平面 ABE 与平面 BED 的法向量，两向量夹角余弦值的绝对值即为所求.

由(1)易知 DA，DB，DE 两两垂直，以 D 为坐标原点，DA，DB，DE 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$E(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-2,2)$. …… 6 分



设平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=-x+2y=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{m}=-2y+2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{m}=(2,1,1)$. …… 8 分

易知 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ 为平面 BED 的一个法向量.

设锐二面角 $A-BE-D$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\times1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

即二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …… 10 分

(3)【解】分析：利用向量法求点到平面的距离.

由(2)知，$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$.

设点 D 到平面 ABE 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

即点 D 到平面 ABE 的距离为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …… 15 分

一题多解 (几何法)(2)第一步：由二面角的平面角的定义作出平面角并证明.

由(1)可得 $AC\perp$ 平面 BDE，即 $AD\perp$ 平面 BDE，又 $BE\subset$ 平面 BDE，故 $AD\perp BE$.

过 D 作 $DO\perp BE$ 于 O，连接 AO，因为 $AD\cap DO=D$，AD，$DO\subset$ 平面 AOD，所以 $BE\perp$ 平面 AOD.

又 $AO\subset$ 平面 AOD，故 $AO\perp BE$，则 $\angle AOD$ 即为二面角 $A-BE-D$ 的平面角. …… 6 分

第二步：分别计算 DO 和 AO，证明 $\triangle ADO$ 为直角三角形，则 $\cos\angle AOD=\dfrac{DO}{AO}$.

因为 D 是 AC 的中点，$AC=2$，所以 $AD=1$，由(1)知，$BD\perp AC$，则 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2$.

又 E 为 A_1C_1 的中点，所以 $DE=AA_1=2$，

因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$BD\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BD$，所以 $DE\perp BD$，

故 $BE=\sqrt{BD^2+DE^2}=2\sqrt{2}$.

由 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}BD\cdot DE=\dfrac{1}{2}BE\cdot DO$，可得 $DO=\dfrac{2\times2}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

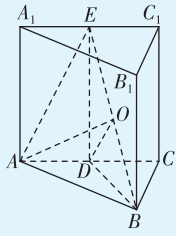
…… 7 分

因为 $AD\perp$ 平面 BDE，$DO\subset$ 平面 BDE，所以 $AD\perp DO$，$\triangle ADO$ 为直角三角形，

则在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中，$AO=\sqrt{AD^2+DO^2}=\sqrt{3}$，…… 8 分

故 $\cos\angle AOD=\dfrac{DO}{AO}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

即二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …… 10 分



(3) 分析：利用等体积法计算点到平面的距离.

易知 $V_{D-ABE}=V_{A-BDE}$. …… 11 分

由 $AD\perp$ 平面 BDE，得 $V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle BDE}\cdot AD=\dfrac{2}{3}$.

…… 12 分

因为 $AB=\sqrt{5}$，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{5}$，$BE=2\sqrt{2}$，

所以 $\triangle ABE$ 为等腰三角形，底边上的高为 $AO=\sqrt{3}$，

可得 $S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$. …… 13 分

设点 D 到平面 ABE 的距离为 h，由 $V_{D-ABE}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABE}\cdot h$，

得 $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot h=\dfrac{2}{3}$， …… 14 分

解得 $h=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

即点 D 到平面 ABE 的距离为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …… 15 分

题组 10

15.【解】(1) 分析：利用抛物线的定义即可求解.

当 $PD\perp x$ 轴时，点 P 的横坐标为 $2p$， …… 2 分

所以 $|PF|=2p+\dfrac{p}{2}=\dfrac{5p}{2}=5$，解得 $p=2$，

所以 E 的方程为 $y^2=4x$. …… 5 分

(2) 分析：根据 P 在 E 上运动设出点 P 坐标，进而得到以 PD 为直径的圆的圆心 O_1 的坐标，求出关于弦长的表达式，根据弦长为定值求出 m.

根据抛物线的对称性，不妨设 $P(4t^2,4t)$，而 $D(4,0)$，则以 PD 为直径的圆的圆心 O_1 的坐标为 $(2+2t^2,2t)$.

设圆心 O_1 到直线 $x=m$ 的距离为 d，圆 O_1 的半径为 R，则 $d^2=(2+2t^2-m)^2$，

$R^2=\dfrac{1}{4}|PD|^2=\dfrac{1}{4}[(4t^2-4)^2+(4t)^2]=4[(t^2-1)^2+t^2]$.

…… 8 分

设直线 $x=m$ 被以 PD 为直径的圆所截得的弦长为 l，

则 $\dfrac{l^2}{4}=R^2-d^2=4[(t^2-1)^2+t^2]-(2+2t^2-m)^2=(4m-12)t^2+4m-m^2$. …… 10 分

因为当 P 在 E 上运动时，直线 $x=m$ 被以 PD 为直径的圆所截得的弦长为定值，

所以 $4m-12=0$，解得 $m=3$，此时 $l=2\sqrt{3}$. …… 13 分

16. (1)【证明】分析：由二倍角公式及正弦定理对原式进行边化角，再结合锐角三角形对内角范围的限制进行证明.

由 $b(2\cos^2 C-1)=2c\cos B\cos C$，得 $b\cos 2C=2c\cos B\cos C$.

…… 1 分

由正弦定理得 $\sin B\cos 2C=2\sin C\cos B\cos C$，

$\therefore \sin B\cos 2C=\sin 2C\cos B$，…… 3 分

又 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，$\therefore 0<B<\frac{\pi}{2}, 0<C<\frac{\pi}{2}, 0<2C<\pi$，

$\therefore \tan B=\tan 2C$.

$\therefore B=2C$. …… 6 分

(2)【解】第一步：根据正弦定理、二倍角公式及两角和的正弦公式，将 $\frac{1}{\cos C}+\frac{a}{b}$ 转化为关于 C 的式子.

$$\frac{1}{\cos C}+\frac{a}{b}=\frac{1}{\cos C}+\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{1}{\cos C}+\frac{\sin(B+C)}{\sin B}$$

$$=\frac{1}{\cos C}+\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin B}$$

$$=\frac{1}{\cos C}+\frac{\sin 2C\cos C+\cos 2C\sin C}{\sin 2C}$$

$$=\frac{1}{\cos C}+\frac{2\sin C\cos^2 C+\cos 2C\sin C}{2\sin C\cos C}$$

$$=\frac{1}{\cos C}+\cos C+\frac{2\cos^2 C-1}{2\cos C}=2\cos C+\frac{1}{2\cos C}.$$ …… 10 分

第二步：由锐角三角形限制 C 的范围，构造函数，分析该函数的单调性，即可求其取值范围.

$\because$ $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore \begin{cases} 0<C<\frac{\pi}{2}, \\ 0<B=2C<\frac{\pi}{2}, \\ 0<A=\pi-3C<\frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \cos C$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. …… 12 分

令 $t=2\cos C\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，$f(t)=t+\frac{1}{t}$.

易知函数 $f(t)$ 在 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 上单调递增，$\therefore f(t)\in\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

…… 14 分

故 $\frac{1}{\cos C}+\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. …… 15 分

17. (1)【证明】分析：连接 B_1D_1，BD，设 $A_1C_1\cap B_1D_1=S$，$AC\cap BD=T$，连接 ST 并证明 $BD\perp ST$，进而得到 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，故 $BD\perp AA_1$，再根据线面垂直的判定定理证明即可.

连接 B_1D_1，BD，设 $A_1C_1\cap B_1D_1=S$，$AC\cap BD=T$，连接 ST.

在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$B_1D_1/\!/BD$.

又由题知 $B_1B=D_1D$，则四边形 BDD_1B_1 为等腰梯形，

又易知 S,T 分别为 B_1D_1,BD 的中点，所以 $BD\perp ST$. …… 2 分

已知四边形 $ABCD$ 为菱形，则 $BD\perp AC$，又 $AC\cap ST=T$，AC，$ST\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，又 $AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BD\perp AA_1$. …… 5 分

又 $A_1A\perp AC$，$AC\cap BD=T$，AC，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

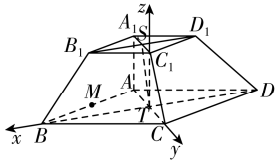
所以 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$. …… 7 分

(2)【解】第一步：寻找垂直关系，建立空间直角坐标系.

在菱形 $ABCD$ 中，由 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，可得 $AC=AB=2$，由相似关系可得 $A_1C_1=AT=1$，又 $A_1C_1/\!/AC$，则四边形 AA_1C_1T 为平行四边形，所以 $AA_1/\!/C_1T$.

又 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $C_1T\perp$ 平面 $ABCD$.

在菱形 $ABCD$ 中，$TB\perp TC$，以 T 为原点，TB，TC，TC_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. …… 8 分



第二步：设 $C_1(0,0,m)$，$m>0$，写出相关点的坐标，求出平面 BCC_1B_1 和平面 A_1C_1CA 的法向量，根据面面角余弦值求出 m，进而利用向量法求解点 M 到平面 BCC_1B_1 的距离.

不妨设 $C_1(0,0,m)$，$m>0$，又 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，则有 $\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,m)$. …… 9 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}x-y=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CC_1}=-y+mz=0,\end{cases}$ 令 $z=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{n}_1=(m,\sqrt{3}m,\sqrt{3})$. …… 10 分

易知平面 A_1C_1CA 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$. …… 11 分

由已知可得 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，即 $\dfrac{m}{\sqrt{4m^2+3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，解得 $m=1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$. …… 13 分

由 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$ 得点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，

则 $\overrightarrow{MC}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$，因此点 M 到平面 BCC_1B_1 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{MC}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. …… 15 分

题组 11

15.【解】(1) 分析：提出零假设，并求出 χ^2，与对应的临界值进行对比即可下结论.

零假设 H_0：观众对机器人团体舞蹈表演节目的喜欢与否和性别无关. …… 2 分

$$\chi^2=\frac{100\times(40\times30-10\times20)^2}{50\times50\times60\times40}=\frac{50}{3}\approx16.667>10.828,$$

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，即观众对机器人团体舞蹈表演节目的喜欢与否和性别

有关联. …… 6分

(2)分析:根据条件概率公式求解并解释其意义.

$P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$, $P(B|\overline{A})=\frac{n(\overline{A}B)}{n(\overline{A})}=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$,则

$P(B|A)>P(B|\overline{A})$. …… 10分

意义:该样本中男性对机器人团体舞蹈表演节目喜欢的概率比女性对机器人团体舞蹈表演节目喜欢的概率大. …… 13分

16. (1)【解】分析:根据题目条件,结合 a,b,c 间的关系列方程组求解.

已知椭圆的短轴长为 $2\sqrt{3}$,离心率为$\frac{1}{2}$,

所以$\begin{cases}2b=2\sqrt{3},\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$则椭圆 W 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 5分

(2)【证明】分析:结合图形可知四边形 $ABCD$ 的对角线相互垂直,则 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|$,设出 M 的坐标,表示出直线 AM 和 BM 的方程,从而得到 D,C 的坐标,进而表示出四边形 $ABCD$ 的面积,求得定值.

由(1)可知,$A(-2,0)$,$B(0,-\sqrt{3})$,设 $M(m,n)$($m>0,n>0$),则$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1$,即 $3m^2+4n^2=12$, …… 6分

则直线 MA 的方程为 $y=\frac{n}{m+2}(x+2)$,令 $x=0$,得 $y=\frac{2n}{m+2}$,所以 $D\left(0,\frac{2n}{m+2}\right)$;

直线 MB 的方程为 $y=\frac{n+\sqrt{3}}{m}x-\sqrt{3}$,令 $y=0$,得 $x=\frac{\sqrt{3}m}{n+\sqrt{3}}$,所以 $C\left(\frac{\sqrt{3}m}{n+\sqrt{3}},0\right)$. …… 8分

于是$|AC|=\frac{\sqrt{3}m}{n+\sqrt{3}}+2=\frac{\sqrt{3}m+2n+2\sqrt{3}}{n+\sqrt{3}}$,$|BD|=\frac{2n}{m+2}+\sqrt{3}=\frac{2n+\sqrt{3}m+2\sqrt{3}}{m+2}$, …… 10分

所以四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}m+2n+2\sqrt{3}}{n+\sqrt{3}}\cdot\frac{2n+\sqrt{3}m+2\sqrt{3}}{m+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4n^2+3m^2+12+4\sqrt{3}mn+12m+8\sqrt{3}n}{(m+2)(n+\sqrt{3})}$. …… 12分

又因为 $3m^2+4n^2=12$,

所以 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{24+4\sqrt{3}mn+12m+8\sqrt{3}n}{(m+2)(n+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}(2\sqrt{3}+mn+\sqrt{3}m+2n)}{(m+2)(n+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}(m+2)(n+\sqrt{3})}{(m+2)(n+\sqrt{3})}=2\sqrt{3}$,

即四边形 $ABCD$ 的面积为定值 $2\sqrt{3}$. …… 15分

17. (1)【解】分析:利用导数求解 $a<0$ 时的单调区间.

由题意得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=xe^x-\frac{a}{x}$.

…… 1分

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间. …… 3分

(2)【解】分析：对 $f(x)$ 多次求导，判断单调性，进而求解最值.

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x$，$f'(x)=x\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}}{x}$. … 5分

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+\dfrac{\mathrm{e}}{x^2}>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 7分

又 $f'(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(1)=0$. …… 9分

(3)【证明】分析：由(2)知 $(x-1)\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}\ln x$，再结合换元法证明不等式.

由(2)知 $(x-1)\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}\ln x$，

即 $(x-1)\mathrm{e}^{x-1}\geqslant\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号. …… 10分

令 $x=\dfrac{k+1}{k}(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}>\ln\dfrac{k+1}{k}$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}>\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k+1}{k}=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)$，…… 13分

即 $\mathrm{e}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}+\cdots+\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}>\ln(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 15分

题组 12

15.【解】(1)分析：根据正弦型函数的最值确定 $f(A)=1$，结合三角形内角的范围确定 A.

已知 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x)\leqslant f(A)$，所以 $f(A)=\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

得 $2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $A=\dfrac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. …… 4分

因为 A 是三角形的内角，所以 $A\in(0,\pi)$，则 $A=\dfrac{\pi}{3}$. …… 6分

(2)分析：已知两条边和一个角，由余弦定理即可求解第三边.

由余弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$.

又 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，由(1)知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，

即 $c^2-\sqrt{3}c-1=0$. …… 10分

解得 $c=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ 或 $c=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$(舍去)，故 $c=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$.

…… 13分

16.(1)【证明】第一步：利用线面垂直的判定定理、性质以及正三角形的性质，证得点 A_1 在平面 ABC 内的射影 O 是 $\triangle ABC$ 的中心.

如图，过点 A_1 作 $A_1O\perp$ 平面 ABC 于点 O，连接 AO,CO，

$\because BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore A_1O\perp BC$，又 $AA_1\perp BC$，$AA_1\cap A_1O=A_1$，$AA_1,A_1O\subset$ 平面 A_1AO，$\therefore BC\perp$ 平面 A_1AO.

$\because AO\subset$ 平面 A_1AO，$\therefore BC\perp AO$. …… 2 分

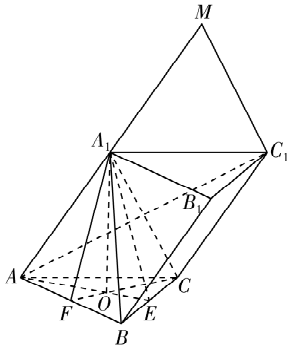
同理可证 $AB\perp CO$，又 $\triangle ABC$ 是正三角形，$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的中心. …… 3 分

第二步：利用线面垂直的性质证得 $A_1A=A_1B=A_1C$.

延长 AO,CO 分别交 BC,AB 于点 E,F，则 E,F 分别为 BC,AB 的中点，连接 A_1E,A_1F，

$\because BC\perp$ 平面 A_1AO，$A_1E\subset$ 平面 A_1AO，$\therefore BC\perp A_1E$，故 $A_1B=A_1C$，同理可证 $A_1B=A_1A$.

故 $A_1A=A_1B=A_1C$. …… 6 分



(2)【解】(几何法) 第一步：通过已知条件及(1)的结论证出 $\triangle A_1AB,\triangle A_1BC,\triangle A_1AC$ 均为等腰直角三角形，并根据长度关系求出 AA_1 的长，然后作 $C_1M/\!/A_1C$，找到所求线面角.

由(1)知，三棱锥 A_1-ABC 是正三棱锥，点 A_1 在底面 ABC 内的射影为正三角形 ABC 的中心 O，$A_1A=A_1B=A_1C$.

又 $\angle A_1AB=\angle A_1AC=45°$，$\therefore \angle AA_1B=\angle AA_1C=90°$，易知 $\triangle A_1BC\cong\triangle A_1AC$，$\therefore \angle BA_1C=\angle AA_1C=90°$，故三棱锥 A_1-ABC 的三个侧面 $\triangle A_1AB$，$\triangle A_1BC$，$\triangle A_1AC$ 均为等腰直角三角形，又 $AB=2$，所以 $A_1A=\sqrt{2}$. …… 9 分

如图，在平面 A_1ACC_1 中，过点 C_1 作 $C_1M/\!/A_1C$，交 AA_1 的延长线于点 M，$\because A_1C\perp A_1A$，$A_1C\perp A_1B$，$A_1A,A_1B\subset$ 平面 A_1AB，$A_1A\cap A_1B=A_1$，$\therefore A_1C\perp$ 平面 A_1AB，

$\therefore C_1M\perp$ 平面 A_1AB，则 $\angle C_1AM$ 即为直线 AC_1 与平面 AA_1B_1B 所成的角. …… 12 分

第二步：利用平行四边形的性质、线面垂直的性质及勾股定理得到 $\mathrm{Rt}\triangle AC_1M$ 各边长，从而求得 $\angle C_1AM$ 的余弦值.

易知 $CC_1=AA_1=\sqrt{2}$，

$\because C_1M/\!/A_1C$ 且 $A_1M/\!/CC_1$，$\therefore$ 四边形 A_1CC_1M 为平行四边形，$\therefore C_1M=A_1C=A_1A=\sqrt{2}$，$A_1M=CC_1=\sqrt{2}$，$\therefore AM=2\sqrt{2}$，

又 $\because C_1M\perp$ 平面 A_1AB 且 $AM\subset$ 平面 A_1AB，$\therefore C_1M\perp AM$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AMC_1$ 中，$AC_1=\sqrt{AM^2+MC_1^2}=\sqrt{10}$，

故 $\cos\angle C_1AM=\dfrac{AM}{AC_1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即直线 AC_1 与平面 AA_1B_1B 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. …… 15 分

一题多解　(2)(建系法)分析:以 E 为坐标原点,建立空间直角坐标系,利用空间向量法即可求得直线 AC_1 与平面 AA_1B_1B 所成角的正弦值,最后利用同角三角函数关系即可求解.

以 E 为坐标原点,$\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{OA_1}$ 分别为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(0,-1,0)$,$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. ……8分

设平面 AA_1B_1B 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$\because \overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, ……9分

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}x+y=0,\\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0,\end{cases}$

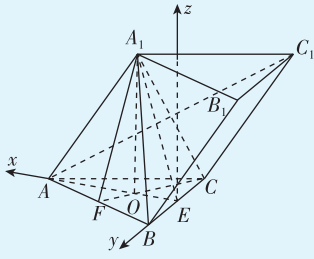
令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$. ……11分

又$\because \overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},-1,0)$,$\therefore \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3},-1,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. ……12分

设直线 AC_1 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

即直线 AC_1 与平面 AA_1B_1B 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

……15分



17.【解】(1)分析:先假设 $\{a_n\}$ 是等差数列,再结合题目条件得出矛盾.

不能. 理由如下:

由 $a_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}-1$($n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$),令 $n=2$,得到 $a_2=a_1-1$,所以 $a_2-a_1=-1$. ……1分

假设 $\{a_n\}$ 是等差数列,则公差 $d=-1$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-n+1+a_1$,则 $a_3=-3+1+a_1=a_1-2$,

又 $a_3=a_1a_2-1$,所以 $a_1-2=a_1(a_1-1)-1$,

整理得 $a_1^2-2a_1+1=0$,解得 $a_1=1$,所以 $a_2=0$,与数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数矛盾. ……3分

故假设不成立,故数列 $\{a_n\}$ 不可能为等差数列. ……4分

(2)(i)分析:根据条件可猜想当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=1$,用数学归

纳法进行证明.

若 $a_1=2$,则 $a_2=a_1-1=1$,$a_3=a_1a_2-1=2\times1-1=1$. …… 5 分

猜想,当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}-1=1$,下面用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时,$a_2=a_1-1=1$,猜想成立; …… 6 分

假设当 $n=k(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}^*)$ 时,猜想成立,即 $a_k=a_1a_2\cdots a_{k-1}-1=1$,

则当 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}=a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k-1=2a_k-1=1$,所以 $n=k+1$ 时,猜想仍成立, …… 8 分

所以 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\1,n\geqslant2,\end{cases}$ 则当 $n\geqslant2$ 时,$S_n=2+n-1=n+1$. …… 10 分

又 $n=1$ 时,$S_1=a_1=2$,满足 $S_n=n+1$,所以 $S_n=n+1$. …… 11 分

(ii)分析:由(i)求得$\{b_n\}$的通项公式,分 n 为偶数和奇数,利用并项求和法即可求解.

由(i)知 $S_n=n+1$,所以 $b_n=(-1)^n(n+1)^2$,

设$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,则 $T_n=-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^n(n+1)^2$. …… 12 分

当 n 为偶数时,$T_n=-2^2+3^2-4^2+\cdots+(n+1)^2=5+9+\cdots+2n+1=\dfrac{\frac{n}{2}(5+2n+1)}{2}=\dfrac{n(n+3)}{2}$;

当 n 为奇数时,$T_n=-2^2+3^2-4^2+\cdots+n^2-(n+1)^2=\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}-(n+1)^2=\dfrac{-n^2-3n-4}{2}$.

所以 $T_n=\begin{cases}\dfrac{n(n+3)}{2},n\text{ 为偶数},\\-\dfrac{n^2+3n+4}{2},n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ …… 15 分