



思维素养专练

1. C 【解析】 $(x-2y)^n$ 的展开式中第 3 项与第 6 项的二项式系数分别为 C_n^2, C_n^5 (易错: 注意第 3 项与第 6 项的二项式系数不是 C_n^3, C_n^6), 由题意, 得 $C_n^2 = C_n^5$, 所以 $n = 2 + 5 = 7$.

2. D 【解析】按第一行的染色情况进行分类讨论, 注意不重不漏.

第一行 3 个格子全蓝 (蓝蓝蓝): 第一行无红色格子, 第二行需要满足任意相邻两格子不能都红, 3 个格子的染色共有 1 (全蓝) + 3 (1 个红) + 1 (2 个不相邻红) = 5 (种);

第一行只有第一个格子为红 (红蓝蓝): 第二行第一个格子不能为红, 第二行格式为 (蓝 X Y).

要求 X, Y 不能都红, 共有 3 种染色方法 (蓝蓝蓝、蓝红蓝、蓝蓝红);

第一行只有中间格子为红 (蓝红蓝): 第二行中间格子不能为红, 第二行格式为 (X 蓝 Y), X, Y 无相邻限制, 共有 $2 \times 2 = 4$ (种) 染色方法;

第一行只有第三个格子为红 (蓝蓝红): 结合前面分析可知共有 3 种染色方法;

第一行两个红色格子 (红蓝红): 第二行第一、三格子都不能为红, 第二行格式为 (蓝 X 蓝), X 可红可蓝, 共有 2 种染色方法.

所以满足要求的染色方法共有 $5 + 3 + 4 + 3 + 2 = 17$ (种) (提示: 分类加法计数原理的应用). 故选 D.

3. B 【解析】设事件 A 为 $\min(X, Y) = 4$. 当 $\min(X, Y) = 4$ 时, 分两种情况: ①第一次掷出 4, 第二次掷出大于或等于 4 的数, 即第二次可以是 4, 5, 6, 7, 8, 共 5 种; ②第二次掷出 4, 第一次掷出大于或等于 4 的数, 即第一次可以是 4, 5, 6, 7, 8, 共 5 种.

两种情况都包含第一次和第二次都掷出 4, 所以事件 A 包含的样本点数为 $5 + 5 - 1 = 9$.

设事件 B 为 $\max(X, Y) = 8$, 则事件 AB 为 $\max(X, Y) = 8$ 且 $\min(X, Y) = 4$, 有 $X = 4, Y = 8$ 和 $X = 8, Y = 4$ 两种情况.

由条件概率公式得 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{2}{9}$.

4. $\frac{20}{27}$ 【解析】展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r \cdot \left(\frac{1}{3x^2}\right)^{6-r} \cdot x^r = C_6^r \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6-r} \cdot x^{3r-12}$, 令 $3r-12 = -3$, 得 $r = 3$, 所以 $\frac{1}{x^3}$ 的系数为 $C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}$.

5. 8.6 【解析】根据按比例分配的分层随机抽样的均值和方差的计算公式, 可得总体均值为 $\frac{32}{32+18} \times 170 + \frac{18}{32+18} \times 165 = 168.2$, 总体方差为 $\frac{32}{32+18} \times [1.76 + (170 - 168.2)^2] + \frac{18}{32+18} \times$



$$[4.76 + (165 - 168.2)^2] = 8.6.$$

6. A 【解析】二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-\frac{1}{2x}\right)^r = C_6^r \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{6-2r}$, 令 $6-2r=0$, 解得 $r=3$, 故展开式中常数项为 $C_6^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{5}{2}$.

快解 欲求常数项, 需要让式子中的 x 消失, 观察 $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^6$, 容易想到将 6 拆分成 3+3, 得到 $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式中常数项为 $C_6^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{5}{2}$.

7. B 【解析】因为 x_1, x_2, x_3 的平均数为 1, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, 所以数据 $x_1, x_2, x_3, 2x_1 - 1, 2x_2 - 1, 2x_3 - 1$ 的平均数为 $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + 2x_1 - 1 + 2x_2 - 1 + 2x_3 - 1}{6} = 1$.

又 $\frac{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2}{3} = 2$, 所以 $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 6$, 所以数据 $x_1, x_2, x_3, 2x_1 - 1, 2x_2 - 1, 2x_3 - 1$ 的方差为 $[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (2x_1 - 1 - 1)^2 + (2x_2 - 1 - 1)^2 + (2x_3 - 1 - 1)^2] \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} [(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2] = \frac{5}{6} \times 6 = 5$.

快解 因为 x_1, x_2, x_3 的平均数为 1, 方差为 2, 根据平均数与方差的性质, 得 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, 2x_3 - 1$ 的平均数为 1, 方差为 8, 将数据 $x_1, x_2, x_3, 2x_1 - 1, 2x_2 - 1, 2x_3 - 1$ 看成两层, 直接套用分层随机抽样的方差公式可得所求方差为 $\frac{1}{2} \times [2 + (1 - 1)^2] + \frac{1}{2} \times [8 + (1 - 1)^2] = 5$.

8. A 【解析】设四个互不相等的正整数分别为 a, b, c, d , 且 $a < b < c < d$, 满足平均数为 3, 极差为 4, 则 $a + b + c + d = 4 \times 3 = 12$, $d - a = 4$.

根据题意可得 $a + b + c + a + 4 = 12 \Rightarrow 2a + b + c = 8$, 且 $a < b < c < a + 4$, a, b, c, d 均为正整数.

令 $a = 1$, 则 $d = 5$, 此时 $1 < b < c < 5$, 即 $b, c \in \{2, 3, 4\}$, 又因为 $b + c = 8 - 2a = 6$, 所以 $b = 2, c = 4$.

当 $a \geq 2$ 时, 不符合题意.

所以这四个互不相等的正整数分别为 1, 2, 4, 5, 方差为 $\frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{4} = \frac{5}{2}$.

快解 因为四个互不相等的正整数极差为 4, 所以最小数取 1, 最大数取 5, 中间的数根据平均数为 3, 可取 2 和 4, 所以这四个数分别为 1, 2, 4, 5, 所以方差为 $\frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.



9. C 【解析】由题可得 $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$,

所以 $\frac{1}{z} = \frac{-\sqrt{3} - i}{(-\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} - i)} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$, 所以 $\frac{1}{z}$ 在复平面内

对应的点为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, 位于第三象限. 故选 C.

10. A 【解析】各位数字之和为 5 的四位数叫“吉祥数”, 按首位数字分类讨论.

当首位数字为 5 时, 剩余三位数字分别是 0, 0, 0, 共有 1 个“吉祥数”;

当首位数字为 4 时, 剩余三位数字分别是 1, 0, 0, 共有 3 个“吉祥数”;

当首位数字为 3 时, 剩余三位数字分别是 1, 1, 0 或 2, 0, 0, 共有 $3+3=6$ (个) “吉祥数”;

当首位数字为 2 时, 剩余三位数字分别是 2, 1, 0 或 3, 0, 0 或 1, 1, 1, 共有 $A_3^3+3+1=10$ (个) “吉祥数”;

当首位数字为 1 时, 则剩余三位数字分别是 3, 1, 0 或 4, 0, 0 或 1, 1, 2 或 2, 2, 0, 共有 $A_3^3+3+3+3=15$ (个) “吉祥数”.

综上, 共有 $1+3+6+10+15=35$ (个) “吉祥数”. 故选 A.

11. AD 【解析】 $97\ 200 = 2^4 \times 3^5 \times 5^2$, 即 97 200 的素因数为 2, 3, 5, 故 A 正确;

由题设, 97 200 不同的正因数有 $(4+1) \times (5+1) \times (2+1) = 90$ (个) (提示: 将 A 项中素因数的指数加 1, 再相乘, 即得到不同的正因数个数), 故 B 错误;

由 $0=1 \times 0, 2=1 \times 2, 4=1 \times 4=2 \times 2, 6=1 \times 6=2 \times 3, 8=1 \times 8=2 \times 4, 10=1 \times 10=2 \times 5, 12=1 \times 12=2 \times 6=3 \times 4, 14=1 \times 14=2 \times 7, 16=1 \times 16=2 \times 8=4 \times 4, 18=1 \times 18=2 \times 9=3 \times 6, 20=1 \times 20=2 \times 10=4 \times 5, 22=1 \times 22=2 \times 11, 24=1 \times 24=2 \times 12=3 \times 8=4 \times 6, 26=1 \times 26=2 \times 13, 28=1 \times 28=2 \times 14=4 \times 7$, 综上, 只有 6, 28 是完全数, 共 2 个, 故 C 错误;

由 C 分析知, 15 个数中有 2 个完全数, 故随机选两个数中至少有一个完全数的概率为

$P = 1 - \frac{C_{13}^2}{C_{15}^2} = 1 - \frac{26}{35} = \frac{9}{35}$, 故 D 正确.

故选 AD.

12. BCD 【解析】(特殊值法) 取 $n=2, m=3, r=1, s=1$, 左边为 $C_2^1 C_3^1 = 6$, 右边为 $C_5^3 = 10$, 此时 $C_n^r C_m^s \neq C_{n+m}^{r+s}$, 故 A 错误;

对于 $C_5^0 C_6^6 + C_5^1 C_6^5 + \cdots + C_5^5 C_6^1 = C_5^5 C_6^0 + C_5^4 C_6^1 + \cdots + C_5^0 C_6^5$, 这里 $n=5, m=6, r=5$, 根据范德蒙恒等式, 此时 $n+m=5+6=11, r=5$, 所以 $C_5^0 C_6^6 + C_5^1 C_6^5 + \cdots + C_5^5 C_6^1 = C_{11}^5 = C_{11}^6$, 故 B 正确;

对于 $C_{10}^0 C_{10}^1 + C_{10}^1 C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^9 C_{10}^{10}$, 这里 $n=10, m=10, r=9$, 根据范德蒙恒等式, 此时 $n+m=10+10=20, r=9$, 所以 $C_{10}^0 C_{10}^1 + C_{10}^1 C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^9 C_{10}^{10} = C_{20}^9 = C_{20}^{11}$, 故 C 正确;

对于 $(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$, 可以看作 $C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \cdots + C_n^n C_n^0$ (提示: $C_n^k = C_n^{n-k}$), 根据范德蒙恒等式, 得 $C_n^0 C_n^n +$



$C_n^1 C_n^{n-1} + \cdots + C_n^n C_n^0 = C_{n+n}^n = C_{2n}^n$, 而 $C_n^0 C_n^n = 1$, 所以 $(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n - C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n - 1$, 故 **D 正确**. 故选 BCD.

13. AC 【解析】对于 A, 因为 $n = 10\ 000 > 2\ 000$, $p = 0.000\ 5 < 0.05$, 所以此时泊松分布可作为二项分布的近似, $\lambda = 10\ 000 \times 0.000\ 5 = 5$, 故 **A 正确**;

对于 B, $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - \frac{5^0}{0!}e^{-5} - \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 1 - 6e^{-5}$, 故 **B 错误**;

对于 C, $P(Y=0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} = e^{-5}$, 故 **C 正确**;

对于 D, $P(Y=k+1) - P(Y=k) = \frac{5^{k+1}}{(k+1)!}e^{-5} - \frac{5^k}{k!}e^{-5} = \left[\frac{5^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{5^k}{k!} \right] e^{-5} = \left(\frac{5}{k+1} - 1 \right) \frac{e^{-5} 5^k}{k!}$, 当 $k=4$ 时, $P(Y=k+1) - P(Y=k) = 0$, 当 $k < 4$ 时, $P(Y=k+1) - P(Y=k) > 0$, 当 $k > 4$ 时, $P(Y=k+1) - P(Y=k) < 0$, 故当 $Y=4$ 或 $Y=5$ 时概率取最大值, 故 **D 错误**. 故选 AC.

14. 40 【解析】根据给定条件, 利用“峰型三位数”是否含有数字 0 分类.

①若“峰型三位数”由 3 个不同的数字组成,

当“峰型三位数”含有数字 0 时, 0 必为个位, 再从余下 5 个数字中任取 2 个, 大的数字作十位, 有 C_5^2 种方法;

当“峰型三位数”没有数字 0 时, 从除 0 外的 5 个数字中任取 3 个, 最大数字作十位, 有 $A_2^2 C_5^3$ 种方法.

故此时“峰型三位数”的个数为 $C_5^2 + A_2^2 C_5^3 = 30$.

②若“峰型三位数”由 2 个不同的数字组成, 大的数字作十位, 则一定不包含 0, 此时共有 $C_5^2 = 10$ (个) “峰型三位数”.

综上, “峰型三位数”的个数为 $30 + 10 = 40$.

15. (1) 【解】①该二维离散型随机变量 (ξ, η) 的所有可能取值为 $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0)$.

②依题意, $0 \leq m+n \leq 3$, $P(\xi=m, \eta=n) = P(\xi=m | \eta=n) \cdot P(\eta=n)$ (题眼: 根据 $p_{ij} = P(\xi=a_i, \eta=b_j) = P[(\xi=a_i) \cap (\eta=b_j)]$, 利用概率乘法公式).

显然 $P(\eta=n) = C_3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{3-n}$, 则 $P(\xi=m | \eta=n) = C_{3-n}^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{3-n-m} = C_{3-n}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{3-n}$,

所以 $P(\xi=m, \eta=n) = C_{3-n}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{3-n} \cdot C_3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{3-n} = \frac{1}{27} C_3^n C_{3-n}^m = \frac{2}{9 \cdot m! n! (3-m-n)!}$.

(2) 【证明】由定义及全概率公式知,

$P(\xi=a_i) = P\{(\xi=a_i) \cap [(\eta=b_1) \cup (\eta=b_2) \cup \cdots \cup (\eta=b_j) \cup \cdots]\}$



$$\begin{aligned}
&= P\{[(\xi=a_i) \cap (\eta=b_1)] \cup [(\xi=a_i) \cap (\eta=b_2)] \cup \cdots \cup [(\xi=a_i) \cap (\eta=b_j)] \cup \cdots\} \\
&= P[(\xi=a_i) \cap (\eta=b_1)] + P[(\xi=a_i) \cap (\eta=b_2)] + \cdots + P[(\xi=a_i) \cap (\eta=b_j)] + \cdots \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} P[(\xi=a_i) \cap (\eta=b_j)] = \sum_{j=1}^{+\infty} P(\xi=a_i, \eta=b_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}.
\end{aligned}$$

16. (1) 【证明】若 $n=1$, 则 $p_1=1$, 所以 $H(X) = -p_1 \log_2 p_1 = -\log_2 1 = 0$.

当 $n \geq 2$ 时, 因为 $0 < p_i < 1$, 所以 $-p_i \log_2 p_i > 0$, 所以 $H(X) = -\sum_{i=1}^n (p_i \log_2 p_i) > 0$.

综上所述, 当且仅当 $n=1$ 时, $H(X) = 0$.

(2) 【解】由 $p_2 - p_1 = p_1$, 得 $p_2 = 2p_1$, 由 $p_3 - p_2 = p_1$, 得 $p_3 = 3p_1$.

因为 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$,

所以 $6p_1 = 1$, 解得 $p_1 = \frac{1}{6}$, 于是 $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{2}$, 所以 $H(X) =$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \log_2 6 + \frac{1}{3} \log_2 3 + \\
& \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \log_2 3.
\end{aligned}$$

因为 $\log_2 3 > 1$, 所以 $H(X) > \frac{2}{3} + \frac{1}{2} > 1$.

(3) 【解】由题意知, $X=i$ ($i=1, 2, \dots, 19, 20$) 表示前 $(i-1)$ 次都正面朝上, 第 i 次反面朝上, $X=20$ 表示前 19 次都正面朝上, 则

$$p_1 = P(X=1) = \frac{1}{2}, p_2 = P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2},$$

$$p_3 = P(X=3) = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}, \dots,$$

$$p_{19} = P(X=19) = \frac{1}{2^{18}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{19}}, p_{20} = P(X=20) = \frac{1}{2^{19}}.$$

$$\text{所以 } -p_i \log_2 p_i = \frac{1}{2^i} \log_2 2^i = \frac{i}{2^i} \quad (1 \leq i \leq 19), \quad -p_{20} \log_2 p_{20} = \frac{19}{2^{19}}.$$

$$\text{所以 } H(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{18}{2^{18}} + \frac{19}{2^{19}} + \frac{19}{2^{19}}.$$

$$\text{设 } S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{18}{2^{18}} + \frac{19}{2^{19}},$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{18}{2^{19}} + \frac{19}{2^{20}},$$

$$\text{两式相减, 得 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{19}} - \frac{19}{2^{20}} = 1 - \frac{1}{2^{19}} - \frac{19}{2^{20}} =$$

$$1 - \frac{21}{2^{20}},$$

$$\text{所以 } S = 2 - \frac{21}{2^{19}}, \text{ 故 } H(X) = S + \frac{19}{2^{19}} = 2 - \frac{21}{2^{19}} + \frac{19}{2^{19}} = 2 - \frac{1}{2^{18}}.$$

17. 【解】(1) 由题意, 可知 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $X \sim$

$$B\left(3, \frac{3}{5}\right), \text{ 则 } P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^3 = \frac{8}{125},$$



$$P(X=1) = C_3^1 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125},$$

$$P(X=3) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}.$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

所以 X 的均值 $E(X) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$, 且方差 $D(X) = 3 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{18}{25}$.

(2) ① 因为每位游客选择东门入园的概率是 $\frac{3}{5}$, 则选择其他门入园的概率是 $\frac{2}{5}$.

第一步: 分析人气值为 1 点所对应的情况, 求出 P_1 .

若人气值为 1 点, 则仅有 1 人入园且选择其他门入园, 所以

$$P_1 = \frac{2}{5}.$$

第二步: 分析人气值为 2 点所对应的情况, 结合独立事件概率的乘法公式运算求 P_2 .

若人气值为 2 点, 则仅有 1 人入园且选择东门入园或仅有

$$2 \text{ 人入园且均选择其他门入园, 所以 } P_2 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{25}.$$

② 第一步: 分析得出 P_{n+2}, P_n, P_{n+1} 的递推关系式.

若人气值为 $n+2$ 点, 可知在人气值为 n 点的前提下仅有 1 人入园且选择东门入园或在人气值为 $n+1$ 点的前提下仅

$$\text{有 1 人入园且选择其他门入园, 则 } P_{n+2} = \frac{3}{5}P_n + \frac{2}{5}P_{n+1},$$

第二步: 构造出等比数列, 求通项公式.

$$\text{可得 } P_{n+2} - P_{n+1} = -\frac{3}{5}(P_{n+1} - P_n), \text{ 且 } P_2 - P_1 = \frac{9}{25} \neq 0, \text{ 可知数}$$

列 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 是以 $\frac{9}{25}$ 为首项, $-\frac{3}{5}$ 为公比的等比数列, 则

$$P_{n+1} - P_n = \frac{9}{25} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}, n \in \mathbf{N}^*.$$

第三步: 累加法求通项公式.

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } P_n = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \cdots + (P_n - P_{n-1})$$

$$= \frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]}{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{5}\right)^n,$$



当 $n=1$ 时, $P_1 = \frac{2}{5}$ 也符合上式, 所以 $P_n = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{5}\right)^n$
 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

18. 【解】(1) 由题意, 记环节一(任务执行)获得的总分为 X , 要使 $X \geq 40$, 至少要保证 B, C 执行成功, 否则不可能进入环节二.

若以 $A \rightarrow B \rightarrow C, A \rightarrow C \rightarrow B, C \rightarrow A \rightarrow B, B \rightarrow A \rightarrow C$ 的顺序执行任务,

当 A 成功时, $P(X \geq 40) = 0.9 \times 0.5 \times 0.8 = 0.36$,

当 A 不成功时, $P(X \geq 40) = 0.1 \times 0.5 \times 0.8 = 0.04$.

若以 $B \rightarrow C$ 或 $C \rightarrow B$ 的顺序执行任务, 则 $P(X \geq 40) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$, 故模型进入环节二的概率最大值为 0.4 , 则最优执行顺序为 $B \rightarrow C$ 或 $C \rightarrow B$.

(2) ①由题意, 模型进入性能测试的概率为 0.4 , 未进入性能测试的概率为 0.6 .

在进入环节二的条件下, 模型成功商用的概率为 $P(t)$, 模型不可商用的概率为 $1-P(t)$, 则两个环节结束后模型总收益为 -5 的概率是 0.6 , 模型总收益为 $2t-20$ 的概率是 $0.4P(t)$, 模型总收益为 $-0.5t$ 的概率是 $0.4[1-P(t)]$, 则 $E(t) = 0.4 \times (2t-20)P(t) + 0.4(-0.5t)[1-P(t)] - 5 \times 0.6 = (t-8)P(t) - 0.2t - 3$ (万元).

②由①可知, $E(t) = (t-8)P(t) - 0.2t - 3$, 其中 $t \in [84, 95]$ (提示: 注意自变量的取值范围), $P(t) = P(Y \geq t)$ 满足正态分布, 则 $E'(t) = P(t) + P'(t)(t-8) - 0.2$.

$\because P(t)$ 在 $[84, 95]$ 上单调递减, 则 $P'(t) < 0$ 在 $t \in [84, 95]$ 上恒成立, $\therefore P'(t)(t-8) < 0$ 在 $t \in [84, 95]$ 上恒成立,

又 $P(84) = P(Y \geq 84) = P(Y \geq \mu + \sigma) \approx 0.159$, $\therefore P(84) - 0.2 \approx 0.159 - 0.2 = -0.041 < 0$, $\therefore P(t) - 0.2 < 0$ 在 $t \in [84, 95]$ 上恒成立, $\therefore E'(t) = P(t) + P'(t)(t-8) - 0.2 < 0$ 在 $t \in [84, 95]$ 上恒成立, 则 $E(t)$ 在 $[84, 95]$ 上单调递减, 故当 $t = 84$ 时, $E(t)$ 取得最大值.