



附录

答案及解析

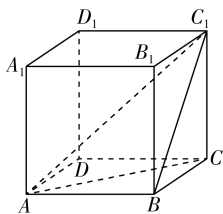
第1节 空间几何体的结构特征、
表面积与体积

题型上分练

1. C 【解析】A 选项中的图形旋转得到的是两个同心球面，即外层一个大球面，里层一个小球面；
B 选项中的图形旋转得到的是两个环面，即外层一个大环面，其中含有一个小环面；
C 选项中的图形旋转得到的是汽车内胎；
D 选项中的图形旋转得到的是球面。

2. BC 【解析】对于 A，正四面体是正三棱锥，但当正三棱锥侧棱长与底面边长不相等时，该正三棱锥不是正四面体（提示：正四面体的各个棱长均相等），故 A 错误。

对于 B，如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，对于四面体 $C_1 - ABC$ ，它的四个面都是直角三角形，故 B 正确。



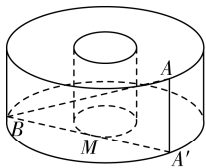
对于 C，设等底等高的柱体和锥体的底面积和高分别为 S, h ，则 $V_{\text{柱体}} = Sh$ ，

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh, \text{ 所以等底等高的情况下,}$$

柱体的体积是锥体的 3 倍，故 C 正确。

对于 D，在过圆锥顶点的截面中，设两条母线的夹角为 θ ，母线长为 l ，则截面面积为 $\frac{1}{2}l^2 \sin \theta$ ，当轴截面等腰三角形的顶角大于 90° 时，截面中两条母线夹角为 90° 的截面面积最大，故 D 错误。故选 BC。

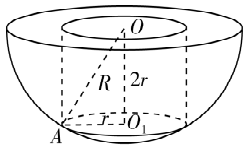
3. C 【解析】如图，记 A' 为 A 在底面的投影， $A'B$ 是底面大圆的一条弦且 $A'B$ 与小圆相切（切点为 M ），则 $A'B = 2BM = 2\sqrt{25^2 - 5^2} = 20\sqrt{6}$ (cm)， $AB = \sqrt{(20\sqrt{6})^2 + 30^2} = 10\sqrt{33}$ (cm)，故汤勺长度最短为 $10\sqrt{33}$ cm，故选 C。



4. ACD 【解析】对于 A，过圆柱旋转轴的面截圆柱所得截面为矩形，故 A 正确；
对于 B，截圆锥所得截面可以是三角形或曲边图形，不可能是矩形，故 B 错误；
对于 C，在直三棱柱中，用平行于某一侧面的平面截三棱柱所得的截面可以为矩形，故 C 正确；
对于 D，在正四棱锥中，用平行于底面的平面截四棱锥可以得到矩形截面，故 D 正确。故选 ACD。
5. D 【解析】如图，取圆柱下底面上一点 A ，连接 OA, O_1A ，记半球半径 $OA = R$ ，圆柱底面半径 $O_1A = r$ 。



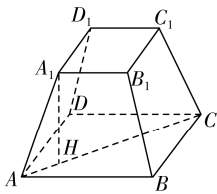
由题意,圆柱的轴截面为正方形,所以圆柱的高 $OO_1 = 2r$, 则有 $R = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = \sqrt{5}r = \sqrt{5}$, 故 $r = 1$, 所以剩余几何体的表面积 $S = 2\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi r \cdot 2r = 19\pi$.



- 6. C** 【解析】由题可知圆台的母线长为 $\sqrt{(20-10)^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20$ (cm), 则圆台的侧面积 $S_1 = \frac{1}{2} (20\pi + 40\pi) \times 20 = 600\pi$ (cm²), 又鼓面的面积 $S_2 = \pi \times 20^2 = 400\pi$ (cm²), 故该羊皮鼓模型的表面积 $S = 2(S_1 + S_2) = 2\,000\pi$ (cm²) (易错: 表面积不要算两个圆台重合的部分). 故选 C.

- 7. D** 【解析】连接 AC, 过点 A_1 作 $A_1H \perp AC$, 垂足为 H, 则 $AH = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

易知 $A_1H \perp$ 底面 ABCD, 则 $\angle A_1AC$ 为侧棱与底面所成的角, 因为侧棱与底面所

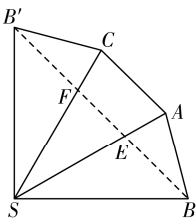


成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\frac{AH}{A_1A} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $A_1A = \sqrt{10}$, 则梯形

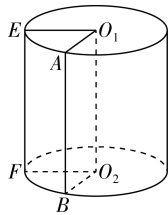
A_1ABB_1 的高 $h = \sqrt{A_1A^2 - \left(\frac{AB - A_1B_1}{2}\right)^2} = 3$, 故该正四棱台的

表面积是 $2^2 + 4^2 + \frac{(2+4) \times 3}{2} \times 4 = 56$. 故选 D.

- 8. A** 【解析】将正三棱锥 $S-ABC$ 的侧面沿侧棱 SB 剪开并展开在同一平面内, 如图, 连接 BB' , 当 E, F 分别为 BB' 与 SA, SC 的交点时, $\triangle BEF$ 的周长最小, 此时 $BB' = \sqrt{2}$, 而 $SB = SB' = 1$, $SB^2 + SB'^2 = 2 = BB'^2$, 则 $\angle BSB' = 90^\circ$, $\angle ASB = 30^\circ$, 所以正三棱锥 $S-ABC$ 的侧面积为 $3 \times \frac{1}{2} SA \times SB \sin 30^\circ = \frac{3}{4}$. 故选 A.



- 9. B** 【解析】由题意可知区域 $ABFE$ 和 $DCFE$ 全等, 且都是底面半径为 6 m, 高为 20 m 的圆柱的侧面的一部分, 将区域 $ABFE$ 还原到如图所示的圆柱中.



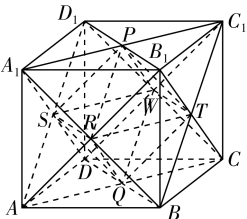
由图可知 $AO_1 = 6$ m, $\angle AO_1E = \frac{\pi}{3}$, $AB =$

20 m, 由扇形的弧长公式可知 $\widehat{AE}$ 的长为 $\angle AO_1E \times AO_1 = \frac{\pi}{3} \times$

$6 = 2\pi$ (m), $S_{ABFE} = 2\pi \times 20 = 40\pi$ (m²), 所以 $S_{ABFE} + S_{DCFE} =$

$2S_{ABFE} = 80\pi$ (m²), 所以被瓦片覆盖的区域 $ABFE$ 和 $DCFE$ 的总面积为 80π m². 故选 B.

- 10. D** 【解析】连接这两个三棱锥的交线, 如图所示, P, Q, S, R, T, W 分别是 $B_1D_1, BD, AD_1, AB_1, BC_1, DC_1$ 的中点, 所以 $PS = PW = PR = PT =$





$$QS=QR=QW=QT=SR=RT=SW=WT=\sqrt{2},$$

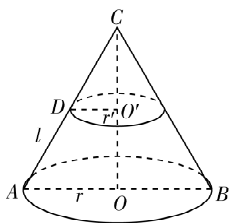
即两个三棱锥 $D-A_1BC_1, B_1-AD_1C$ 的公共部分为一个棱长

关键

为 $\sqrt{2}$ 的正八面体, 所以其表面积为 $8 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. 故选 D.

11. 6π 【解析】根据题意作出示意图如

图所示, 由题知 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形, $CO = 2\sqrt{3}$, 又 $CO' = \sqrt{3}$, 圆台下底面半径 $r = 2$, 可得圆台的上底面半径 $r' = 1$.



方法一(直接法): 圆台母线长 $l =$

$AD = 2$, 则该圆台的侧面积为 $\pi(r+r')l = \pi \times (2+1) \times 2 = 6\pi$.

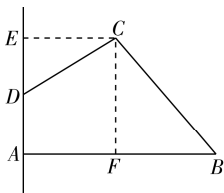
方法二(间接法): 设圆锥 CO 的侧面积为 S_1 , 圆锥 CO' 的侧面积为 S_2 , 圆 O 的周长为 l_1 , 圆 O' 的周长为 l_2 , 则 $S_{\text{圆台侧}} =$

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot AC - \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot CD = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 4 - \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 =$$

6π .

12. $(12+3\sqrt{21}+2\sqrt{3})\pi$ 【解析】过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E , $CF \perp AB$ 于点 F .

因为 $\angle ADC = 120^\circ$, 所以 $\angle EDC = 60^\circ$, 又因为 $CD = 2$, 所以 $DE = 1$, $CE = \sqrt{3}$, 故 $AF = CE = \sqrt{3}$.



又 $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 1$, 故 $CF = AE = AD + DE = 2$, $BF = AB - AF = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} =$

$\sqrt{3}$, 由勾股定理得 $CB = \sqrt{CF^2 + BF^2} = \sqrt{7}$.

四边形 $ABCD$ 绕直线 AD 旋转一周所成几何体的表面积分

为三部分: ①以 AB 为半径的圆的面积 $S_1 = (2\sqrt{3})^2 \pi = 12\pi$;

②以 CD 为母线、 CE 为底面半径的圆锥的侧面积 $S_2 = \pi \times$

$\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}\pi$; ③以 BC 为母线的圆台的侧面积 $S_3 = (\sqrt{3} +$

$2\sqrt{3}) \times \sqrt{7}\pi = 3\sqrt{21}\pi$. 所以该几何体的表面积为 $S_1 + S_2 +$

$S_3 = (12 + 3\sqrt{21} + 2\sqrt{3})\pi$.

13. D 【解析】设圆柱的底面半径为 r , 高为 $2h$, 则圆柱的体积为 $\pi r^2 \cdot 2h = 2\pi r^2 h$.

由题意, 圆台的下底面半径为 $3r$, 上底面半径为 $4r$, 高为 $3h$,

所以圆台的体积为 $\frac{1}{3} [\pi(3r)^2 + \sqrt{\pi(3r)^2 \cdot \pi(4r)^2} + \pi(4r)^2] \cdot 3h = 37\pi r^2 h$.

所以圆台和圆柱的体积之比为 $37:2$. 故选 D.

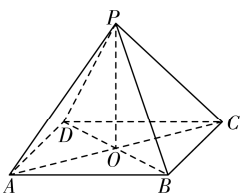
14. A 【解析】作出正四棱锥如图所

示, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 连接

AC, BD 交于点 O , 连接 PO , 则

$PO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\angle PAO = 60^\circ$

(提示: $\angle PAO$ 即为侧棱与底面的



夹角). $AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$, $PO = AO \cdot \tan \angle PAO = \sqrt{6}$, 所以该正



四棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$. 故选 A.

15. C 【解析】设球的半径及圆锥的底面半径均为 R , 圆锥的母线长为 l , 则 $4\pi R^2 = \pi R^2 + \pi lR$, 所以 $l = 3R$, 圆锥的高 $h = \sqrt{l^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R$. 球的体积为 $\frac{4\pi R^3}{3}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \cdot$

$\pi R^2 \cdot 2\sqrt{2}R = \frac{2\sqrt{2}\pi R^3}{3}$, 所以圆锥的体积与球的体积之比为

$$\frac{\frac{2\sqrt{2}\pi R^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 故选 C.}$$

16. C 【解析】由题意有正四棱台的上底面面积 $S_1 = 2.5 \times 2.5 = 6.25(\text{dm}^2)$, 下底面面积 $S_2 = 5 \times 5 = 25(\text{dm}^2)$, 高 $h = 3.6 \text{ dm}$, 所以正四棱台的体积 $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)h = \frac{1}{3} \times (6.25 + \sqrt{6.25 \times 25} + 25) \times 3.6 = 52.5(\text{dm}^3)$, 所以一石米的体积大约为 $2 \times 52.5 = 105(\text{dm}^3)$, 故选 C.

17. D 【解析】设 AB_1 与 A_1B 的交点为 E , A_1C 与 B_1D 的交点为 E_1 , 连接 EE_1 , 如图①, 四棱锥 A_1-ABCD 与四棱锥 B_1-ABCD 重叠部分为五面体 EE_1ABCD .

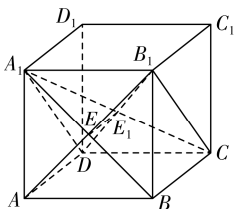
正方体的体积为 $16\sqrt{2}$, 即 $AB^3 = 16\sqrt{2}$, 解得 $AB = 2\sqrt{2}$. 易知 E 为 A_1B 的中点, E_1 为正方体的中心, 则 $EE_1 \parallel \frac{1}{2}BC$, $AE =$

$$\frac{1}{2}AB_1 = 2, \text{ 得 } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot BE = 2.$$

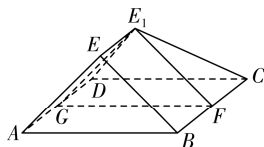
如图②, 取 BC 的中点 F , AD 的中点 G , 连接 FG , E_1F , E_1G , 则该五面体由一个三棱柱 $ABE-GFE_1$ 和一个四棱锥 E_1-

$CDGF$ 组成, 故该五面体的体积 $V = BF \cdot S_{\triangle ABE} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AA_1 \cdot$

$$S_{\text{四边形 } CDGF} = 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3}. \text{ 故选 D.}$$



图①



图②

18. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 【解析】(等体积法) 过点 A_1 作 $A_1E \perp B_1C_1$ 于点 E (图

略), 因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $A_1E \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, 所以 $BB_1 \perp A_1E$, 又 $BB_1 \cap B_1C_1 = B_1$, $BB_1, B_1C_1 \subset$ 平面 B_1BCC_1 , 所

以 $A_1E \perp$ 平面 B_1BCC_1 . $V_{D-A_1BC} = V_{A_1-BCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot A_1E =$

$$\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



一题多解 (换顶点法) 由题知, $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1C_1 \not\subset$ 平面 A_1BC , $BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BC , 又 D 为棱 B_1C_1 上任意一点, 所以 $V_{D-A_1BC} = V_{B_1-A_1BC}$, 又三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱, 且各棱长均为 2, 则点 A_1 到平面 B_1BC 的距离 $h = \sqrt{3}$, 则 $V_{B_1-A_1BC} = V_{A_1-B_1BC} = \frac{1}{3} S_{\triangle B_1BC} h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

19. $27 - \frac{7\pi}{4}$ 【解析】玉琮的体积可以分为两部分计算: 上、下圆柱部分和中间正方体部分. 两部分都需减去空心部分的体积.

先把圆筒看为实心圆柱, 因为圆筒的外径为 3 cm, 所以圆柱的底面半径 $R = \frac{3}{2}$ cm.

上、下两段圆柱总高为 $4 - 3 = 1$ (cm), 两段圆柱加上中间正方体的总体积 $V_{\text{总}} = \pi R^2 \cdot 1 + 3^3 = \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 27 = 27 + \frac{9\pi}{4}$ (cm³).

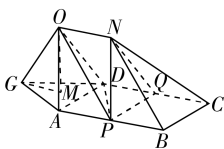
空心部分是贯通整个玉琮的内圆柱, 高为 4 cm, 因为圆筒的内径为 2 cm, 所以内圆柱的底面半径 $r = 1$ cm, 所以内圆柱的体积 $V_{\text{空心}} = \pi r^2 \cdot 4 = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 4\pi$ (cm³), 所以玉琮的体积 $V = V_{\text{总}} - V_{\text{空心}} = 27 + \frac{9\pi}{4} - 4\pi = 27 - \frac{7\pi}{4}$ (cm³).

20. $\frac{2}{3}$ 【解析】设三棱锥 $O-ABC$, 三棱锥 $O-DEF$ 的体积分别为 V_1, V_2 , 表面积分别为 S_1, S_2 , 高分别为 h_1, h_2 .

因为 $\frac{AB}{DE} = \frac{3}{2}$, 所以 $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$, $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ODE}} = \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OEF}} = \frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ODF}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, 则 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2} \times \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, 则三棱锥 $O-ABC$ 与三棱锥 $O-DEF$ 的“相对积”之比为

$$\frac{S_1 V_2}{S_2 V_1} = \frac{9}{4} \times \frac{8}{27} = \frac{2}{3}.$$

21. $60\sqrt{6}$ 【解析】过 O 作 $OM \perp$ 平面 ADG , 则 M 为 $\triangle ADG$ 的中心, 设 P, Q 分别为 AB, CD 的中点, 连接 PQ, NP, NQ, OP, DP, GM .



$AB \parallel CD$, $AB \subset$ 平面 $ABNO$, $CD \not\subset$ 平面 $ABNO$, 则 $CD \parallel$ 平面 $ABNO$, 又 $CD \subset$ 平面 $DCNO$, 平面 $DCNO \cap$ 平面 $ABNO = ON$, 故 $ON \parallel CD$.

$DQ = \frac{1}{2} AB = 6 = ON$, 故四边形 $DQNO$ 为平行四边形, $OD \parallel NQ$, 由 $OD \subset$ 平面 OAD , $NQ \not\subset$ 平面 OAD , 得 $NQ \parallel$ 平面 OAD , 同理有 $NP \parallel$ 平面 OAD , 又 $NQ, NP \subset$ 平面 NPQ , $NQ \cap NP = N$, 所以平面 $NPQ \parallel$ 平面 OAD , 故多面体 $OAD-NPQ$ 为三棱柱.

$\therefore$ 几何体 $OADG$ 为正四面体, $OA = 6$, $\therefore GM = \frac{2}{3} \sqrt{6^2 - 3^2} =$



$$2\sqrt{3}, OM = \sqrt{6 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}.$$

$$V_{N-BCQP} = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 2\sqrt{6} = 24\sqrt{6}, V_{OAD-NPQ} = 3V_{O-ADP} = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times$$

$6 \times 6 \times 2\sqrt{6} = 36\sqrt{6}$ (提示:任意1个三棱柱(无论直/斜)都可分割成3个等体积的三棱锥,对三棱柱 $OAD-NPQ$ 进行分割, $O-ADP$ 为分割成的3个三棱锥中的1个), $\therefore V_{\text{五面体}ABCDON} =$

$$V_{OAD-NPQ} + V_{N-BCQP} = 36\sqrt{6} + 24\sqrt{6} = 60\sqrt{6}.$$



综合提分练

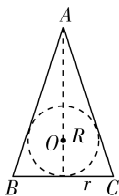
1. D 必刷题型 ⊙圆锥的内切球问题、球的体积

【解析】由题意得扇形的弧长 $l = 3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi$, 所以

该圆锥的底面圆的半径 $r = \frac{l}{2\pi} = 1$, 所以该圆锥的

$$\text{高 } h = \sqrt{3^2 - r^2} = 2\sqrt{2}.$$

设该圆锥内的球的最大半径为 R , 圆锥的轴截面如图所示,



则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times (3+3+2)R$, 解得 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以该球

的体积 V 的最大值是 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. 故选 D.

2. C 必刷考点 ⊙圆台的体积、线面平行的性质

【解析】取圆台下底面圆心 O' , 连接

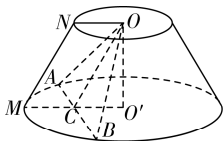
MO' , 设 MO' 与 AB 的交点为 C , 连接

ON, OO', OC , 显然 $ON \parallel O'M$, 由平面

$OO'MN \cap \text{平面 } OAB = OC$, $MN \parallel \text{平面}$

$OAB, MN \subset \text{平面 } OO'MN$, 得 $MN \parallel OC$, 则四边形 $OCMN$ 为平

行四边形, $OC = MN = 2r, CM = ON = r = \frac{1}{2}R = O'C$.



易知在 $\triangle OO'C$ 中, $OO' \perp O'C, \angle COO' = 30^\circ$. 在圆 O' 中, 当且仅当 $AB \perp O'M$ 时, AB 取最小值 6.

由 $3 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2}$, 解得 $R = 2\sqrt{3}$, 因此 $r = \sqrt{3}$, 圆台的高 $h =$

$OO' = 2r \cdot \cos 30^\circ = 3$, 所以该圆台的体积 $V = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR +$

$R^2)h = \frac{1}{3}\pi(3+6+12) \times 3 = 21\pi$. 故选 C.

3. D 必刷考点 ⊙多面体的表面积

【解析】连接 A_1C, AC_1, BD_1 , 易知三条

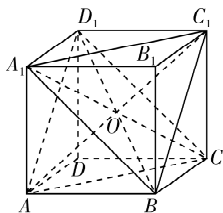
体对角线交于一点, 记为点 O ,

则分割后顶点 B_1 所在的多面体为六

面体 $OA_1BC_1B_1$, 其表面分别是

$\triangle OA_1B, \triangle OA_1C_1, \triangle OBC_1, \triangle A_1B_1C_1,$

$\triangle A_1B_1B, \triangle BB_1C_1$.



根据正方体的性质知 $OA_1 = OB = OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, BB_1 = C_1B_1 =$

$A_1B_1 = 1, A_1B = BC_1 = A_1C_1 = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle OA_1B \cong \triangle OA_1C_1 \cong$
 $\triangle OBC_1, \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B_1B \cong \triangle BB_1C_1$.



在 $\triangle OA_1B$ 中, 边 A_1B 上的高为 $\sqrt{OA_1^2 - \left(\frac{A_1B}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\triangle OA_1B$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\triangle A_1B_1B$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, 所以顶点 B_1 所在的多面体的表面积为 $3 \times \frac{\sqrt{2}}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{2}$. 故选 D.

4. BD 必刷考点 ⊙ 正八面体的结构特征

【解析】由题图可知该多面体有 24 个顶点, 36 条棱, 故 A 错误, B 正确.

该多面体的棱长为 1, 且表面由 6 个正方形和 8 个正六边形组成, 故该多面体的表面积为 $6 \times 1 + 8 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ = 6 + 12\sqrt{3}$, 故 C 错误.

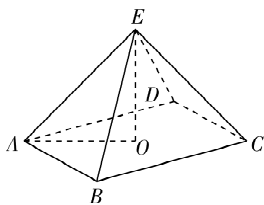
正八面体 $EABCD F$ 可分为两个全等的正四棱锥, 其棱长为 3, 关键点

过点 E 作 $EO \perp$ 平面 $ABCD$ 于点 O , 连接 AO , 如图.

因为 $EO \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $OA \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $OE \perp OA$.

在正方形 $ABCD$ 中, 由边长为 3, 可知对角线长为 $3\sqrt{2}$, 则 $OA =$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, $EO = \sqrt{AE^2 - OA^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 $EF = 2OE = 3\sqrt{2}$.

正八面体 $EABCD F$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times 3^2 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$, 切割掉 6 个

棱长均为 1 的正四棱锥, 切割掉的几何体的体积为 $6 \times \frac{1}{3} \times$

$1^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, 所以该阿基米德多面体的体积为 $9\sqrt{2} - \sqrt{2} =$

$8\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 BD.

5. 6π $\frac{16\sqrt{3}-27}{27}$ 必刷考点 ⊙ 圆台的侧面积、祖暅原理

【解析】设圆台的上底面半径为 r_1 , 下底面半径为 r_2 , 球的半径为 R .

由题可知 $r_1 = 1, r_2 = 2, R = 2$, 则圆台的高为 $\sqrt{R^2 - r_1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$, 所以圆台的母线长 $l = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$, 所以圆台的侧面积为 $\pi(r_1 + r_2)l = \pi(1 + 2) \times 2 = 6\pi$.

如图, 作一个底面半径与半球半径相同、高为半球半径的圆柱, 设 $PO = MO_2 = MN = h$, 则 $PQ^2 = R^2 - h^2 = 4 - h^2$.

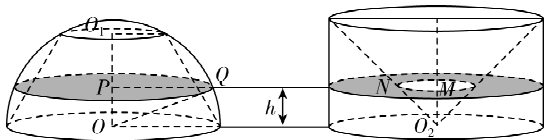
在半球中, 阴影部分面积为 $\pi(4 - h^2)$, 在圆柱中, 阴影部分面积为 $\pi \times 2^2 - \pi h^2 = \pi(4 - h^2)$, 所以根据祖暅原理, 可知半球中阴影部分与底面之间的几何体体积等于圆柱中阴影部分与

底面之间的几何体体积, 所以 $V_2 = \pi \times 2^2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^2 \times$



$\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi$, 又半球的体积 $V_{\text{半球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2} = \frac{16\pi}{3}$, 所以 $V_1 =$

$$V_{\text{半球}} - V_2 = \frac{16\pi}{3} - 3\sqrt{3}\pi, \text{ 所以 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{16\pi}{3} - 3\sqrt{3}\pi}{3\sqrt{3}\pi} = \frac{16\sqrt{3} - 27}{27}.$$



链接教材 人教 A 版教材必修第二册 P121 探究与发现

祖暅原理: 夹在两个平行平面之间的两个几何体, 被平行于这两个平面的任意平面所截, 如果截得的两个截面的面积总相等, 那么这两个几何体的体积相等.

6. $\frac{525}{4}$ 必刷题型 ① 立体几何与解三角形及导数的综合问题

【解析】由条件可知, A, B, C, D 四点共圆, 点 P 在平面 $ABCD$

关键点

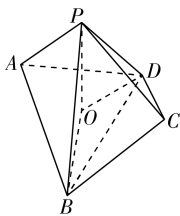
上的射影 O 即为该圆的圆心, 并且 $\triangle PBC, \triangle PAD$ 为全等的等腰三角形.

设 $\angle BAD = \theta, BC = x, CD = y, AB = z,$

$$\text{则 } \tan \theta = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{21}}, \sin \theta = \sqrt{\frac{16}{21}}.$$

则 $\angle BCD = 180^\circ - \theta$, 所以在 $\triangle BCD$ 中, 由余

$$\text{弦定理得 } x^2 + y^2 + \sqrt{\frac{20}{21}}xy = 105 \text{ ①, 在}$$



$$\triangle ABD \text{ 中, 由余弦定理得 } x^2 + z^2 - \sqrt{\frac{20}{21}}xz = 105 \text{ ②, ①②两式相}$$

$$\text{减得 } (y+z)(y-z) + \sqrt{\frac{20}{21}}x(y+z) = 0, \text{ 所以 } z-y = \sqrt{\frac{20}{21}}x, \text{ ①②}$$

$$\text{两式相加, 得 } 2x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{\frac{20}{21}}x(y-z) = 210, \text{ 结合 } z-y =$$

$$\sqrt{\frac{20}{21}}x \text{ 可得 } y^2 + z^2 = 210 - \frac{22}{21}x^2.$$

$$\text{所以 } y+z = \sqrt{y^2 + z^2 + 2yz} = \sqrt{2y^2 + 2z^2 - (z-y)^2} = \sqrt{420 - \frac{64}{21}x^2}.$$

$$\text{设圆 } ABCD \text{ 的半径为 } R, \text{ 则由正弦定理知 } 2R = \frac{BD}{\sin \angle BAD} =$$

$$\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{\frac{16}{21}}} = \frac{21}{4}\sqrt{5}, \text{ 所以 } R = \frac{21\sqrt{5}}{8}.$$

$$\text{由条件可知, } PB = \frac{x}{2\cos \theta} = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{21}{5}}, \text{ 所以由勾股定理知 } PO =$$

$$\sqrt{\frac{21}{20}x^2 - \frac{2 \cdot 205}{64}}, \text{ 可知 } x \in \left(\frac{5}{4}\sqrt{21}, \frac{21}{4}\sqrt{5} \right).$$

$$\text{于是四棱锥 } P-ABCD \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3}PO \cdot S_{\text{四边形}ABCD} =$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{21}{20}x^2 - \frac{2 \cdot 205}{64}} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}}x(y+z) = \frac{2}{3}$$



$$\sqrt{\left(\frac{1}{20}x^2 - \frac{105}{64}\right)\left(420 - \frac{64}{21}x^2\right)}x^2.$$

设函数 $f(t) = t\left(\frac{1}{20}t - \frac{105}{64}\right)\left(420 - \frac{64}{21}t\right)$, 其中 $t \in$

$\left(\frac{525}{16}, \frac{2205}{16}\right)$, 求导得 $f'(t) = -\frac{1}{560}(16t - 1575)(16t - 245)$,

令 $f'(t) > 0$, 解得 $\frac{525}{16} < t < \frac{1575}{16}$, 令 $f'(t) < 0$, 解得 $\frac{1575}{16} < t <$

$\frac{2205}{16}$, 所以 $f(t)$ 在 $\left(\frac{525}{16}, \frac{1575}{16}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{1575}{16}, \frac{2205}{16}\right)$ 上单调递减, 在 $t = \frac{1575}{16}$ 处取最大值, 所以

$f(t) \leq f\left(\frac{1575}{16}\right)$, 故四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值 $V_{\max} =$

$$\frac{2}{3}\sqrt{f\left(\frac{1575}{16}\right)} = \frac{525}{4}.$$

真题风向练

7.D 命题点 ① 棱台的体积

【解析】有一个内角为 60° 的菱形可以看成是由两个全等的

正三角形构成的, 所以该棱台的上底面面积为 $2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 =$

$2\sqrt{3}$, 下底面面积为 $2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, 所以该棱台的体积为

$\frac{1}{3} \times \left(2\sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}}\right) \times \sqrt{3} = \frac{19}{2}$, 故选 D.

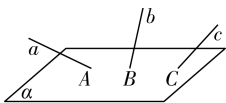


第2节 空间点、线、面的位置关系



题型上分练

1. B 【解析】本题可从充分性和必要性两个方面分别分析.



如图所示,空间中三条直线 a, b, c 与平面 α 分别交于不同的三点 A, B, C ,且 A, B, C 三点共线,但直线 a, b, c 不共面,故充分性不成立;

若直线 a, b, c 共面,设它们所在平面为 β ,则 A, B, C 三点均在平面 β 内,也在平面 α 内,故 A, B, C 三点在平面 β 与平面 α 的交线上,所以 A, B, C 三点共线,故必要性成立.

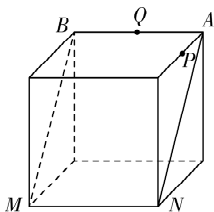
所以“ A, B, C 三点共线”是“直线 a, b, c 共面”的必要不充分条件,故选 B.

2. D 【解析】对于 A,显然 P, Q, N 都在正方体的上底面,且三点不共线, M 不在正方体的上底面,所以 P, Q, N, M 四点不共面,故 A 错误;

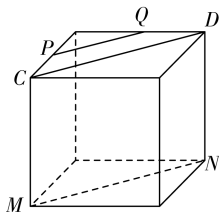
对于 B,如图①, Q, M, N 三点在平面 $ABMN$ 上,且三点不共线,因为 $P \notin$ 平面 $ABMN$,所以 P, Q, N, M 四点不共面,故 B 错误;

对于 C,显然 P, M, N 在正方体的下底面,且三点不共线, Q 不在正方体的下底面,所以 P, Q, N, M 四点不共面,故 C 错误;

对于 D,如图②,因为 P, Q 为所在棱的中点,所以 $PQ \parallel CD$,又 $CD \parallel MN$,所以 $PQ \parallel MN$,所以 P, Q, N, M 四点共面,故 D 正确. 故选 D.



图①



图②

3. BCD 【解析】因为 F, G 分别是 BC, CD 的中点,所以 $FG \parallel BD$, $FG = \frac{1}{2}BD$, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, E, H 分别是 AB, AD 的中点,

$EH \parallel BD$, $EH = \frac{1}{2}BD$, 所以 $EH \parallel FG$, $EH = FG$, 四边形 $EFGH$ 是

一个平行四边形, 又 $AC = BD$, 所以 $EF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = EH$,

所以四边形 $EFGH$ 是一个菱形, 则 $EG \perp HF$, 不能得出四边形

关键点

$EFGH$ 是一个正方形, 所以 A 错误, B 正确;

对于 C, 因为 $\vec{EH} = \lambda \vec{BD}$, 所以 $EH \parallel BD$, 又 $FG \parallel BD$, 则 $EH \parallel FG$, 所以 E, F, G, H 四点共面 (提示: 基本事实推论 3), C 正确;

对于 D, 当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时, $EH \parallel BD$, 但 $EH \neq \frac{1}{2}BD$, 而 $FG \parallel BD$, $FG =$

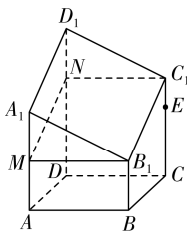
$\frac{1}{2}BD$, 所以 $EH \parallel FG$ 但不相等, 所以四边形 $EFGH$ 是一个梯

形, 假设 EF, HG 相交于点 P , 因为 $P \in EF \subset$ 平面 ABC , $P \in HG \subset$ 平面 ADC , 又平面 $ABC \cap$ 平面 $ADC = AC$, 所以 $P \in AC$, 从

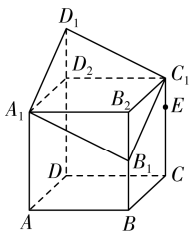


而可得直线 EF, HG, AC 相交于一点, **D 正确**, 故选 BCD.

4. **AC** 【解析】对于 A, 如图①, 取 AA_1 的中点 M , 取 DD_1 上靠近 D_1 的三等分点 N , 连接 MB_1, MN, NC_1 , 易知四边形 NMB_1C_1 为平行四边形, 四边形 NMA_1D_1 为平行四边形, 所以 $MN \parallel A_1D_1, MN \parallel B_1C_1$, 则 $B_1C_1 \parallel A_1D_1$, 所以 A_1, B_1, C_1, D_1 四点共面, 故 **A 正确**;



图①



图②

对于 B, 由对称性知, 该几何体的体积是长、宽均为 2, 高为 4

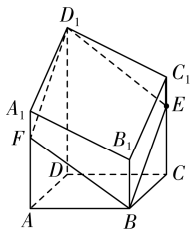
关键点

的长方体的体积的一半, 所以该几何体的体积为 $2 \times 2 \times 4 \times$

$\frac{1}{2} = 8$, 故 **B 错误**;

对于 C, 如图②, 过 A_1, C_1, B, D 四点构造正方体 $ABCD-A_1B_2C_1D_2$, 则球的直径 $2R$ 为正方体 $ABCD-A_1B_2C_1D_2$ 的体对角线, 所以 $2R = 2\sqrt{3}$, 则 $R = \sqrt{3}$, 所以球的表面积为 $4\pi R^2 = 12\pi$, 故 **C 正确**;

对于 D, 如图③, 连接 ED_1, EB, FB, FD_1 , 则由题意得平面 $ADD_1A_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 , 平面 $ADD_1A_1 \cap$ 平面 $BED_1F = D_1F$, 平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $BED_1F = BE$, 所以 $D_1F \parallel BE$, 同理可得 $BF \parallel D_1E$, 所以四边形 BED_1F 为平行四边形, 则四边形 BED_1F 的周长为 $2(BE + ED_1)$, 将四边形 DCC_1D_1, BCC_1B_1 , 沿 CC_1 展开到同一平



图③

面上(图略), 当 B, E, D_1 三点共线, 即 E 点为 C_1C 上靠近 C_1 的四等分点时, $BE + ED_1$ 最小, 最小值为 5, 此时 F 为 A_1A 上靠近 A_1 的四等分点, 所以四边形 BED_1F 周长的最小值为 10, 故 **D 错误**. 故选 AC.

5. $\frac{3}{4}$ 【解析】如图, 连接 DF 并延长,

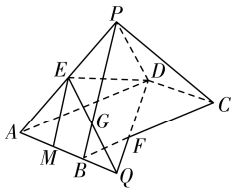
交 AB 的延长线于点 Q , 连接 EQ 交 PB 于 G , 连接 ED .

设 D, E, F 三点确定的平面为 α , 因为 $AB \cap DF = Q$, 则 $Q \in \alpha, Q \in$ 平面 PAB , 又 $\alpha \cap$ 平面 $PAB = EG$, 故 E, G, Q 三点共线, 则 D, E, F, G 四点共面, G 点位置符合题意.

取 AB 的中点 M , 连接 EM , 因为 $CF = 2FB$, 且易知 $\triangle FBQ \sim \triangle FCD$, 所以 $BQ = \frac{1}{2}CD$.

因为 $BM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$, 所以 $BM = BQ$, 又 E 是棱 PA 的中点,

所以 $EM \parallel PB, BG = \frac{1}{2}EM$, 又 $EM = \frac{1}{2}PB$, 所以 $BG = \frac{1}{4}PB$, 故



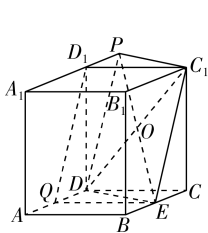


$$\frac{PG}{PB} = \frac{3}{4}.$$

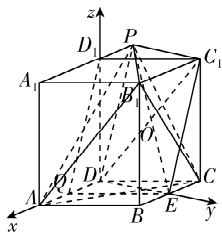
6. (1) 【证明】按题目要求可作出如图①所示的图形, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 平面 $C_1DE \cap$ 平面 $ABCD = DE$, 平面 $C_1DE \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = l$, 则 $DE \parallel l$ (提示: 面面平行的性质, 如果两个平行平面同时和第三个平面相交, 那么他们的交线平行),

$\frac{PO}{OE} = \frac{C_1O}{OD} = 1$, 即 $PO = OE$, 连接 PD , 所以四边形 PC_1ED 是平行四边形, 于是 $C_1E \parallel PD$ 且 $C_1E = PD$.

如图①, 取 AD 的中点 Q , 连接 D_1Q, EQ , 由 $D_1C_1 \parallel DC$ 且 $D_1C_1 = DC, DC \parallel EQ$ 且 $DC = EQ$, 得 $D_1C_1 \parallel EQ$ 且 $D_1C_1 = EQ$, 则四边形 D_1QEC_1 是平行四边形, 所以 $D_1Q \parallel C_1E$ 且 $D_1Q = C_1E$. 又 $C_1E \parallel PD$ 且 $C_1E = PD$, 因此 $PD \parallel D_1Q$ 且 $PD = D_1Q$, 即 PD 与 D_1Q 共面, $P \in$ 平面 A_1ADD_1 . 又 $P \in l, l \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 则 $P \in$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 又平面 $A_1B_1C_1D_1 \cap$ 平面 $A_1ADD_1 = A_1D_1$, 故 $P \in A_1D_1$ (提示: 基本事实 3), 所以 A_1, D_1, P 三点共线.



图①



图②

- (2) 【解】由 (1) 知, 四边形 D_1PDQ 是平行四边形, 则 $QD = D_1P = 1, AD = 2$, 在 $\triangle DCE$ 中, $DC = 2, CE = 1, \angle DCE = 60^\circ$, 由

余弦定理得 $DE = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, 则 $DE^2 + CE^2 =$

DC^2 , 故 $DE \perp BC, AD \perp DE$, 又 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 如图②, 以 D 为原点, DA, DE, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角

坐标系, 则 $A(2, 0, 0), C(-1, \sqrt{3}, 0), B_1(1, \sqrt{3}, 4), P(-1, 0, 4)$, $\overrightarrow{B_1C} = (-2, 0, -4), \overrightarrow{AC} = (-3, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AP} = (-3, 0, 4)$.

设平面 AB_1C 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{B_1C} = -2x - 4z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + \sqrt{3}y = 0, \end{cases} \quad \text{令 } z = 1, \text{ 得 } \mathbf{m} = (-2, -2\sqrt{3}, 1),$$

$$\text{则点 } P \text{ 到平面 } AB_1C \text{ 的距离 } d = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10\sqrt{17}}{17}.$$

由 $AB_1 = CB_1 = 2\sqrt{5}, AC = 2\sqrt{3}$, 得 $\triangle AB_1C$ 的边 AC 上的高 $h = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{17}$,

因此 $\triangle AB_1C$ 的面积 $S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{17} =$

$\sqrt{51}$, 所以三棱锥 $P-AB_1C$ 的体积 $V_{P-AB_1C} = \frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C} \cdot d =$

$$\frac{1}{3} \times \sqrt{51} \times \frac{10\sqrt{17}}{17} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$



刷有所得 证明三点共线,通常是将其中两点确定的直线作为两个平面的交线,再说明第三点是这两个平面的公共点,则此点必在两个平面的交线上,即三点共线.

7. A 【解析】由题知 $P \notin l$, 故存在唯一平面 β , 使得 $P \in \beta, l \subset \beta$. 设 $\alpha \cap \beta = b$, 则 $l \parallel b$ (提示: 线面平行的性质定理), 故存在一条过点 P 的直线与 l 平行, 且该直线在平面 α 内, 若还有另一条直线 $c \parallel l$, 则 $b \parallel c$, 而 $P \in c, P \in b$ 矛盾, 故所求直线有且只有 1 条, 且在平面 α 内, 故 A 正确.

8. B 【解析】若 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma$, 则 $\beta \parallel \gamma$ 或 β 与 γ 相交, 故 A 错误;

若 $m \parallel \alpha, m \subset \beta, \alpha \cap \beta = n$, 则由线面平行的性质定理可知 $m \parallel n$, 故 B 正确;

若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 则当 $m \parallel n$ 时, α, β 可以相交, 故 C 错误;

若 $m \subset \alpha, m \parallel \beta, n \subset \beta, n \parallel \alpha$, 则当 $m \parallel n$ 时, α, β 可以相交, 故 D 错误. 故选 B.

9. B 【解析】若以 EF 所在平面作为下底面还原, 则 C, E 重合, **关键点**

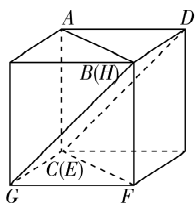
B, H 重合, 还原成如图所示的正方体.

对于 A, 由图可得 AB, CD 异面, 不平行, 故 A 错误;

对于 B, 显然 $EF \parallel AB$, 故 B 正确;

对于 C, $GH \cap AB = B$, 故 C 错误;

对于 D, 由图可得 GH, EF 异面, 不平行, 故 D 错误.



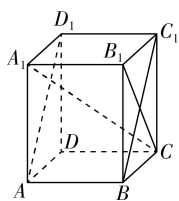
10. C 【解析】对于此类问题, 可在我们熟悉的几何体中找反例来判断.

对于 A: 空间中垂直于同一直线的两条直线, 可能平行、相交或异面, 故 A 错误;

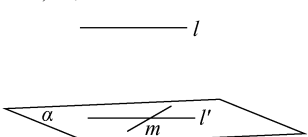
对于 B: 空间中平行于同一直线的两个平面, 可能平行或相交, 故 B 错误;

对于 C: 若一个平面经过另一个平面的一条垂线, 根据面面垂直的判定定理知这两个平面互相垂直, 故 C 正确;

对于 D: 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, A_1, B_1, C 三点到平面 ABC_1D_1 的距离都相等, 但平面 A_1B_1C 与平面 ABC_1D_1 并不平行, 故 D 错误. 故选 C.

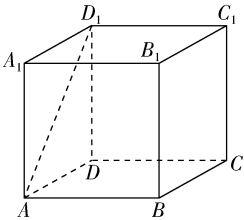


11. B 【解析】

选项	分析	正误
A	若 l 与 α 不平行, 则 l 与 α 相交或 l 在平面 α 内, 又 $m \subset \alpha$, 所以 l 与 m 的位置关系可能为平行、相交或异面	×
B	若 $l \parallel \alpha$, 则 l 与 m 可能垂直, 如图所示, $l \parallel l'$, $l' \subset \alpha, l' \perp m$, 可知 $l \perp m$ 	✓



续表

选项	分析	正误
C	若 $l \cap \alpha = A$, 且 $A \notin m, m \subset \alpha$, 则 l 与 m 异面	×
D	若 $l \cap \alpha = A$, 且 l 与 α 不垂直, 则 l 与 m 可能垂直, 如图, 取 α 为平面 $ABCD$, $l = AD_1$, $m = AB$, 符合题意, 但 $l \perp m$ 	×

12. AD 【解析】根据面面平行的性质定理, 可得 **A** 正确;
 若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$ 或 m, n 异面, 故 **B** 错误;
 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$ 或 m, n 相交或 m, n 异面, 故 **C** 错误;
 因为 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma, \beta \cap \gamma = m$, 所以 $m \perp \alpha$, 又 $n \subset \alpha$, 所以 $m \perp n$,
 故 **D** 正确. 故选 AD.

13. ABD 【解析】

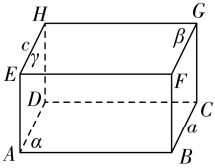
选项	分析	正误
A	根据线面垂直的性质, 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$	✓
B	若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$, 则 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$, 又 $n \perp \beta$, 所以 $m \perp n$	✓
C	若 $m \parallel n, m \parallel \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$	×
D	若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta, \alpha \cap \beta = n$, 过 m 作平面 γ (图略), 使 $\gamma \cap \alpha = a$, 过 m 作平面 ε , 使 $\varepsilon \cap \beta = b$, a, b, n 不重合, 则 $m \parallel a, m \parallel b$, 所以 $a \parallel b$, 因为 $b \subset \beta, a \not\subset \beta$, 所以 $a \parallel \beta$, 因为 $a \subset \alpha, \alpha \cap \beta = n$, 所以 $a \parallel n$, 又 $m \parallel a$, 所以 $m \parallel n$	✓

14. C 【解析】

选项	分析	正误
A	若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = l$, 则当 a 与 b 不相交时, 直线 a 与直线 b 异面或 $a \parallel b$, 充分性不成立	×
B	若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = l$, 则当 $a \perp l$ 且 $b \perp l$ 时, 直线 a 与直线 b 异面或 a 与 b 相交, 充分性不成立	×
C	若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = l$, 则当 $a \parallel l$ 且 $b \perp l$ 时, 直线 a 与直线 b 异面, 故充分性成立; 当直线 a 与直线 b 异面时, 不一定能得到 $a \parallel l$ 且 $b \perp l$, 故必要性不成立. 故“ $a \parallel l$ 且 $b \perp l$ ”是“直线 a 与直线 b 异面”的充分不必要条件	✓
D	若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = l$, 则当 $a \perp b$ 时, 直线 a 与直线 b 异面或 a 与 b 相交, 故充分性不成立	×



15. ABC 【解析】

选项	分析	正误
A	若 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma$, 则 $\beta \parallel \gamma$ 或 β 与 γ 相交	×
B	如图, 在长方体 $ABCD-EFGH$ 中, 取平面 $ABCD, DCGH, ADHE$ 依次为平面 α, β, γ, 取 BC 为直线 a, EH 为直线 c, 显然满足 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma, a \subset \alpha, a \perp \beta, c \subset \gamma$, 但 $a \parallel c$ 	×
C	若 $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma, c \parallel \gamma, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则直线 c 与直线 a, b 可能异面, 可能平行, 也可能相交	×
D	由 $a \perp \alpha, a \parallel b$, 可得 $b \perp \alpha$, 又 $b \perp \beta$, 所以 $\alpha \parallel \beta$, 同理可得 $\beta \parallel \gamma$, 故 $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$	✓

16. B 【解析】根据题意, 画出四棱锥 $P-ABCD$, 如图所示.

由 E, F 分别是 PA, PD 的中点, 可

得 $EF \parallel AD$ 且 $EF = \frac{1}{2}AD$, 因为

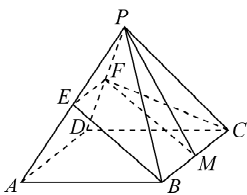
$AD \parallel BC$ 且 $AD = BC$, 所以 $EF \parallel BC$

且 $EF = \frac{1}{2}BC$, 所以四边形 $BCFE$

为梯形, 所以 BE 与 CF 为相交直线.

因为 M 为 BC 的中点, 可得 $EF \parallel BM$, 且 $EF = BM$, 所以四边形 $BMFE$ 为平行四边形, 可得 $BE \parallel MF$.

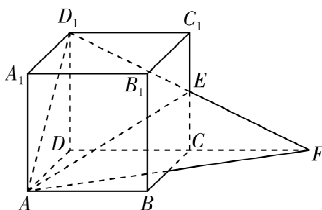
又因为 $BE \not\subset$ 平面 $PFM, MF \subset$ 平面 PFM , 所以 $BE \parallel$ 平面 PFM . 故选 B.

17. $\frac{1}{2} \quad \frac{4}{3}$ 【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 CC_1

的中点, 延长 D_1E , 与 DC 的延长线交于点 F , 连接 AF , 则直线 AF 即为直线 $l_1, \alpha = \angle BAF$ (提示: 根据基本事实 3 作出交线).

由 $CE \parallel DD_1, CE = \frac{1}{2}DD_1$, 得 $CF = DC$,

又 $AB \parallel CD$, 于是 $\tan \alpha = \tan \angle AFD = \frac{1}{2}$.



由平面 $CDD_1C_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $AD_1E \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = l_2$, 平面 $AD_1E \cap$ 平面 $CDD_1C_1 = D_1E$, 得 $D_1E \parallel l_2$.

又 $C_1D_1 \parallel AB$, 因此 $\beta = \angle C_1D_1E, \tan \beta = \frac{1}{2}$.



$$\text{所以 } \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

真题风向练

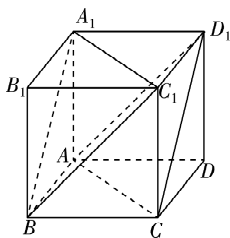
18. D 命题点 空间中直线与平面位置关系的判断

【解析】对于 A, 由于 $AA_1 \parallel CC_1$ 且 $AA_1 = CC_1$, 所以四边形 ACC_1A_1 是平行四边形, 则 $AC \parallel A_1C_1$, 故 A 正确;

对于 B, 由正方体的侧棱垂直于底面, 知 $CC_1 \perp$ 平面 ABC , 故 B 正确;

对于 C, 由选项 A 的分析可知 $AC \parallel A_1C_1$, 同理 $A_1B \parallel D_1C$, 且 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , $A_1B \subset$ 平面 A_1C_1B , $AC \not\subset$ 平面 A_1C_1B , $D_1C \not\subset$ 平面 A_1C_1B , 所以 $AC \parallel$ 平面 A_1C_1B , $D_1C \parallel$ 平面 A_1C_1B , 因为 $AC \subset$ 平面 ACD_1 , $D_1C \subset$ 平面 ACD_1 , $AC \cap D_1C = C$, 所以平面 $ACD_1 \parallel$ 平面 A_1C_1B , 故 C 正确;

对于 D, 由于 $A \in$ 平面 ADD_1 且 $A \in$ 平面 ACD_1 , 所以平面 ADD_1 与平面 ACD_1 相交, 故 D 错误. 故选 D.



第3节 直线、平面平行的判定与性质



题型上分练

1. B 【解析】当 $l \parallel m$ 时, 因为 $l \not\subset \beta, m \subset \beta$, 所以 $l \parallel \beta$; 当 $l \parallel \beta$ 时, 因为 $\alpha \cap \beta = m, l \subset \alpha$, 所以 $l \parallel m$. 故“ $l \parallel m$ ”是“ $l \parallel \beta$ ”的充要条件. 故选 B.

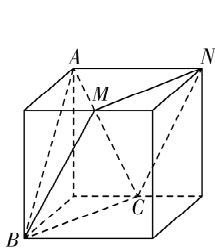
2. ACD 【解析】因为 E, F 分别为 AB, BC 的中点, 所以 $EF \parallel AC$ 且 $EF = \frac{1}{2}AC$, 又点 G, H 分别在边 CD, DA 上且满足 $CG = \frac{1}{2}GD, AH = \frac{1}{2}HD$, 所以 $GH \parallel AC$ 且 $GH = \frac{2}{3}AC$, 所以 $GH \parallel EF$ 且 $EF = \frac{3}{4}GH$, 所以四边形 $EFGH$ 为梯形, $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$, 故 **A** 正

确, **B** 错误;

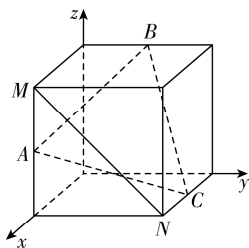
因为 $EF \parallel AC, EF \subset$ 平面 $EFGH, AC \not\subset$ 平面 $EFGH$, 所以 $AC \parallel$ 平面 $EFGH$, 故 **C** 正确;

若直线 HE, GF 相交于点 P , 则 $P \in HE, HE \subset$ 平面 ABD , 且 $P \in FG, FG \subset$ 平面 CBD , 所以 P 是平面 ABD 与平面 CBD 的公共点, 又平面 $ABD \cap$ 平面 $CBD = BD$, 所以 $P \in BD$, 故 **D** 正确. 故选 ACD.

3. ACD 【解析】对于 **A**, 如图①, 连接 BM, CN , 易知 $MN = BC, BM = CN$, 则四边形 $BCNM$ 为平行四边形, 则 $MN \parallel BC$, 又 $BC \subset$ 平面 $ABC, MN \not\subset$ 平面 ABC , 所以 $MN \parallel$ 平面 ABC , 故 **A** 正确;



图①

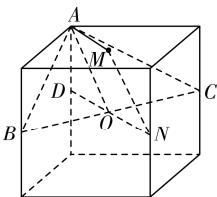


图②

对于 **B**, 连接 CN (图略), 易知 $CN \parallel BM, CN = \frac{1}{2}BM$, 则平移 MN , 当点 N 平移至点 C 时, M 为原 BM 的中点, 不在平面 ABC 内, 故 **B** 错误;

对于 **C**, 如图②所示建立空间直角坐标系, 设正方体的棱长为 2, 可得 $A(2, 0, 1), B(0, 1, 2), C(1, 2, 0), M(2, 0, 2), N(2, 2, 0)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1), \overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1), \overrightarrow{MN} = (0, 2, -2)$, 所以 $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = (0, -3, 3) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$, 又 $MN \not\subset$ 平面 ABC , 所以 $MN \parallel$ 平面 ABC , 故 **C** 正确;

对于 **D**, 如图③所示, 作出过 BC 且与正方体下底面平行的截面的另一条对角线 DN 交 BC 于点 O , 连接 AM, AO , 易知 $AM \parallel ON, AM = ON$, 则四边形 $AMNO$ 为平行四边形, 所以 $MN \parallel AO$, 又 $AO \subset$ 平面 $ABC, MN \not\subset$ 平面 ABC , 所以 $MN \parallel$ 平面 ABC , 故 **D** 正确. 故选 ACD.



图③



4. BC 【解析】连接 C_1D (图略), 因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中仅 M 为动点, 故当三棱锥的体积为定值时, AB_1 应平行于另外三点所确定的平面. 由四棱柱的性质可得 $AB_1 \parallel C_1D$, 而 $AB_1 \not\subset$ 平面 BC_1D , $C_1D \subset$ 平面 BC_1D , 故 $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D , 同理 $AB_1 \parallel$ 平面 CDD_1C_1 , 即 $AB_1 \parallel$ 平面 CC_1D_1 , 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中易知 $AB_1 \cap$ 平面 $A_1CC_1 = A$, $AB_1 \cap$ 平面 $B_1CD = B_1$, 故 A, D 错误, B, C 正确.

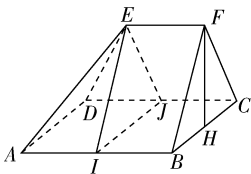
5. BC 【解析】平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$, 平面 $ABCD$ 和平面 $A_1B_1C_1$ 分别与平面 ADC_1A_1 交于 AD, A_1C_1 , 所以 $AD \parallel A_1C_1$, 同理 $A_1C_1 \parallel BE$, 所以 $AD \parallel BE$, 又 $AB \parallel CD$, 所以四边形 $ADEB$ 是平行四边形, 所以 $AB = DE$, 又 $CD = 2AB$, 所以 $CE = DE$, 即 E 为 CD 的中点, A 错误;

四边形 $ADEB$ 是平行四边形, 则 $AD = BE$, 又 $A_1C_1 = AD$, 所以 $A_1C_1 = BE$, 所以四边形 A_1C_1EB 是平行四边形, 所以 $A_1B \parallel C_1E$, 又 $A_1B \not\subset$ 平面 DCB_1C_1 , $C_1E \subset$ 平面 DCB_1C_1 , 故 $A_1B \parallel$ 平面 DCB_1C_1 , 同理可证 $EC_1 \parallel$ 平面 A_1BB_1 , 故 B, C 正确;

若 $EC_1 \parallel$ 平面 BCB_1 , 则 $BA_1 \subset$ 平面 BCB_1 (提示: 若直线与平面平行, 则过平面内一点且与已知直线平行的直线必在此平面内), 于是平面 BCB_1 与平面 A_1BB_1 重合, 与已知矛盾, 故 D 错误. 故选 BC.

6. (1) 【证明】 $\because CD \parallel AB, CD \not\subset$ 平面 $ABFE, AB \subset$ 平面 $ABFE$, $\therefore CD \parallel$ 平面 $ABFE$. 又 $\because CD \subset$ 平面 $CDEF$, 平面 $CDEF \cap$ 平面 $ABFE = EF, \therefore CD \parallel EF, \therefore EF \parallel AB$.

(2) 【解】 $\because H$ 为 BC 的中点, $\therefore CH = 1.5$. 而 $FH = 2, FC = 2.5, FH^2 + CH^2 = CF^2, \therefore FH \perp BC$. $\because$ 平面 $FBC \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $FBC \cap$ 平面 $ABCD = BC, FH \subset$ 平面 $FBC, \therefore FH \perp$ 平面 $ABCD$.



过点 E 分别作 $EI \parallel FB$ 交 AB 于点 $I, EJ \parallel FC$ 交 CD 于点 J , 连接 IJ .

$$\therefore V_{ABCDEF} = V_{BCF-IJE} + V_{E-AIJD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 1.5 + \frac{1}{3} \times 1.5 \times 3 \times 2 = 4.5 + 3 = 7.5.$$

7. (1) 【证明】 $\because D, E$ 分别为 AB, BC 的中点, $\therefore DE \parallel AC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1C_1 \parallel AC, \therefore A_1C_1 \parallel DE$.

$\because A_1C_1 \not\subset$ 平面 $DEF, DE \subset$ 平面 $DEF, \therefore A_1C_1 \parallel$ 平面 DEF .

(2) 【解】 $\because AC \perp BC, CC_1 \perp AC, BC \cap CC_1 = C, BC, CC_1 \subset$ 平面 $BCC_1, \therefore AC \perp$ 平面 BCC_1 .

$\because DE \parallel AC, \therefore DE \perp$ 平面 BCC_1 , 即 $DE \perp$ 平面 EFC_1 .

$\because AC = 4, CC_1 = 2\sqrt{3}, BC = 2, \therefore DE = 2, C_1F = \sqrt{3}, CE = 1$.

$$\therefore S_{\triangle EFC_1} = \frac{1}{2} \times C_1F \times EC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$



$$\therefore V_{D-EFC_1} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle EFC_1} \times DE = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\because A_1C_1 \parallel \text{平面 } DEF, \therefore V_{G-DEF} = V_{C_1-DEF} = V_{D-EFC_1} \text{ (提示:等体积法)}, \therefore V_{G-DEF} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

8. (1) 【证明】延长 OD, CE 相交于点 A , 连接 AA' .

因为 $AB=6, O$ 为 AB 的中点, 所以 $AO=$

$BO=3$, 又 $AD=1$, 所以 $AD=\frac{1}{3}AO$. 因为

$DE \parallel OC$, 所以 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$.

因为 $A'D \perp \text{平面 } CODE, B'O \perp \text{平面 } CODE$, 所以 $A'D \parallel B'O$, 即 $\angle ADA' =$

$\angle AOB'$, 而 $A'D = \frac{1}{3}B'O, AD = \frac{1}{3}AO$, 所以 $\triangle A'DA \sim \triangle B'AO$,

故 $\angle A'DA = \angle B'AO$, 故 A, A', B' 三点共线, 且 $\frac{AA'}{AB'} = \frac{1}{3}$.

所以 $A'E \parallel B'C$, 即 A', B', C, E 四点共面.

(2) 【解】存在, F 为 $B'C$ 上靠近 B' 的三等分点. 理由如下:

由(1)知 $A'E \parallel B'C, \frac{A'E}{B'C} = \frac{AA'}{AB'} = \frac{AD}{AO} = \frac{1}{3}$, 取 $B'C$ 上靠近 B' 的三

等分点 F , 连接 EF , 则 $A'E = B'F$, 又 $A'E \parallel B'F$, 所以四边形 $A'B'FE$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel A'B'$. 又 $EF \not\subset \text{平面 } A'DOB'$, $A'B' \subset \text{平面 } A'DOB'$, 所以 $EF \parallel \text{平面 } A'DOB'$, 故 $B'C$ 上靠近 B' 的三等分点即为点 F 的位置.

(3) 【解】连接 OF, DF, AF , 易知直线 CE 与平面 ODF 所成角即为直线 AC 与平面 OAF 所成角, 作 $CH \perp OF$ 交 OF 于点 H .

由 $B'O \perp \text{平面 } CODE, OA \subset \text{平面 } CODE$, 可得 $B'O \perp OA$, 又 $CO \perp OA, B'O \cap CO = O, B'O, CO \subset \text{平面 } OB'C$, 所以 $OA \perp \text{平面 } OB'C$.

又 $CH \subset \text{平面 } OB'C$, 所以 $OA \perp CH$, 又 $CH \perp OF, OA \cap OF = O, OA, OF \subset \text{平面 } OAF$, 所以 $CH \perp \text{平面 } OAF$, 所以直线 CA 在平面 OAF 上的射影为 AH , 所以 $\angle CAH$ 就是直线 AC 与平面 OAF 所成角.

在 $\triangle FOC$ 中, $CO=3, CF=\frac{2}{3} \times \sqrt{3^2+3^2} = 2\sqrt{2}, \angle FCO = 45^\circ$,

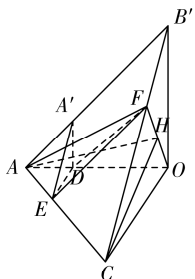
所以 $OF = \sqrt{CO^2 + CF^2 - 2CO \cdot CF \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{5}$,

$$\text{所以 } CH = \frac{2S_{\triangle FOC}}{OF} = \frac{2 \times \frac{1}{2} CF \cdot CO \cdot \sin 45^\circ}{OF} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

在 $\triangle CHA$ 中, $CH \perp AH, AC = 3\sqrt{2}$, 所以 $\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times$

$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 所以直线 CE 与平面 ODF 所成角的正弦值为

$$\frac{\sqrt{10}}{5}.$$





9. D 【解析】

选项	分析	正误
A	$\alpha \cap \beta = a, b \subset \alpha$, 则 a, b 可能平行也可能相交	×
B	$\alpha \cap \beta = a, a \parallel b$, 则 $b \parallel \alpha$ 且 $b \parallel \beta$, 或 b 在平面 α 内, 或 b 在平面 β 内	×
C	$a \parallel \beta, b \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \alpha$, 若 $a \parallel b$, 则平面 α, β 可能平行也可能相交	×
D	面面平行的性质定理的符号语言	✓

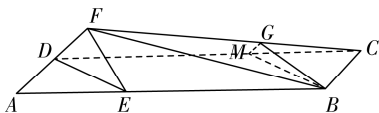
10. C 【解析】作 $BM \parallel DE$ 交 CD 于点 M , 连接 MG , 则四边形 $BEDM$ 是平行四边形, 则 $DM = 2\sqrt{2}, CM = \sqrt{2}$.

又 $BM \not\subset$ 平面 $FDE, DE \subset$ 平面 FDE , 所以 $BM \parallel$ 平面 FDE .

又 $BG \parallel$ 平面 $FDE, BM \cap BG = B, BM, BG \subset$ 平面 BGM , 所以平面 $FDE \parallel$ 平面 BGM .

又平面 $FDE \cap$ 平面 $FDC = FD$, 平面 $BGM \cap$ 平面 $FDC = MG$,

所以 $MG \parallel FD$, 因此 $\frac{CG}{CF} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{3}$. 故选 C.



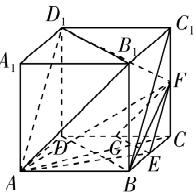
11. AB 【解析】如图所示, 连接 AE, D_1F ,

EF, BC_1 , 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$

中, $AB \parallel C_1D_1$ 且 $AB = C_1D_1$, 所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形, 则 $BC_1 \parallel AD_1$.

因为 E, F 分别为 BC, CC_1 的中点, 则

$EF \parallel BC_1$, 故 $EF \parallel AD_1$, 所以 AE 与 D_1F 共面, **A 正确**.



连接 GE, GF, BD , 因为 $BB_1 \parallel DD_1$ 且 $BB_1 = DD_1$, 所以四边形 BB_1D_1D 为平行四边形, 则 $BD \parallel B_1D_1$. 又因为 E, G 分别为 BC, CD 的中点, 则 $EG \parallel BD$, 所以 $EG \parallel B_1D_1$, 因为 $EG \not\subset$ 平面 $AB_1D_1, B_1D_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , 所以 $EG \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 同理可证 $EF \parallel$ 平面 AB_1D_1 . 因为 $EF \cap EG = E, EF, EG \subset$ 平面 EFG , 所以平面 $EFG \parallel$ 平面 AB_1D_1 , **B 正确**.

连接 AF, AC , 不妨设正方体的棱长为 2, 则 $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, 因为 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD, AC \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $CC_1 \perp AC$, 所以 $AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{8+1} = 3$, 所以 $AE^2 + EF^2 \neq AF^2$, 故 AE, EF 不垂直, **C 错误**.

连接 BF , 假设 $BF \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 由 B 可知 $EF \parallel$ 平面 AB_1D_1 , $EF \cap BF = F, EF, BF \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以平面 $BB_1C_1C \parallel$ 平面 AB_1D_1 . 显然平面 BB_1C_1C 与平面 AB_1D_1 不平行, 假设不成立, **D 错误**.

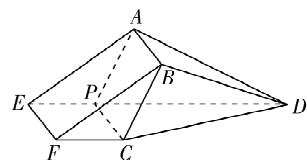
12. C 【解析】如图, 取 ED 上一

点 P , 使 $EP = FC$, 连接 AP ,

PC , 由平面 $ABFE \cap$ 平面

$AED = AE$, 平面 $ABFE \cap$ 平面

$BFC = BF$, 平面 $BFC \parallel$ 平面 AED , 则 $AE \parallel BF$, 又 $AE = BF$, 故四





边形 $ABFE$ 为平行四边形, 即 $AB \parallel EF$ 且 $AB = EF$, 由平面 $EFCP \cap$ 平面 $AEP = EP$, 平面 $EFCP \cap$ 平面 $BFC = FC$, 平面 $BFC \parallel$ 平面 AEP , 则 $EP \parallel FC$, 又 $EP = FC$, 故四边形 $EFCP$ 为平行四边形, 故 $PC \parallel EF$ 且 $PC = EF$.

所以 $AB \parallel PC$, $AB = PC$, 故四边形 $ABCP$ 为平行四边形, 则 $AP \parallel BC$, 由 $BC \perp AD$, 得 $AP \perp AD$, 故 $\cos \angle ADE =$

$$\frac{AD^2 + ED^2 - AE^2}{2AD \cdot ED} = \frac{AD}{PD} \quad (\text{提示: 在 } \triangle ADE \text{ 与 } \triangle ADP \text{ 中分别应用}$$

余弦定理和三角函数定义表示 $\cos \angle ADE$), 即 $\frac{AD^2 + 16 - 4}{8AD} =$

$$\frac{AD}{4-1}, \text{ 解得 } AD = \frac{6\sqrt{5}}{5}. \text{ 故选 C.}$$

13. A 【解析】取 AA_1 的中点 M , 连接

D_1M, MF, C_1F .

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $D_1C_1 \perp$ 平面 ADD_1A_1 , $\therefore D_1M \subset$ 平面 ADD_1A_1 ,

$\therefore D_1C_1 \perp D_1M$.

$\because F$ 是 BB_1 的中点, $\therefore D_1C_1 \parallel AB \parallel MF$, 且 $D_1C_1 = AB = MF$, $\therefore$ 四边形 D_1C_1FM 是矩形.

$\because MF \not\subset$ 平面 ABE , $AB \subset$ 平面 ABE , $\therefore MF \parallel$ 平面 ABE .

$\because MA \parallel D_1E$ 且 $MA = D_1E$, $\therefore$ 四边形 AMD_1E 是平行四边形, $\therefore D_1M \parallel EA$.

$\because D_1M \not\subset$ 平面 ABE , $EA \subset$ 平面 ABE , $\therefore D_1M \parallel$ 平面 ABE .

$\because D_1M \cap MF = M$, $D_1M \subset$ 平面 D_1C_1FM , $MF \subset$ 平面 D_1C_1FM , $\therefore$ 平面 $D_1C_1FM \parallel$ 平面 ABE ,

矩形 D_1C_1FM 即为过点 F 且平行于平面 ABE 的平面截正方体所得的截面. $\because AB = 2$, $\therefore MF = 2$, $D_1M = \sqrt{5}$, $\therefore S_{\text{矩形}D_1C_1FM} = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. 故选 A.

14. C 【解析】如图, 取 PA, PD 的中点 G, H , 连接 EG, FH, EF, GH .

因为 E, F 分别是棱 AB, CD 的中点, 所以 $EF \parallel AD$, 又 $HG \parallel$

AD , 则 $HG \parallel EF$, 故 E, F, H, G 四点共面.

因为 $PB \parallel GE$, $PB \not\subset$ 平面 $EFHG$, $GE \subset$ 平面 $EFHG$, 所以 $PB \parallel$ 平面 $EFHG$, 四边形 $EFHG$ 即为所求的截面.

易知 EG 与 HF 不平行, 延长 EG, FH 交于点 Q .

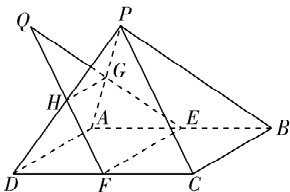
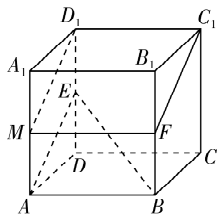
又 $HG = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}EF$, 则 $QE = 2GE = PB = 2$, 由正方形 $ABCD$

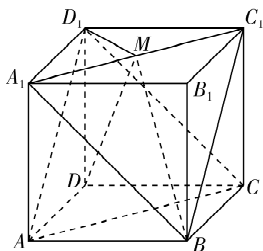
的面积为 4 可得 $EF = BC = 2$, 则 $S = \frac{3}{4}S_{\triangle QEF} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times QE \times$

$EF \times \sin \angle QEF = \frac{3}{2} \sin \angle QEF$, 由 $\sin \angle QEF \leq 1$, 得 $S \leq \frac{3}{2}$,

当且仅当 $\angle QEF = 90^\circ$, 即平面 $ABCD \perp$ 平面 PAB 时等号成立, 所以 S 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

15. C 【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 连接 $A_1C_1, MB, A_1B, BC_1, DM, MD_1$.





由于 $AA_1 \parallel CC_1$, 且 $AA_1 = CC_1$, 所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形, 所以 $AC \parallel A_1C_1$, 又 $AC \subset$ 平面 ACD_1 , 且 $A_1C_1 \not\subset$ 平面 ACD_1 , 所以 $A_1C_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 同理可证 $A_1B \parallel$ 平面 ACD_1 .

因为 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1BC_1 , $A_1B \subset$ 平面 A_1BC_1 , 且 $A_1C_1 \cap A_1B = A_1$, 所以平面 $A_1BC_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 且平面 $A_1BC_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = A_1C_1$, M 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点, 且 $B \in$ 平面 A_1BC_1 , 若 $MB \parallel$ 平面 ACD_1 , 则 $M \in A_1C_1$, 即 M 在直线 A_1C_1 上时, 都满足 $MB \parallel$ 平面 ACD_1 .

因为 $DD_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $MD_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $DD_1 \perp MD_1$, 显然 $\tan \angle DMD_1 = \frac{DD_1}{MD_1}$, 当 $\tan \angle DMD_1$ 最大时,

MD_1 取最小值, 此时点 M 满足 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = M$. 可设正方体

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 所以 $\tan \angle DMD_1 = \frac{DD_1}{MD_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}$. 故选 C.

16. (1) 【证明】因为 $\angle FCD = \angle FCB = 90^\circ$, 所以 $FC \perp CD$, $FC \perp CB$, 又 $CD \cap CB = C$, $CD, CB \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $FC \perp$ 平面 $ABCD$, 而 $AE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $FC \parallel AE$.

又 $AE \not\subset$ 平面 BCF , $FC \subset$ 平面 BCF , 所以 $AE \parallel$ 平面 BCF .

因为 $AD \parallel BC$, 且 $AD \not\subset$ 平面 BCF , $BC \subset$ 平面 BCF , 所以 $AD \parallel$ 平面 BCF .

又 $AD \cap AE = A$, $AD, AE \subset$ 平面 ADE , 故平面 $ADE \parallel$ 平面 BCF .

因为 $DE \subset$ 平面 ADE , 所以 $DE \parallel$ 平面 BCF .

(2) 【解】连接 AF , 如图①所示, 设

$AB = a (a > 0)$, $\frac{BC}{AB} = \lambda (\lambda > 0)$, 则 $BC =$

$CF = \lambda a$, $BD = DF = a \sqrt{1 + \lambda^2}$, $BF = \sqrt{2} \lambda a$.

在 $\triangle BDF$ 中, 边 BF 上的高 $h =$

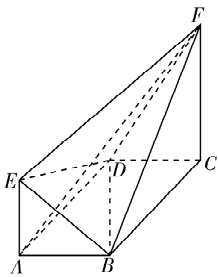
$\sqrt{DF^2 - \left(\frac{1}{2}BF\right)^2} = a \sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda^2}$,

$S_{\triangle BDF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda a \cdot a \sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda^2}$.

$V_{A-BDF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda a \cdot a \sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda^2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \lambda a =$

$\frac{\sqrt{10}}{30} \lambda^2 a^3 \sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda^2}$;

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \lambda a^2$, $V_{F-ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot FC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \lambda a^2 \cdot \lambda a =$



图①



$\frac{1}{6}\lambda^2 a^3$, 由等体积法可得 $V_{A-BDF} = V_{F-ABD}$,

即 $\frac{\sqrt{10}}{30}\lambda^2 a^3 \sqrt{1+\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{1}{6}\lambda^2 a^3$, 解得 $\frac{BC}{AB} = \lambda = \sqrt{3}$.

一题多解

(2) 易知 AB, AD, AE 两两垂直, 以 $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图②所示.

设 $AB=1, BC=\lambda (\lambda > 0)$, 则 $A(0,0,0)$,

$B(1,0,0), D(0,\lambda,0), F(1,\lambda,\lambda)$, 则

$\vec{BD}=(-1,\lambda,0), \vec{BF}=(0,\lambda,\lambda)$.

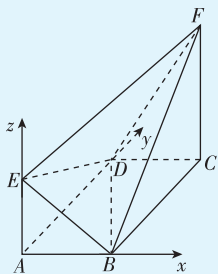
设平面 BDF 的法向量 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BD} = -x + \lambda y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{BF} = \lambda y + \lambda z = 0, \end{cases}$$

取 $y=1$, 则 $\mathbf{n}=(\lambda, 1, -1)$.

又 $\vec{AB}=(1,0,0)$, 点 A 到平面 BDF 的

距离 $d = \frac{|\vec{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1+1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda$, 解得 $\lambda = \sqrt{3}$, 即 $\frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$.



图②

17. 【解】(1) 连接 DE , 如图①所示.

因为 F 是 BP 的中点, H 是 PC 的中点, 所以 $FH \parallel BC$, 又 $BC \parallel AD$, 所以 $FH \parallel AD$, 又 $FH \not\subset$ 平面 $AEPD$, $AD \subset$ 平面 $AEPD$, 所以 $FH \parallel$ 平面 $AEPD$.

同理 $FG \parallel$ 平面 $AEPD$, 又 $FH \cap FG = F$, $FH \subset$ 平面 FGH , $FG \subset$ 平面 FGH , 所以平面 $FGH \parallel$ 平面 $ADPE$.

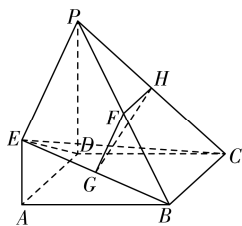
因为 $CD \perp AD$, $CD \perp PD$, $AD \cap PD = D$, $AD \subset$ 平面 $PDAE$, $PD \subset$ 平面 $PDAE$, 所以 $CD \perp$ 平面 $PDAE$, 则 $\angle CED$ 就是直线 CE 与平面 $ADPE$ 所成角.

又平面 $FGH \parallel$ 平面 $ADPE$, 所以 $\angle CED$ 就是直线 CE 与平面 FGH 所成角.

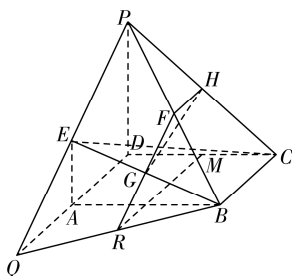
因为在直角梯形 $ADPE$ 中, $AD = PD = 2EA = 2$, 所以 $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{5}$.

因为 $CD \perp$ 平面 $PDAE$, $DE \subset$ 平面 $PDAE$, 所以 $CD \perp DE$, 在 $\text{Rt} \triangle CDE$ 中, $CD = 2$, $CE = \sqrt{DE^2 + CD^2} = \sqrt{5+4} = 3$,

所以 $\sin \angle CED = \frac{CD}{CE} = \frac{2}{3}$, 即直线 CE 与平面 FGH 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.



图①



图②

(2) 延长 PE 交 DA 的延长线于点 Q , 连接 BQ , 延长 FG , 交 BQ 于点 R , 如图②所示.



因为 F, G 分别为 BP, BE 的中点, 所以 $FG \parallel PE$, 所以 $FR \parallel PQ$, 所以 R 是 BQ 的中点, 取 CD 的中点 M , 连接 RM , 则 RM 就是所求的直线 l .

理由如下: 由以上作图过程可知, R 是 BQ 的中点, M 是 CD 的中点, 所以 $RM \parallel DQ$, 即 $RM \parallel AD$, 又 $FH \parallel AD$,

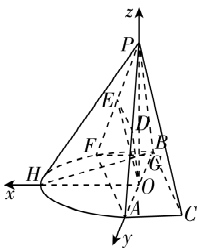
所以 $RM \parallel FH$, 所以 R, M, F, H 四点共面, 所以 $R, M \in$ 平面 FGH , 又 $R, M \in$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $FGH \cap$ 平面 $ABCD = RM$, 所以 RM 就是所求的直线 l .

18. (1) 【证明】由 D, E 分别为线段 PA, PF 的中点, 知 $DE \parallel AF$. 因为 $AF \parallel BC$, 所以 $DE \parallel BC$, 又 $DE \not\subset$ 平面 $PBC, BC \subset$ 平面 PBC , 故 $DE \parallel$ 平面 PBC .

因为 D, O 分别为线段 PA, AB 的中点, 所以 $OD \parallel PB$.

因为 $PB \subset$ 平面 $PBC, OD \not\subset$ 平面 PBC , 所以 $OD \parallel$ 平面 PBC , 又 $OD, DE \subset$ 平面 ODE , 且 $OD \cap DE = D$, 所以平面 $ODE \parallel$ 平面 PBC .

(2) 【解】以 O 为坐标原点, $\vec{OH}, \vec{OA}, \vec{OP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 (提示: PO 是半圆锥的高, H 是半圆弧的中点, 所以 OA, OH, OP 两两垂直), 则 $O(0, 0, 0), B(0, -5, 0), H(5, 0, 0)$.



又 $\triangle PAB$ 是边长为 10 的正三角形, 可得 $OP = 5\sqrt{3}$, 则 $P(0, 0, 5\sqrt{3})$.

过点 F 作 $FG \perp AB$, 垂足为 G , 由 $AB = 10, BC = 8, AC = 6$, 知 $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$, 因为 $AF \parallel BC$, 所以 $\cos \angle FAB = \frac{4}{5}$, $AF = 8$, 所以 $AG = \frac{32}{5}, FG = \frac{24}{5}$, 故 $F\left(\frac{24}{5}, -\frac{7}{5}, 0\right)$.

又 E 为线段 PF 的中点, 则 $E\left(\frac{12}{5}, -\frac{7}{10}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, 故 $\vec{OE} = \left(\frac{12}{5}, -\frac{7}{10}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right), \vec{BH} = (5, 5, 0)$, 则 $|\cos \langle \vec{OE}, \vec{BH} \rangle| = \frac{12 - \frac{7}{2} + 0}{5 \times 5\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{100}$.

故异面直线 BH 与 OE 所成角的余弦值为 $\frac{17\sqrt{2}}{100}$.



综合提分练

1. AD 必刷考点 ⊙ 线面垂直的性质、面面平行的性质

【解析】如图, 由于 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1, EF \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 故 $EF \perp AA_1$, 所以 A 正确.

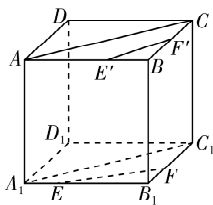
当 E, F 分别是线段 A_1B_1, B_1C_1 的中点时, $EF \parallel A_1C_1$.

又 $AA_1 \parallel CC_1, AA_1 = CC_1$, 所以四边形 AA_1C_1C 为平行四边形, 所以 $AC \parallel A_1C_1$, 则 $EF \parallel AC$;

当 E, F 不是线段 A_1B_1, B_1C_1 的中点时, EF 与 AC 异面, 所以 B, C 错误.



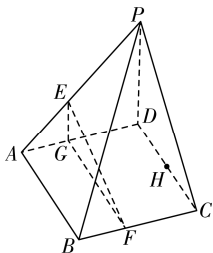
由于平面 $A_1B_1C_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, $EF \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$, 所以 **D 正确**. 故选 AD.



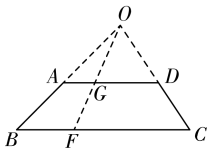
2. BD 必刷考点 ⊙ 线面平行、面面平行

【解析】如图①, 过点 E 作 $EG \parallel PD$ 交 AD 于点 G , 连接 GF , 则 $EG \parallel$ 平面 PCD , 又 $\triangle AEG \sim \triangle APD$, 所以 $\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{EP} = \frac{BF}{FC}$.

对于 B , 若 $AB \parallel CD$, 则 $GF \parallel CD$, 又 $GF \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD , 所以 $GF \parallel$ 平面 PCD , 由 $EG \cap GF = G$, $EG, GF \subset$ 平面 EGF , 得平面 $EGF \parallel$ 平面 PCD , 又 $EF \subset$ 平面 EGF , 所以 $EF \parallel$ 平面 PCD , 故 **B 正确**.



图①



图②

对于 D , 若 $CD \parallel$ 平面 PAB , 因为平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAB = AB$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $CD \parallel AB$, 结合 B 可知, **D 正确**.

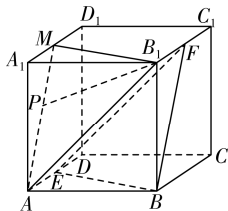
假设 $EF \parallel$ 平面 PCD , 平面 $EFP \cap CD = H$, 则 $EF \parallel PH$. 若 $BC \parallel$ 平面 PAD , 因为 $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAD = AD$, 所以 $BC \parallel AD$, 反之若 $BC \parallel AD$, 则可证 $BC \parallel$ 平面 PAD , 即 A, C 同时正确或错误.

若 $BC \parallel AD$, 则可能 $AB \parallel CD$, 也可能 AB 与 CD 相交.

如图②, 若 AB 与 CD 相交, 则由 $\frac{AG}{GD} = \frac{BF}{FC}$ 知, 延长 FG , 必与 AB, CD 交于同一点 O , 由几何关系知 EF 与 PH 不平行, 故 **A, C 错误**. 故选 BD.

3. B 必刷题型 ⊙ 空间平行的转化问题

【解析】如图所示, 取 A_1D_1 的中点 M , 连接 AM, B_1M, AB_1 , 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 可得 $AD \parallel B_1C_1$ 且 $AD = B_1C_1$, 因为 E, F 分别是棱 AD, B_1C_1 的中点, 则 $AE \parallel B_1F$ 且 $AE = B_1F$, 所以四边形 AB_1FE 为平行四边形, 则 $AB_1 \parallel EF$.



又因为 $AB_1 \not\subset$ 平面 BEF , $EF \subset$ 平面 BEF , 所以 $AB_1 \parallel$ 平面 BEF , 同理可证 $AM \parallel$ 平面 BEF .

因为 $AB_1 \cap AM = A$, $AB_1, AM \subset$ 平面 AB_1M , 所以平面 $AB_1M \parallel$ 平

面 BEF .

又因为 $AM \subset$ 平面 AA_1D_1D , 当 $P \in AM$ 时, $B_1P \subset$ 平面 AB_1M , 所以 $B_1P \parallel$ 平面 BEF , 所以点 P 在侧面 AA_1D_1D 内的轨迹为

关键点

线段 AM .

连接 B_1P , 因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 2, 所以 $AM=B_1M=\sqrt{5}, AB_1=2\sqrt{2}$,

在 $\triangle AMB_1$ 中, $\cos \angle AMB_1 = \frac{5+5-8}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{5}$, 且 $B_1M \cdot$

$\cos \angle AMB_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5} = AM$, 则 $\sin \angle AMB_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 所以 B_1P 的最

小值为 $B_1M \cdot \sin \angle AMB_1 = \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$. 故选 B.

4. A 必刷题型 ① 折叠中的面面平行问题

【解析】第一步:折叠前,在平面图形 $ABCD$ 中求出 AC 的长度.

折叠前,连接 AC, BD , 如图①.

由题意,在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 2, \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC =$

$4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$, 所以

$AC = 2\sqrt{3}$, 故在折叠过程中 $AC \leq 2\sqrt{3}$. 折叠后,若 $AC \parallel$ 平面 $DEBF$, 则 $AC \not\subset$ 平面 $DEBF$, 则 $AC < 2\sqrt{3}$, 故 B, D 错误.

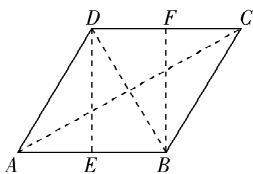
第二步:折叠过程中,证明平面 $EAB \parallel$ 平面 FDC , 面面距离即为 AC 的最小值, 由此得到 AC 的取值范围.

折叠前,在菱形 $ABCD$ 中, $AB = BD = 2, \angle DAB = 60^\circ$, 则 $\triangle ABD$ 是正三角形. 因为 E, F 分别为边 AB, CD 的中点, 则 $DE \perp AB, BF \perp DC, AB \parallel DC$, 所以 $DE \parallel BF$.

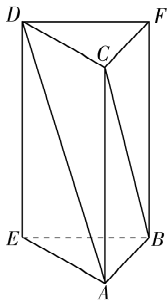
如图②, 折叠后, $DE \perp AE, DE \perp EB, AE \cap EB = E$, 又 $AE \subset$ 平面 $EAB, EB \subset$ 平面 EAB ,

则 $DE \perp$ 平面 EAB , 同理, $BF \perp$ 平面 FDC , 所以平面 $EAB \parallel$ 平面 FDC , 则平面 EAB 与平面 FDC 的距离即为 $DE = \sqrt{3}$, 由 $A \in$ 平面 $EAB, C \in$ 平面 FDC , 得 $AC \geq \sqrt{3}$.

在折叠过程中, 当 $\angle DFC = \angle AEB = 60^\circ$ 时, 由 $AE = EB, DF = FC$, 得 $\triangle EBA, \triangle DFC$ 均为正三角形, 可补成如图所示的正三棱柱 $EBA-DFC$. 满足 $AC \parallel$ 平面 $DEBF$, 此时 $AC = DE = \sqrt{3}$, 所以 AC 的最小值为 $\sqrt{3}$, 故 A 正确, C 错误. 故选 A.



图①



图②

真题风向练

5. 命题点 ① 圆锥的侧面积, 线面平行的证明

(1) **【解】**第一步:求圆锥的母线长.

过点 P 向底面作垂线, 则垂足为 O , $\angle PAO$ 即为直线 PA 与底面所成的角, 所以 $\angle PAO = \frac{\pi}{3}$ 2 分

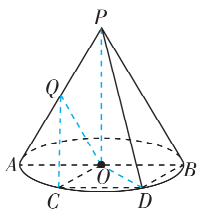


在 $\text{Rt}\triangle PAO$ 中, $OA = \frac{1}{2}AB = 1$, $\angle PAO = \frac{\pi}{3}$, 所以 $PA = 2$.

..... 4 分

第二步: 求圆锥的侧面积.

圆锥侧面积 $S = \pi \times OA \times AP = \pi \times 1 \times 2 = 2\pi$ 6 分



(2)【证明】第一步: 分析四边形 $OCDB$ 的形状.

连接 OD, CQ, OQ , 因为 $\widehat{AC} = \frac{\pi}{3}$, $CD \parallel AB$, 所以 $\angle OCD = \frac{\pi}{3}$, 又 $OC = OD$, 所以 $\triangle OCD$ 为等边三角形, 所以 $CD = OD = OB$, 又 $CD \parallel OB$, 所以四边形 $OCDB$ 是平行四边形, 所以 $OC \parallel DB$.

..... 10 分

第二步: 证明 QM 所在平面与平面 PBD 平行.

在 $\triangle PAB$ 中, Q, O 分别是 PA, AB 的中点, 所以 $QO \parallel PB$,
又 $QO \not\subset$ 平面 PBD , $PB \subset$ 平面 PBD , 所以 $QO \parallel$ 平面 PBD . 同理
可得 $OC \parallel$ 平面 PBD 12 分

又 $QO \cap OC = O$, $QO, OC \subset$ 平面 QOC , 所以平面 $QOC \parallel$ 平面 PBD , 又 $QM \subset$ 平面 QOC , 所以 $QM \parallel$ 平面 PBD 14 分

关键点拨 本题中因为 M 是动点, 所以应考虑 QM 所在平面与平面 PBD 平行.



第4节 直线、平面垂直的判定与性质



题型上分练

1. B 【解析】充分性:若 $m//\alpha, l \perp m$, 则 $l \subset \alpha$ 或 $l//\alpha$ 或 $l \perp \alpha$ 或 l 与 α 斜交, 故不满足充分性.

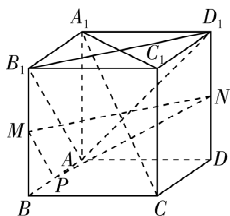
必要性:由 $l \perp \alpha, m//\alpha$ 可推出 $l \perp m$, 满足必要性.

所以“ $l \perp m$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

2. C 【解析】

选项	分析	正误
A	由 $n//\alpha$, 得在平面 α 内存在直线 a 使得 $n//a$, 而 $m//n$, 则 $m//a$, 又 $m \not\subset \alpha$, 因此 $m//\alpha$	✓
B	令 $\alpha \cap \gamma = b, \beta \cap \gamma = c$, 在 γ 内取一点 M 作 $MP \perp b$ 于点 $P, MQ \perp c$ 于点 Q (图略), 而 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $MP \perp \alpha, MQ \perp \beta$, 又 $\alpha \cap \beta = l$, 于是 $l \perp MP, l \perp MQ$, 而 $MP \cap MQ = M, MP, MQ \subset \gamma$, 因此 $l \perp \gamma$	✓
C	m, n 在平面 α 内, 且 $l \perp m, l \perp n$, 当 $m//n$ 时, 不能推出 $l \perp \alpha$	×
D	由 $m//\alpha$, 得在平面 α 内存在直线 d 使得 $m//d$, 而 $m \perp l$, 则 $d \perp l$, 又 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l$, 于是 $d \perp \beta$, 因此 $m \perp \beta$	✓

3. D 【解析】连接 $AB_1, B_1D_1, AD_1, A_1C_1, A_1C$, 如图所示.



因为 P, M, N 分别为 AB, BB_1, DD_1 的中点, 所以 $MP//AB_1, B_1D_1//MN$.

因为 $MP \not\subset$ 平面 $AB_1D_1, AB_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , 所以 $MP//$ 平面 AB_1D_1 . 因为 $MN \not\subset$ 平面 $AB_1D_1, B_1D_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , 所以 $MN//$ 平面 AB_1D_1 . 又 $MP \cap MN = M, MP, MN \subset$ 平面 MNP , 所以平面 $MNP//$ 平面 AB_1D_1 , 则垂直于平面 MNP 的直线一

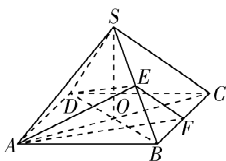
突破点

定垂直于平面 AB_1D_1 .

因为 $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1, B_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $B_1D_1 \perp CC_1$. 又 $B_1D_1 \perp A_1C_1, A_1C_1 \cap CC_1 = C_1, A_1C_1, CC_1 \subset$ 平面 A_1C_1C , 故 $B_1D_1 \perp$ 平面 A_1C_1C , 又 $A_1C \subset$ 平面 A_1C_1C , 故 $A_1C \perp B_1D_1$.

同理可得 $A_1C \perp AB_1$, 又 $AB_1 \cap B_1D_1 = B_1, AB_1, B_1D_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , 故 $A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1 , 故 $A_1C \perp$ 平面 MNP . 若其他选项的直线垂直于平面 MNP , 则要与 A_1C 平行, 显然都不平行. 故选 D.

4. ACD 【解析】对于 A, 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AD//BC$, 又 $AD \not\subset$ 平面 $SBC, BC \subset$ 平面 SBC , 所以 $AD//$ 平面 SBC , 又 $EF \subset$ 平面 SBC , 所





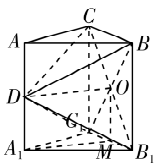
以 AD 与 EF 无公共点, 且 AD 与 EF 不平行, 所以 AD 与 EF 异面, **A 正确**.

对于 B, 由题及正棱锥的性质可知 $SD = SB = AB$, $DB = \sqrt{2}AB$, 所以 $\triangle SBD$ 为底与腰不相等的等腰三角形, 又因为 E 为 SB 的中点, 所以 DE 与 SB 不垂直, **B 错误**.

对于 C, 因为 E, F 分别为棱 SB, BC 的中点, 所以 $EF \parallel SC$, 又 $SC \not\subset$ 平面 AEF , $EF \subset$ 平面 AEF , 所以 $SC \parallel$ 平面 AEF (提示: 线面平行的判定定理), **C 正确**.

对于 D, 设 AC, BD 交于点 O , 连接 SO , 因为 $SA = SC$, O 为 AC 的中点, 所以 $SO \perp AC$, 又 $AC \perp BD$, $SO \cap BD = O$, $SO, BD \subset$ 平面 SBD , 所以 $AC \perp$ 平面 SBD (提示: 线面垂直的判定定理), 即 $AC \perp$ 平面 BDE , **D 正确**. 故选 ACD.

5. C 【解析】如图所示, 取 B_1C_1 的中点 M , 连接 A_1M, B_1C, BC_1 , 设 $B_1C \cap BC_1 = O$, 连接 OD, OM .



因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 是边长为 1 的等边三角形, M 为 B_1C_1 的中点, 所以 $A_1M \perp B_1C_1$, $A_1M = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

M 为 B_1C_1 的中点, 所以 $A_1M \perp B_1C_1$, $A_1M = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $BB_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$, $A_1M \subset$ 底面 $A_1B_1C_1$, 所以 $BB_1 \perp A_1M$, 因为 $BB_1 \cap B_1C_1 = B_1$, $BB_1, B_1C_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $A_1M \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为四边形 BCC_1B_1 为正方形, 所以 O 为正方形 BCC_1B_1 的中心, 所以 $OM \parallel CC_1$ 且 $OM = \frac{1}{2}CC_1$, 又 D 为棱 AA_1 的中点,

所以 $A_1D \parallel CC_1$ 且 $A_1D = \frac{1}{2}CC_1$, 所以 $OM \parallel A_1D$ 且 $OM = A_1D$,

故四边形 A_1MOD 为平行四边形, 所以 $A_1M \parallel DO$, 又 $A_1M \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $DO \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 即点 D 到平面 BCC_1B_1

的距离为 DO 的长. 易知 $DO = A_1M = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以四棱锥 $D-BCC_1B_1$

的体积是 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 故选 C.

6. AF 或 PB (写出一个即可) 【解析】 $\because PA \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 $ABC, \therefore PA \perp BC$. 又 $AC \perp BC$, 且 $PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 $PAC, \therefore BC \perp$ 平面 PAC . 又 $\because AF \subset$ 平面 $PAC, \therefore BC \perp AF$.

又 $\because AF \perp PC, PC \cap BC = C, PC, BC \subset$ 平面 $PBC, \therefore AF \perp$ 平面 PBC . 又 $\because EF \subset$ 平面 $PBC, \therefore AF \perp EF$.

$\because PA = AB, E$ 为 PB 的中点, $\therefore AE \perp PB$.

$\because AF \perp$ 平面 $PBC, PB \subset$ 平面 $PBC, \therefore AF \perp PB$.

又 $\because AE \cap AF = A, AE, AF \subset$ 平面 $AEF, \therefore PB \perp$ 平面 AEF .

又 $\because EF \subset$ 平面 $AEF, \therefore PB \perp EF$.

在 $\triangle PBC$ 中, $\because PB \perp EF, \therefore PC, BC$ 不可能与 EF 垂直.

在 $\triangle AEF$ 中, $\because AF \perp EF, \therefore AE$ 不可能与 EF 垂直.

在 $\triangle PAC$ 中, $\because PA, AC, PC \subset$ 平面 PAC, PC 与 EF 不垂直,

$\therefore EF$ 与平面 PAC 不垂直, 又 $EF \perp AF, AF \subset$ 平面 $PAC, \therefore PA, AC$ 都不与 EF 垂直.

根据异面直线的定义可得 AB 与 EF 为异面直线, 又 $\because AB$ 与



平面 PBC 不垂直, $\therefore AB$ 与 EF 不一定垂直.

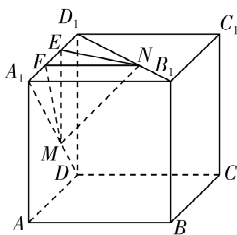
7. $\frac{\sqrt{30}}{6}$

【解析】依题意, 设 $DM = x$, 则 $D_1N = 2x$, 其中 $x \in$

$$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

过点 M 作 $ME \parallel DD_1$ 交 A_1D_1 于点 E , 过点 N 作 $NF \parallel A_1B_1$ 交 A_1D_1 于点 F , 连接 MF, NE , 如图所示, 因为 $DD_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $ME \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 又 $NE \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $EF \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $ME \perp NE, ME \perp EF$.

同理, $NF \perp MF$, 则 $MN^2 = MF^2 + NF^2$.



由 $DM = x$, 得 $D_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, 由 $D_1N = 2x$, 得 $D_1F = \sqrt{2}x$,

所以 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $ME = A_1E = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$, 所以 $MF^2 = EF^2 + ME^2 =$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = x^2 - \sqrt{2}x + 1.$$

又 $NF = D_1F = \sqrt{2}x$, 所以 $MN^2 = NF^2 + MF^2 = (\sqrt{2}x)^2 + x^2 - \sqrt{2}x +$

$1 = 3x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \geq \frac{5}{6}$, 所以当 $x = \frac{\sqrt{2}}{6}$ 时, 线

段 MN 取最小值 $\frac{\sqrt{30}}{6}$.

关键点拨

解决本题的关键是作辅助线, 利用正方体的性质得到各直角三角形, 从而利用勾股定理将问题转化为二次函数的最值问题, 由此得解.

8. (1) 【证明】取 B_1C_1 的中点 N , 连接 A_1N, PN ,

因为 $A_1B_1 = A_1C_1$, P 为 BC 中点, 所以 $B_1C_1 \perp A_1N, B_1C_1 \perp PN$,

又 $A_1N \cap PN = N, A_1N, PN \subset$ 平面 A_1PN , 所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 A_1PN , 又因为 $A_1P \subset$ 平面 A_1PN , 所以 $B_1C_1 \perp A_1P$.

(2) 【解】设 $\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC$ 的中

心分别为 $O_1, O_2, P, A_1, B_1, C_1$ 所在球面对应的球心为点 O , 半径为 R , 连接 $O_1O_2, O_1B_1, PC_1, PB_1$.

因为 $PN \parallel CC_1, CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$,

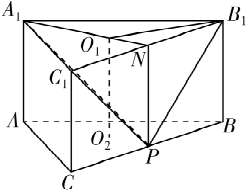
所以 $NP \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

P, A_1, B_1, C_1 所在球面对应的球心 O 即为三棱锥 $P-A_1B_1C_1$ 外接球的球心.

因为 $C_1N = NB_1 = NP = 1$, 所以 $\triangle B_1C_1P$ 为直角三角形, 其外心为 N .

因为 $NP \perp$ 平面 $A_1B_1C_1, A_1N \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, 所以 $A_1N \perp NP$,

又 $A_1N \perp B_1C_1, NP \cap B_1C_1 = N, NP, B_1C_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以





$A_1N \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 即 $A_1N \perp$ 平面 B_1C_1P , 则球心 O 在直线 A_1N 上.

易知球心 O 在直线 O_1O_2 上, 又 $O_1O_2 \cap A_1N = O_1$, 所以 O_1 即为该球球心 O , $R = O_1B_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 =$

$$\frac{16\pi}{3}.$$

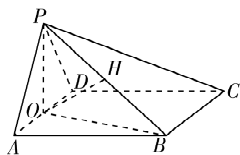
9. (1) 【证明】连接 PO , 如图, 因为 $\triangle PAD$ 是等边三角形, O 是 AD 的中点, 所以 $AD \perp PO$ (提示: 等边三角形的性质).

又因为 $AD \perp PB$, $PO, PB \subset$ 平面 POB , $PO \cap PB = P$, 所以 $AD \perp$ 平面 POB . 因为 $OB \subset$ 平面 POB , 所以 $AD \perp OB$ (提示: 线面垂直的性质).

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $OB \perp AD$, $OB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $OB \perp$ 平面 PAD (提示: 面面垂直的性质定理).

(2) 【解】(几何法) 在菱形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 由 (1) 知 $AD \perp$ 平面 POB , 所以 $BC \perp$ 平面 POB .

过点 O 作 $OH \perp PB$ 于 H , 如图所示.



因为 $BC \perp$ 平面 POB , $OH \subset$ 平面 POB , 所以 $OH \perp BC$,

又因为 $OH \perp PB$, $PB, BC \subset$ 平面 PBC , $PB \cap BC = B$, 所以 $OH \perp$ 平面 PBC ,

所以线段 OH 的长即为点 O 到平面 PBC 的距离.

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 因为 $AB = 4$, $AO = 2$, $\angle AOB = 90^\circ$, 所以 $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 2\sqrt{3}$, $PO = 2\sqrt{3}$.

因为 $OB \perp$ 平面 PAD , $OP \subset$ 平面 PAD , 所以 $OB \perp OP$.

在 $\text{Rt}\triangle POB$ 中, 因为 $OB = OP = 2\sqrt{3}$, 所以 $PB = 2\sqrt{6}$, 由 $\frac{1}{2} \cdot$

$$OB \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot PB \cdot OH, \text{ 得 } OH = \sqrt{6}.$$

故点 O 到平面 PBC 的距离为 $\sqrt{6}$.

一题多解

(2) (向量法) 因为 $OB \perp$ 平面 PAD , $OP \subset$ 平面

PAD , 所以 $OB \perp OP$, 又 $AD \perp$

PO , $AD \perp OB$, 故 OP, OA, OB 两

两垂直, 以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴

的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0,$

$2\sqrt{3}), B(0, 2\sqrt{3}, 0), C(-4, 2\sqrt{3}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{PB} = (0, 2\sqrt{3},$

$-2\sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (-4, 0, 0), \overrightarrow{OP} = (0, 0, 2\sqrt{3})$.

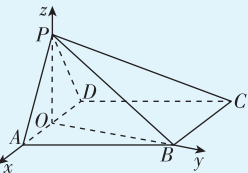
设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}z = 0, \\ -4x = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } y = 1, \text{ 得 } z = 1, x = 0, \text{ 所以 } \mathbf{n} = (0, 1,$$

$$1), \text{ 所以点 } O \text{ 到平面 } PBC \text{ 的距离 } d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$





10. A 【解析】对于命题①,当 $\alpha \cap \beta = m$ 时,作平面 γ 垂直于交线 m ,则 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$;当 $\alpha // \beta$ 时,存在直线 m ,使得 $m \perp \alpha, m \perp \beta$,因此存在过直线 m 的平面 γ ,使得 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$,故①正确.

对于命题②,当 $\alpha // \beta$ 时,若 $\gamma // \alpha$,则 $\gamma // \beta$,此时不存在平面 γ ,使得 $\gamma // \alpha, \gamma \perp \beta$,故②错误.

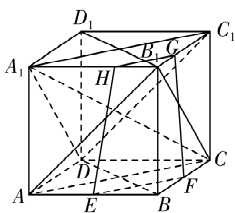
对于命题③,当 $\alpha \cap \beta = n$ 时,若 $l \perp \alpha$,则 l 与 β 不垂直,此时不存在直线 l ,使得 $l \perp \alpha, l \perp \beta$,故③错误.

对于命题④,当 $\alpha \cap \beta = m_1$ 时,存在 $l \not\subset \alpha$,且 $l \not\subset \beta$,使得 $l // m_1$,所以 $l // \alpha, l // \beta$;当 $\alpha // \beta$ 时,存在直线 l 满足 $l // \alpha, l // \beta$,故④正确. 故选 A.

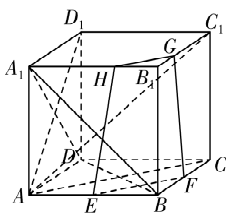
11. ABD 【解析】根据题意可知 E, F 分别为 AB, BC 的中点, H, G 分别为线段 A_1B_1, B_1C_1 上靠近点 B_1 的三等分点,则直线 AA_1 与直线 EH 有交点, A 错误;

如图①,连接 AB_1, B_1C , 因为 $AC // A_1C_1, AC \subset$ 平面 B_1AC , $A_1C_1 \not\subset$ 平面 B_1AC , 所以 $A_1C_1 //$ 平面 B_1AC , 同理可得 $A_1D //$ 平面 B_1AC , 又 $A_1C_1 \cap A_1D = A_1$, 且 $A_1C_1, A_1D \subset$ 平面 A_1C_1D , 所以平面 $A_1C_1D //$ 平面 B_1AC , 若平面 $EFGH //$ 平面 A_1C_1D , 则平面 $EFGH //$ 平面 B_1AC , 显然不符合题意, B 错误;

因为 E, F 分别为 AB, BC 的中点, 所以 $EF // AC$, 易知 $AC \perp BD, AC \perp BB_1$, 且 $BD \cap BB_1 = B, BD, BB_1 \subset$ 平面 BDD_1 , 所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1 , 又 $EF // AC$, 所以 $EF \perp$ 平面 BDD_1 , 因为 $EF \subset$ 平面 $EFGH$, 所以平面 $EFGH \perp$ 平面 BDD_1 , C 正确;



图①



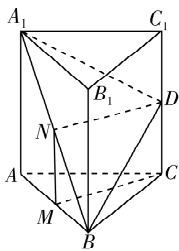
图②

如图②,连接 AD_1, AC_1, AC , 易知 $A_1D \perp AD_1, A_1D \perp C_1D_1$, 且 $AD_1 \cap C_1D_1 = D_1, AD_1, C_1D_1 \subset$ 平面 AC_1D_1 , 所以 $A_1D \perp$ 平面 AC_1D_1 , 因为 $AC_1 \subset$ 平面 AC_1D_1 , 所以 $A_1D \perp AC_1$, 同理可得 $BD \perp AC_1$, 又 $BD \cap A_1D = D, BD, A_1D \subset$ 平面 A_1BD , 所以 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD , 若平面 $EFGH \perp$ 平面 A_1BD , 注意到 $AC_1 \not\subset$ 平面 $EFGH$, 则 $AC_1 //$ 平面 $EFGH$, 又易知 $AC //$ 平面 $EFGH$, $AC \cap AC_1 = A, AC, AC_1 \subset$ 平面 ACC_1 , 所以平面 $ACC_1 //$ 平面 $EFGH$, 这和直线 CC_1 与直线 GF 相交矛盾, D 错误. 故选 ABD.

12. A 【解析】取 AB 中点 M, A_1B 中点 N , 连接 MN, DN, MC , 因为 $A_1D = BD$, 所以 $DN \perp A_1B$.

由 $DN \subset$ 平面 A_1BD , 平面 $A_1BD \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B$, 平面 $A_1BD \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 可得 $DN \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

在 $\text{Rt} \triangle A_1DN$ 中, 由勾股定理得 $DN =$





$$\sqrt{A_1D^2 - \left(\frac{1}{2}A_1B\right)^2} = 3.$$

易知 $MN \parallel AA_1$, $MN = \frac{1}{2}AA_1$, 因为 D 为 CC_1 中点, 所以 $CD \parallel AA_1$, $CD = \frac{1}{2}AA_1$, 所以 $MN \parallel CD$, $MN = CD$, 故四边形 $CDNM$ 为平行四边形, 则 $DN = CM = 3$, 且 $CM \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 由 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 知 $CM \perp AB$.

设 $\angle A_1DC_1 = \theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $DC = DC_1 = 4\cos \theta$, $AC = A_1C_1 = 4\sin \theta$,

易得 $\triangle A_1C_1D \cong \triangle BCD$, 所以 $\angle BDC = \angle A_1DC_1 = \theta$, 则 $BC = 4\sin \theta$, 由 $BC > CM$ 知 $\sin \theta > \frac{3}{4}$.

由勾股定理得 $AB = 2\sqrt{BC^2 - CM^2} = 2\sqrt{16\sin^2 \theta - 9}$, 于是三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V = 8\cos \theta \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{16\sin^2 \theta - 9} = 24\sqrt{(1 - \sin^2 \theta)(16\sin^2 \theta - 9)}$.

令 $x = \sin^2 \theta$, $x \in \left(\frac{9}{16}, 1\right)$, $f(x) = (1 - x)(16x - 9) = -16x^2 + 25x - 9 = -16\left(x - \frac{25}{32}\right)^2 + \frac{49}{64}$,

结合二次函数单调性可得, 当 $x \in \left(\frac{9}{16}, 1\right)$ 时, $f(x) \in \left(0, \frac{49}{64}\right]$, 则 $V \in (0, 21]$.

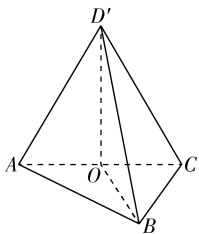
13. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{12}$ 【解析】在边长为 1 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 是正三角形.

当平面 $ACD' \perp$ 平面 ABC 时, 取 AC 的中点 O , 连接 OB, OD' , 如图①所示, 则 $OD' \perp AC$ (提示: 翻折问题, 在折痕同侧的位置关系不发生改变),

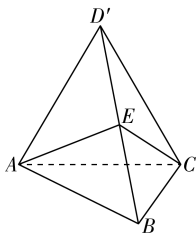
由平面 $ACD' \perp$ 平面 ABC , 平面 $ACD' \cap$ 平面 $ABC = AC$, $OD' \subset$ 平面 ACD' , 得 $OD' \perp$ 平面 ABC ,

又 $OB \subset$ 平面 ABC , 所以 $OD' \perp OB$, 而 $OD' = OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此

$$BD' = \sqrt{2}OD' = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$



图①



图②

当平面 $ABD' \perp$ 平面 BCD' 时, 取 BD' 的中点 E , 连接 AE, CE , 如图②所示, 由 $AB = AD' = CD' = CB = 1$, 得 $AE \perp BD'$, $CE \perp BD'$, 则 $\angle AEC$ 是二面角 $A-BD'-C$ 的平面

关键点



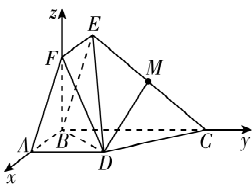
角,又平面 $ABD' \perp$ 平面 BCD' , 所以 $\angle AEC = \frac{\pi}{2}$, 又 $AE \cap CE = E, AE, CE \subset$ 平面 ACE , 所以 $BD' \perp$ 平面 ACE .

易知 $\triangle ABD' \cong \triangle CBD'$, 则 $AE = CE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BD' = 2BE = 2\sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{2}$, 又 $S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2}AE \cdot CE = \frac{1}{4}$, 所以三棱锥 $D'-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3}S_{\triangle AEC} \cdot BD' = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

14. (1) 【证明】因为 $AF = \sqrt{2}BF = 2\sqrt{2}$, $AB = 2$, 所以 $AF^2 = BF^2 + AB^2$, 故 $AB \perp BF$.

因为平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABEF \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $BF \subset$ 平面 $ABEF$, 所以 $BF \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BF \perp CD$.

(2) 【解】由(1)可得 $BF \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $AB, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BF \perp AB, BF \perp BC$, 又 $BA \perp BC$, 故以 B 为坐标原点, BA, BC, BF 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0), D(2, 2, 0), C(0, 4, 0), F(0, 0, 2), A(2, 0, 0)$,



所以 $\overrightarrow{BF} = (0, 0, 2), \overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$, 因为四边形 $ABEF$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel AB$, 故 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} = (-2, 0, 2)$, 则 $E(-2, 0, 2)$, 所以 $M(-1, 2, 1)$, 连接 DM , 则 $\overrightarrow{DM} = (-3, 0, 1), \overrightarrow{BD} = (2, 2, 0), \overrightarrow{BE} = (-2, 0, 2)$.

设平面 BDE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

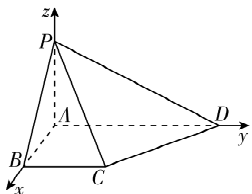
$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 2x + 2y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = -2x + 2z = 0, \end{cases} \text{令 } x = 1, \text{ 得 } y = -1, z = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (1, -1, 1),$$

故点 M 到平面 BDE 的距离为 $\left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DM}}{\mathbf{n}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15. (1) 【证明】因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AB$, 又 $AB \perp AD, PA, AD \subset$ 平面 $PAD, PA \cap AD = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAD , 又 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(2) 【解】不存在, 理由如下.

以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图.



设 $AB = t, AG = m$, 则 $AD = 3 - AB = 3 - t$, 其中 $0 < t < 3, 0 < m < 3 - t$,



则 $A(0,0,0), B(t,0,0), D(0,3-t,0), P(0,0,t), G(0,m,0)$.

由 $CD=\sqrt{2}, \angle CDA=45^\circ$, 可得 $C(1,2-t,0)$, 故 $\overrightarrow{GC}=(1,2-t-m,0), \overrightarrow{GD}=(0,3-t-m,0), \overrightarrow{PG}=(0,m,-t)$.

假设存在点 G , 使得点 G 到点 P, B, C, D 的距离都相等, 则 $|\overrightarrow{PG}|=|\overrightarrow{BG}|=|\overrightarrow{CG}|=|\overrightarrow{DG}|$.

由 $|\overrightarrow{CG}|^2=|\overrightarrow{GD}|^2$, 可得 $1^2+(2-t-m)^2=(3-t-m)^2$, 化简得 $t=2-m$ (提示: 将几何关系转化为代数关系).

又 $|\overrightarrow{PG}|^2=|\overrightarrow{GD}|^2$, 所以 $m^2+(-t)^2=(3-t-m)^2$, 代入 $t=2-m$, 得 $2m^2-4m+3=0$, 其判别式 $\Delta=(-4)^2-4\times 2\times 3=-8<0$, 故方程无解, 即线段 AD 上 (不包含端点) 不存在点 G , 使得点 G 到点 P, B, C, D 的距离都相等.

16. (1) 【证明】 因为平面 $ACED \perp$ 平面 ABC , 平面 $ACED \cap$ 平面 $ABC=AC, AC \perp CE, CE \subset$ 平面 $ACED$, 所以 $CE \perp$ 平面 ABC , 又 $CE \subset$ 平面 BCE , 所以平面 $BCE \perp$ 平面 ABC .

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, F 为 BC 的中点, 所以 $AF \perp BC$.

又平面 $BCE \cap$ 平面 $ABC=BC, AF \subset$ 平面 ABC , 所以 $AF \perp$ 平面 BCE .

(2) 【解】 因为 $AF \perp$ 平面 $BCE, FG \subset$ 平面 BCE , 所以 $AF \perp FG$, 由 (1) 分析知 $CE \perp$ 平面 ABC , 又 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $CE \perp BC$.

因为 $CE=BC=2$, 所以 $BE=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}, BG=\frac{2}{3}BE=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,

$AF=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\sqrt{3}$, 易知 $\angle EBC=45^\circ$,

在 $\triangle BFG$ 中, $GF = \sqrt{BG^2+BF^2-2BG \cdot BF \cos 45^\circ} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 1^2 - 2 \times \frac{4\sqrt{2}}{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

连接 CG (图略), 设点 C 到平面 AGF 的距离为 h , 则 $V_{C-AGF} = V_{G-AFC}$ (提示: 等体积法),

故 $\frac{1}{3} S_{\triangle AGF} \cdot h = \frac{1}{3} S_{\triangle AFC} \cdot \frac{2}{3} CE$, 则 $h = \frac{S_{\triangle AFC} \cdot \frac{2}{3} CE}{S_{\triangle AGF}} = \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{2}{3} \times 2}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{3} \times \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, 故 $h = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

设直线 AC 与平面 AFG 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{h}{AC} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$.

所以直线 AC 与平面 AFG 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$.



综合提分练

1. BD 必刷考点 ①线面平行、面面平行、线面垂直、面面垂直的判定

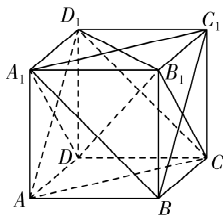
【解析】 对于 A, 假设 $BC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 因为 $B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $BC_1 \perp B_1C_1$, 显然不符合题意, 故 A 错误;



对于 B, 由正方体的性质可知 $BC_1 \parallel AD_1$, 又 $AD_1 \subset$ 平面 ACD_1 , $BC_1 \not\subset$ 平面 ACD_1 , 所以 $BC_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 故 **B 正确**;

对于 C, 易知直线 A_1C_1 与直线 B_1D_1 相交于一点, 显然平面 A_1C_1B 与平面 B_1D_1C 不可能平行, 故 **C 错误**;

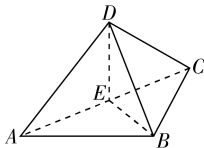
对于 D, 连接 A_1D , 由正方体的性质可得 $BC_1 \perp B_1C$, $A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C , 因为 $BC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $A_1B_1 \perp BC_1$, 又 $B_1C \cap A_1B_1 = B_1$, $B_1C, A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1CD , 所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD , 所以 $BC_1 \perp$ 平面 B_1CD , 又 $BC_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以平面 $A_1C_1B \perp$ 平面 B_1CD , 故 **D 正确**. 故选 BD.



2. D 必刷考点 ⊙ 线面垂直的判定定理、线面垂直的性质

【解析】 取 AC 的中点 E , 连接 BE, DE, BD , 如图所示, 易知 $BE \perp AC, DE \perp AC$, 因为平面 $ACD \cap$ 平面 $ABC = AC, DE \subset$ 平面 $ACD, BE \subset$ 平面 ABC , 所以 $\angle BED$ 即为直二面角 $D-AC-B$ 的平面角, 即 $\angle BED = \frac{\pi}{2}$.

因为 $BE \perp AC, BE \perp DE, AC \cap DE = E, AC, DE \subset$ 平面 ADC , 所以 $BE \perp$ 平面 ADC , 又 $AD, DC \subset$ 平面 ADC , 所以 $BE \perp DC, BE \perp AD$.



对于 A, 若 $AB \parallel CD$, 则 $BE \perp AB$, 显然不符合题意, 故 **A 错误**;

对于 B, 若 $AD \parallel BC$, 则 $BE \perp BC$, 显然不符合题意, 故 **B 错误**;

对于 D, 因为 $AC \perp DE, AC \perp BE, BE \cap DE = E, BE, DE \subset$ 平面 BDE , 所以 $AC \perp$ 平面 BDE , 又因为 $BD \subset$ 平面 BDE , 所以 $AC \perp BD$, 故 **D 正确**;

对于 C, 假设 $AB \perp CD$ 成立, 因为 $AB \perp BC, BC \cap CD = C, BC, CD \subset$ 平面 BCD , 所以 $AB \perp$ 平面 BCD , 又 $BD \subset$ 平面 BCD , 所以 $AB \perp BD$, 此时在 $\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$, 则 AD 为斜边, 因此 $AD > AB$, 而折叠前后 AD, AB 长度不变, 这与 $AD = AB$ 矛盾, 因此假设不成立, 故 **C 错误**. 故选 D.

3. BCD 必刷考点 ⊙ 线面、面面垂直的判定与性质

【解析】 连接 CM (图略), 由题意可知, 点 M 是 BD 的中点, 所以点 A, M, C 三点共线, 所以点 $C \in AM$, 又 $AM \subset$ 平面 AMN , 所以 $CF \cap$ 平面 $AMN = C$, 则直线 CF 与平面 AMN 不平行, 故 **A 错误**;

因为 $AD \perp$ 平面 $ABF, BF \subset$ 平面 ABF , 所以 $AD \perp BF$, 又 $BF \perp AF, AD \cap AF = A, AD, AF \subset$ 平面 ADF , 所以 $BF \perp$ 平面 ADF , 又 $BF \subset$ 平面 BDF , 所以平面 $BDF \perp$ 平面 ADF , 又平面 $ADF \cap$ 平面 $BDF = DF, AN \perp DF, AN \subset$ 平面 ADF , 所以 $AN \perp$ 平面 DBF , 故 **B 正确**;

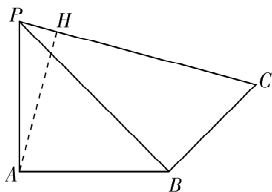


由 $AN \perp$ 平面 DBF , $DB \subset$ 平面 DBF , 所以 $AN \perp DB$, 因为轴截面 $ABCD$ 为正方形, 点 M 是 BD 的中点, 所以 $AM \perp DB$, 又 $AM \cap AN = A$, 且 $AM, AN \subset$ 平面 AMN , 所以 $DB \perp$ 平面 AMN , 故 **C** 正确;

因为 $DB \perp$ 平面 AMN , $MN \subset$ 平面 AMN , 所以 $DB \perp MN$, 因为 $EF \parallel$ 平面 AMN , $EF \subset$ 平面 DEF , 平面 $DEF \cap$ 平面 $AMN = MN$, 所以 $EF \parallel MN$, 所以 $DB \perp EF$, 由 B 分析可知 $BF \perp$ 平面 ADF , 又 $DF \subset$ 平面 ADF , 所以 $BF \perp DF$, 连接 MF (图略), 又 E 是 MB 的中点, 可得 $BF = MF = \frac{1}{2}BD$, 且 $BD = \sqrt{2}AB$, 所以 $BF = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$, 则 $AF = BF$, 即 F 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 故 **D** 正确. 故选 BCD.

4. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 必刷题型 ⊙ 利用线面垂直求解几何体动点问题

【解析】因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp BC$, 又 $AB \perp BC$, $AB \cap PA = A$, $AB, PA \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp$ 平面 PAB , 又 $PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp PB$.



因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp AB$,

则 $PB = 2\sqrt{3}$, $PC = 4$, 所以 $\angle APB = \frac{\pi}{4}$, $\angle BPC = \frac{\pi}{6}$.

如图, 将 $\triangle PBC$ 沿着 PB 转动到 P, A, B, C 四点共面, 此时

$$\sin \angle APC = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

过点 A 作 $AH \perp PC$ 于 H , 则 $AE + DE$ 的最小值为 $AH = PA \cdot$

$$\sin \angle APC = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

5. 必刷题型 ⊙ 空间中的线、面位置关系, 几何体的体积

(1) 【证明】如图①, 连接 AC, BD 交于点 I , 连接 FI, HF , 则 I 为 AC, BD 的中点.

易知平面 $ABCD \parallel$ 平面 $EFGH$, 又平面 $BDHF \cap$ 平面 $ABCD = BD$, 平面 $BDHF \cap$ 平面 $EFGH = HF$, 所以 $BD \parallel HF$.

因为 $\frac{HG}{DC} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{FH}{BD} = \frac{1}{2}$.

因为 I 为 BD 的中点, 所以 $FH = DI = \frac{1}{2}BD$, 所以四边形 $DHFI$ 为平行四边形, 故 $HD \parallel FI$.

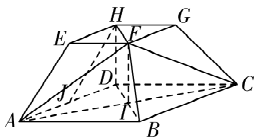
又 $HD \not\subset$ 平面 ACF , $FI \subset$ 平面 ACF , 所以 $HD \parallel$ 平面 ACF .

(2) 【证明】取 DA 的中点为 J , 连接 HJ , 如图①.

易知 $EH = HG = 2$, $AJ = \frac{1}{2}AD = 2$,

$EH \parallel AJ$, 所以四边形 $AJHE$ 为平行

四边形, 所以 $HJ = AE = 2\sqrt{2}$, 又 $DJ = HD = 2$, 所以 $DH^2 + DJ^2 = HJ^2$, 所以 $HD \perp AD$.



图①



由(1)知 $AI=IC$, 又 $FA=FC$, 所以 $FI \perp AC$.

因为 $FI \parallel HD$, 所以 $HD \perp AC$, 又 $AC, AD \subset$ 平面 $ABCD$, $AC \cap AD=A$, 所以 $HD \perp$ 平面 $ABCD$.

(3)【解】菱形 $ABCD$ 的面积 $S_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin \angle BAD = 16 \sin \angle BAD$, 由四棱台 $ABCD-EFGH$ 性质及 $EH = \frac{1}{2}AD$, 可得

菱形 $EFGH$ 的面积 $S_1 = \frac{1}{4}S_2 = 4 \sin \angle BAD$, 设四棱台 $ABCD-EFGH$ 的高为 h ,

则四棱台 $ABCD-EFGH$ 的体积 $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h =$

$$\frac{1}{3} \times 28 \sin \angle BAD \times 2 = \frac{28\sqrt{3}}{3}, \text{解得 } \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $FA > FB$, $IA = \sqrt{FA^2 - FI^2}$, $IB = \sqrt{FB^2 - FI^2}$, 所以 $IA > IB$, 故

$$\tan \angle IAB = \frac{IB}{IA} < 1, \text{从而 } \angle IAB < \frac{\pi}{4}, \text{所以 } \angle BAD \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{所以}$$

$$\angle BAD = \frac{\pi}{3}.$$

方法一:如图②,取 AB 的中点为 K ,连接 DK, DG , 易知 DC, DH, DK 两两垂直,以 D 为坐标原点,以 $\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $D(0,0,0), A(2\sqrt{3}, -2, 0), G(0, 2, 2), C(0, 4, 0), \overrightarrow{DA} = (2\sqrt{3}, -2, 0), \overrightarrow{DG} = (0, 2, 2), \overrightarrow{DC} = (0, 4, 0)$.

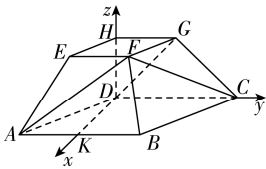
设平面 AFG 即平面 $ADGF$ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DG} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2\sqrt{3}x - 2y = 0, \\ 2y + 2z = 0, \end{cases} \text{令 } y = \sqrt{3}, \text{得 } \mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}).$$

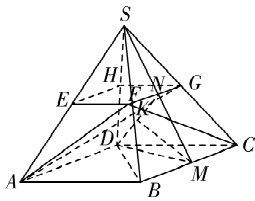
从而点 C 到平面 AFG 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$, 因

为 $BC \parallel AD, BC \not\subset$ 平面 $AFG, AD \subset$ 平面 AFG , 所以 $BC \parallel$ 平面 AFG , 所以直线 BC 到平面 AFG 的距离即为点 C 到平面 AFG

的距离, 为 $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.



图②



图③

方法二:如图③,延长 BF, CG, AE, DH 交于点 S , 取 BC 的中点为 M , 连接 SM 交 FG 于点 N , 连接 DM, DN, BD, AG , 易知 FG, SM 的中点均为 $N, BC \perp DM$.

由(2)知, $HD \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp SD$. 因为 $FG \parallel BC, BC \perp DM$, 所以 $FG \perp DM, FG \perp SD$.

又 $DM, SD \subset$ 平面 $SDM, DM \cap SD = D$, 所以 $FG \perp$ 平面 SDM .

又 $FG \subset$ 平面 AFG , 所以平面 $AFG \perp$ 平面 SDM .

过点 M 作 $MK \perp DN$ 于点 K , 因为平面 $AFG \cap$ 平面 $SDM = DN, MK \subset$ 平面 SDM , 所以 $MK \perp$ 平面 AFG , 故 MK 为点 M 到平面



AFG 的距离. 易知 $BC \parallel$ 平面 AFG , 所以 MK 即为直线 BC 到平面 AFG 的距离.

在 $\text{Rt}\triangle SDM$ 中, $ND=NM$, 所以点 M 到 DN 的距离 (MK) 等于点 D 到 NM 的距离.

易知 $SD=4$, $DM=2\sqrt{3}$, $SM=2\sqrt{7}$, 设点 D 到 NM 的距离为 d ,

则 $S_{\triangle SDM} = \frac{1}{2} \times DS \times DM = \frac{1}{2} \times SM \times d$, 所以 $4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{7}d$, 解得

$d = \frac{4\sqrt{21}}{7}$, 所以直线 BC 到平面 AFG 的距离为 $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

真题风向练

6. BD 命题点 空间线线、线面的位置关系

【解析】对于 A, 由正三棱柱的性质可知, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 又 $AD \subset$ 平面 ABC , 则 $AA_1 \perp AD$, 假设 $AD \perp A_1C$, 又 $AA_1 \cap A_1C = A_1$, $AA_1, A_1C \subset$ 平面 AA_1C_1C , $\therefore AD \perp$ 平面 AA_1C_1C , 矛盾, $\therefore AD$ 与 A_1C 不垂直, 故 A 错误.

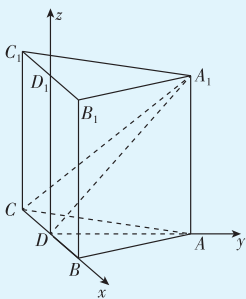
对于 B, $\because AA_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore AA_1 \perp BC$. 又 $AD \perp BC$, $AD \cap AA_1 = A$, $AD, AA_1 \subset$ 平面 AA_1D , $\therefore BC \perp$ 平面 AA_1D , 又 $B_1C_1 \parallel BC$, $\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D , 故 B 正确.

对于 C, $AB \parallel A_1B_1$, $AB, A_1B_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $AD \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AD \cap AB = A$, $\therefore AD$ 与 A_1B_1 异面, 故 C 错误.

对于 D, $\because CC_1 \parallel AA_1$, $AA_1 \subset$ 平面 AA_1D , $CC_1 \not\subset$ 平面 AA_1D , $\therefore CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D , 故 D 正确. 故选 BD.

一题多解 如图, 取 B_1C_1 的中

点 D_1 , 由正三棱柱的性质知 BC, AD, DD_1 两两垂直, 则建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h , 底面边长为 2, 则 $D(0, 0, 0)$, $A(0, \sqrt{3}, 0)$, $A_1(0, \sqrt{3}, h)$, $B(1, 0, 0)$, $B_1(1, 0, h)$, $C(-1, 0, 0)$, $C_1(-1, 0, h)$.



对于 A, 由于 $\overrightarrow{AD} = (0, -\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{A_1C} = (-1, -\sqrt{3}, -h)$,

则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \times (-1) + (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) + 0 \times (-h) = 3 \neq 0$,

$\therefore AD$ 与 A_1C 不垂直, 故 A 错误;

对于 B, 由于 $\overrightarrow{B_1C_1} = (-2, 0, 0)$, 平面 AA_1D 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB} = (1, 0, 0)$, 又 $\overrightarrow{B_1C_1} \parallel \overrightarrow{DB}$, $\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D , 故 B 正确;

对于 C, 由于 $\overrightarrow{A_1B_1} = (1, -\sqrt{3}, 0)$, 而 $\overrightarrow{AD} = (0, -\sqrt{3}, 0)$, 显然 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 不共线, $\therefore AD$ 与 A_1B_1 不平行, 故 C 错误.



第5节 空间向量的应用——空间角



题型上分练

1. C 【解析】如图,以点 D 为坐标原点

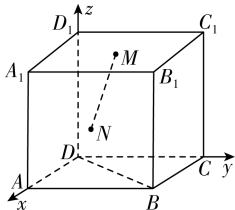
建立空间直角坐标系,设正方体棱长为 1, 则 $D(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$,

$M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $N(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 故

$\overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{BD} = (-1, -1, 0)$, 所以 $|\cos \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD} \rangle| =$

$\frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 所以异面直线 BD 与 MN 所成角的

余弦值为 $\frac{1}{2}$. 故选 C.



2. C 【解析】本题中的两条异面直线平移之后位置不好确定, 所以优先考虑建系法.

根据题意, 以点 A 为坐标原点, AB, AD 所在直线分别为 x, z 轴, 过点 A 且垂直于平面 ABD 的直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 P 是弧 AB 的中点, 所以 $\angle BAP = \frac{\pi}{4}$, 又 $AB = AD = 2$, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(2,$

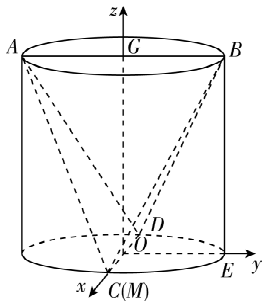
$0, 0)$, $D(0, 0, 2)$, $P(1, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{BD} = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AP} = (1,$

$1, 0)$.

所以 $\cos \langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AP} \rangle = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{AP}|} = \frac{-2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, 即 $\langle \overrightarrow{BD},$

$\overrightarrow{AP} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 所以异面直线 AP 与 BD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$. 故选

3. D 【解析】如图, 设下底面圆心为 O , 上底面圆心为 G , 作 $OE \parallel AB$, $OM \perp OE$, 分别交底面圆于点 E, M , 故以 O 为原点, OM, OE, OG 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0, -1, 2)$, $B(0, 1, 2)$, 设 $C(x, y, 0)$, $x > 0$, 则 $D(-x, -y, 0)$.



易知底面圆方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (x, y + 1,$



-2),

$$\text{故 } \cos \angle CAB = \frac{y+1}{\sqrt{x^2+4+(y+1)^2}}, \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4+(y+1)^2}}.$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{x^2+4+(y+1)^2} \times \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4+(y+1)^2}} = \sqrt{x^2+4}.$$

设点 D 到平面 ABC 的距离为 d , 平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} =$

$$(x_0, y_0, z_0), \text{ 故有 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} 2y_0 = 0, \\ xx_0 + (y+1)y_0 - 2z_0 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } z_0 = 1, \text{ 解得 } x_0 = \frac{2}{x}, y_0 = 0, \text{ 故 } \mathbf{n} = \left(\frac{2}{x}, 0, 1 \right).$$

又 $\overrightarrow{AD} = (-x, 1-y, -2)$, 由点到平面的距离公式得 $d =$

$$\frac{|-2-2|}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}, \text{ 已知四面体 } ABCD \text{ 的体积为 } \frac{4}{3}, \text{ 所以}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \times \sqrt{x^2+4} \times \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}, \text{ 解得 } x = 1, \text{ 易得 } y = 0.$$

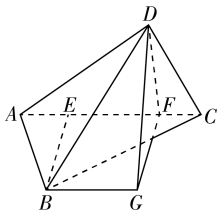
故 $C(1, 0, 0), D(-1, 0, 0), \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2), \overrightarrow{BD} = (-1, -1, -2)$, 设直线 AC 与 BD 所成角为 θ , 故有 $\cos \theta = \frac{|-1-1+4|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} =$

$\frac{1}{3}$. 故选 D.

4. $\frac{20\sqrt{13}}{13}$ 【解析】由题意得 $\triangle ADC$,

$\triangle ABC$ 均为直角三角形, 故 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$.

如图, 分别作 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 斜边上的高 BE, DF , 则在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 Rt



$\triangle ACD$ 中, 根据等面积法可知 $BE = DF = \frac{12}{\sqrt{13}}$, 故 $AE = CF =$

$$\sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{16 - \frac{144}{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}, \text{ 故 } EF = AC - AE - CF = 2\sqrt{13} -$$

$$\frac{8}{\sqrt{13}} - \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}.$$

在平面 ABC 中, 过点 B 作 $BG \parallel EF$, 且 $BG = EF$, 连接 GF, DG ,

故四边形 $BEFG$ 是平行四边形, 则 $BG = EF = \frac{10}{\sqrt{13}}$, 且

$\angle DBG = 60^\circ$.

因为四边形 $BEFG$ 是平行四边形, 且 $BE \perp AC$, 所以四边形 $BEFG$ 为矩形, 所以 $BG \perp FG$.

因为 $BG \parallel EF, EF \perp DF$, 所以 $BG \perp DF$, 又 $DF \cap FG = F, DF, FG \subset \text{平面 } DFG$, 所以 $BG \perp \text{平面 } DFG$, 因为 $DG \subset \text{平面 } DFG$,

所以 $BG \perp DG$, 又 $\angle DBG = 60^\circ$, 所以 $BD = 2BG = 2 \times \frac{10}{\sqrt{13}} =$

$$\frac{20\sqrt{13}}{13}.$$



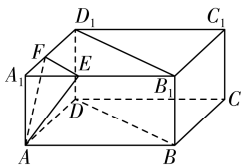
一题多解

因为在四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp DC$, $AB \perp BC$, $AB=CD=4$, $AD=BC=6$, 所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 4^2 = 20$, 且 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{13}$.

又异面直线 BD 与 AC 所成的角为 60° , 所以 $|\cos \langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{20}{2\sqrt{13} |\overrightarrow{BD}|} = \frac{1}{2}$, 所以 $|\overrightarrow{BD}| = \frac{20\sqrt{13}}{13}$, 即 $BD = \frac{20\sqrt{13}}{13}$.

5. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ 【解析】设该棱柱的高为 h , 如图, 沿该棱柱表面从点 A

经过棱 BB_1 上一点 E 到达点 C_1 的最短距离为 $\sqrt{(2+2)^2 + h^2} > 4 > \sqrt{13}$ (提示: 结合展开图理解, 展开平面图中点 A, E, C_1 三点共线时, 距离最短), 不满足题意.



则从点 A 经过棱 A_1B_1 上的一点 E 到达点 C_1 的最短距离为 $\sqrt{2^2 + (2+h)^2} = \sqrt{13}$, 解得 $h=1$.

因为 $A_1E \parallel C_1D_1$, 所以 $\frac{A_1E}{C_1D_1} = \frac{1}{3}$, 所以 $A_1E = \frac{1}{3}C_1D_1 = \frac{2}{3}$.

连接 B_1D_1 , 过点 E 作 B_1D_1 的平行线与 A_1D_1 交于点 F , 则 $\angle AEF$ 或其补角就是异面直线 AE 与 BD 所成角, 连接 AF , 则

$$AE = AF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}, EF = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 所以 } \cos \angle AEF =$$

$$\frac{\frac{1}{2}EF}{AE} = \frac{\sqrt{26}}{13}, \text{ 则异面直线 } AE \text{ 与 } BD \text{ 所成角的余弦值为}$$

$$\frac{\sqrt{26}}{13}.$$

6. (1) 【证明】设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 则 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一组基底向量, 且 $\overrightarrow{A_1C} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \mathbf{c}$. 因为 $AB = AD = AA_1 = \sqrt{2}$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = 2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 1$, 可得 $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$, $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BB_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = 0$, 即 $A_1C \perp BD$, $A_1C \perp BB_1$, 且 $BD \cap BB_1 = B$, $BD, BB_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 , 所以 $A_1C \perp$ 平面 BDD_1B_1 .

(2) 【解】由 (1) 得 $\overrightarrow{A_1C} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, 且 $\overrightarrow{BC_1} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, 则 $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^2 = 2$, $|\overrightarrow{A_1C}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 4$, 即 $|\overrightarrow{A_1C}| = 2$,



$$|\overrightarrow{BC_1}|^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 6, \text{ 即 } |\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{6}.$$

$$\text{设 } \overrightarrow{A_1C} \text{ 与 } \overrightarrow{BC_1} \text{ 的夹角为 } \theta, \text{ 则 } |\cos \theta| = \frac{|\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{A_1C}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 所以异面直线 } A_1C \text{ 和 } BC_1 \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

7. 【解】(几何法)(1) 连接 DE .

折叠前: $\because EF \parallel AB, AB \perp AD, \therefore EF \perp AD$.

折叠后: $EF \perp AF, EF \perp DF$.

$\because$ 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ECDF$, 交线为 EF ,
由 $BE \perp EF, BE \subset$ 平面 $ABEF, \therefore BE \perp$ 平面 $ECDF$, 又 $CF \subset$ 平面 $ECDF, \therefore BE \perp$

CF , 又 $CF \perp BD, BE \cap BD = B, \therefore CF \perp$ 平面 BDE , 又 $DE \subset$ 平面 $BDE, \therefore CF \perp DE, \therefore \angle DEF + \angle FDE = \angle DEF + \angle EFC = 90^\circ$,

$\therefore \angle FDE = \angle EFC$, 此时 $\triangle FEC$ 与 $\triangle DFE$ 相似, 故 $\frac{DF}{EF} = \frac{EF}{CE}$, 即

$$DF \cdot EC = EF^2.$$

设 $BE = t (0 < t < 8)$, 则 $(9-t)(8-t) = 12$, 解得 $t = 5$ 或 $t = 12$ (舍去), $\therefore BE = 5$.

(2) 过 C 作 EF 的平行线, 交 DF 于点 G , 连接 AG , 由 $CG \parallel EF \parallel BA$, 且 $CG = EF = BA$, 得四边形 $CGAB$ 是平行四边形, 故 $BC \parallel AG, \therefore \angle DAG$ 即为异面直线 BC 与 AD 所成的角.

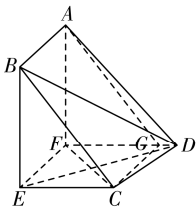
设 $BE = t (0 < t < 8)$, $\tan \angle DAG = \tan (\angle DAF - \angle GAF) =$

$$\frac{\tan \angle DAF - \tan \angle GAF}{1 + \tan \angle DAF \tan \angle GAF} = \frac{\frac{9-t}{t} - \frac{8-t}{t}}{1 + \frac{9-t}{t} \cdot \frac{8-t}{t}} = \frac{1}{2\left(t + \frac{36}{t}\right) - 17} \leq$$

$$\frac{1}{2 \times 2 \sqrt{36} - 17} = \frac{1}{7}, \text{ 当且仅当 } t = 6 \text{ 时取等号,}$$

$\therefore \angle DAG$ 正切值的最大值为 $\frac{1}{7}$, 此时余弦值有最小值 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$,

$\therefore$ 异面直线 BC 与 AD 所成角的余弦值的最小值为 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$.



一题多解 (建系法) 折叠前: $\because EF \parallel AB, AB \perp AD$,

$\therefore EF \perp AD$,

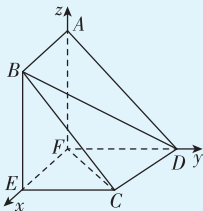
折叠后: $EF \perp AF, EF \perp DF$,

$\because$ 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ECDF$, 平面 $ABEF \cap$ 平面 $ECDF = EF$,
 $AF \perp EF, AF \subset$ 平面 $ABEF$,

$\therefore AF \perp$ 平面 $ECDF$, 又 $DF \subset$ 平面 $ECDF, \therefore AF \perp DF$,

$\therefore AF, EF, DF$ 两两垂直,

$\therefore$ 以 F 为坐标原点, FE, FD, FA 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



设 $BE = t (0 < t < 8)$, 则 $F(0, 0, 0), D(0, 9-t, 0), C(2\sqrt{3}, 8-t, 0), B(2\sqrt{3}, 0, t), A(0, 0, t)$.



$$(1) \vec{CF} = (-2\sqrt{3}, t-8, 0), \vec{BD} = (-2\sqrt{3}, 9-t, -t),$$

$$\therefore CF \perp BD, \therefore \vec{CF} \cdot \vec{BD} = 12 + (t-8)(9-t) = 0,$$

解得 $t=5$ 或 $t=12$ (舍去), $\therefore BE$ 的长为 5.

$$(2) \vec{BC} = (0, 8-t, -t), \vec{AD} = (0, 9-t, -t),$$

设异面直线 BC 与 AD 所成角为 θ , 则

$$\cos \theta = |\cos \langle \vec{BC}, \vec{AD} \rangle| = \frac{|\vec{BC} \cdot \vec{AD}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{AD}|}$$

$$= \frac{(8-t)(9-t) + t^2}{\sqrt{(8-t)^2 + t^2} \cdot \sqrt{(9-t)^2 + t^2}}$$

$$= \frac{2t^2 - 17t + 72}{\sqrt{(2t^2 - 17t + 72)^2 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{(2t^2 - 17t + 72)^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(2t + \frac{72}{t} - 17\right)^2}}},$$

$$\therefore 2t + \frac{72}{t} - 17 \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{72}{t}} - 17 = 7, \text{ 当且仅当 } 2t = \frac{72}{t}, \text{ 即 } t =$$

$$6 \text{ 时等号成立, } \therefore (\cos \theta)_{\min} = \frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\therefore \text{异面直线 } BC \text{ 与 } AD \text{ 所成角的余弦值的最小值为 } \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

8. B 【解析】如图所示, 把 PA, PB, PC 放在正方体中, 满足 PA, PB, PC 中每两条的夹角均为 60° .

建立如图所示的空间直角坐标系, 设正方体棱长为 1, 则 $P(1, 0, 0), C(0, 0, 1), A(1, 1, 1), B(0, 1, 0)$, 所以

$$\vec{PC} = (-1, 0, 1), \vec{PA} = (0, 1, 1), \vec{PB} = (-1, 1, 0).$$

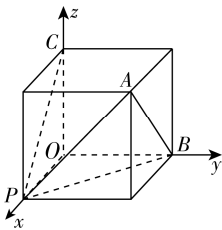
$$\text{设平面 } PAB \text{ 的法向量 } \mathbf{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{PA} = y + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PB} = -x + y = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } y = 1, z = -1, \text{ 所以 } \mathbf{n} = (1, 1, -1), \text{ 所以 } \cos \langle \vec{PC}, \mathbf{n} \rangle =$$

$$\frac{\vec{PC} \cdot \mathbf{n}}{|\vec{PC}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{设直线 } PC \text{ 与平面 } PAB \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{PC}, \mathbf{n} \rangle| =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 所以 } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 B.}$$

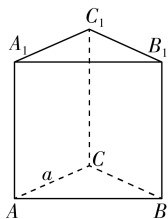


9. A 【解析】可以在一个几何体中找到符合题意的线和面进行分析.

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC, AC = BC$, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

平面 $ABC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AB$, AC, BC 在平面 ABB_1A_1 内的投影在直线 AB 上, 则直线

AC, BC 与平面 ABB_1A_1 所成的角都是 $\frac{\pi}{4}$.





由 $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC 得 $AC \perp CC_1$, 又 $AC \perp BC$, $CC_1 \cap BC = C$, $CC_1, BC \subset$ 平面 BB_1C_1C , 则 $AC \perp$ 平面 BB_1C_1C .
不妨设直线 AC 为直线 a , 平面 ABB_1A_1 为平面 α , 直线 b 在平面 BB_1C_1C 内, 此时满足直线 a 与平面 α 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 直线 b 与直线 a 垂直.

当 b 与 BC 平行或重合时, 直线 b 与平面 α 所成的角取得最大值, 最大值为 $\frac{\pi}{4}$;

当 b 与 CC_1 平行或重合时, 直线 b 与平面 α 所成的角取得最小值, 最小值为 0.

所以直线 b 与平面 α 所成角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (提示: 注

意线面角的范围为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). 故选 A.

10. D 【解析】已知圆台两个底面半径分别为 $r=4, R=2$, 且圆台存在内切球, 根据圆台内切球性质得圆台母线长 $l=r+R=4+2=6$.

设圆台的高为 h , 则 $h^2 + (r-R)^2 = l^2$, 即 $h^2 = 6^2 - 2^2 = 32$, 即 $h = 4\sqrt{2}$.

易知 $O_2B \perp O_1O_2$, 又 $O_1A \perp O_2B$, $O_1A \cap O_1O_2 = O_1$, $O_1A, O_1O_2 \subset$ 平面 O_1O_2A , 所以 $O_2B \perp$ 平面 O_1O_2A , 所以 $\angle O_2AB$ 即为直线 AB 与平面 O_1O_2A 所成的角.

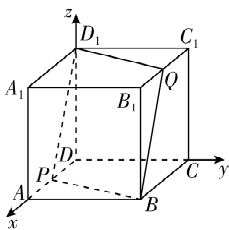
点 B 到平面 O_1O_2A 的距离 $|O_2B| = 2$, $|AB| =$

$\sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}$, 所以 $\sin \angle O_2AB = \frac{|O_2B|}{|AB|} = \frac{2}{2\sqrt{13}} =$

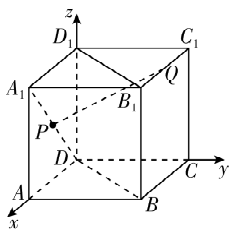
$\frac{\sqrt{13}}{13}$ (关键: 利用几何关系找到线面角).

11. AB 【解析】以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0)$, $D_1(0, 0, 2)$, $B(2, 2, 0)$, $Q(1, 2, 2)$.

对于 A, 如图①, 顺次连接 P, B, Q, D_1 四点, 当 P 为 AD 的中点时, 则 $P(1, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{PB} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{D_1Q} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{D_1Q}$, 所以四边形 $PBQD_1$ 为平行四边形, 故 A 正确.



图①



图②

对于 B, 如图②, 当 P 为 A_1D_1 的中点时, $P(1, 0, 1)$, $\overrightarrow{DB} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{PQ} = (0, 2, 1)$. 设平面 BDD_1B_1 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则

$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DD_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+y=0, \\ z=0, \end{cases}$ 令 $x = -1$, 则



$y=1, n=(-1, 1, 0)$, 则直线 PQ 与平面 BDD_1B_1 所成角的正

弦值为 $|\cos \langle \overrightarrow{PQ}, n \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |n|} \right| = \frac{2}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 故 **B**

正确.

对于 C, 可设 $P(x_1, 0, z_1), x_1, z_1 \in [0, 2]$, 则 $\overrightarrow{PQ} = (1-x_1, 2, 2-z_1)$, 又 $A_1(2, 0, 2), C(0, 2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{A_1C} = (-2, 2, -2)$, 所以 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{A_1C} = -2(1-x_1) + 4 - 2(2-z_1) = 2x_1 + 2z_1 - 2$. 令 $2x_1 + 2z_1 - 2 = 0$, 得 $x_1 + z_1 = 1$, 显然能取到, 故 **C** 错误.

对于 D, 当直线 PQ 与平面 ADD_1A_1 所成角的正切值最小时, 直线 PQ 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值也最小. 由 C 知

$\overrightarrow{PQ} = (1-x_1, 2, 2-z_1)$, 又平面 ADD_1A_1 的一个法向量为 $m = (0, 1, 0)$, 则直线 PQ 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为

$$|\cos \langle \overrightarrow{PQ}, m \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot m}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |m|} \right| = \frac{2}{\sqrt{(1-x_1)^2 + 2^2 + (2-z_1)^2}}.$$

当 $x_1 = 0$ 或 $x_1 = 2, z_1 = 0$ 时, $|\cos \langle \overrightarrow{PQ}, m \rangle|_{\min} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} =$

$\frac{2}{3}$, 可得此时直线 PQ 与平面 ADD_1A_1 所成角的正切值最

小, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 **D** 错误. 故选 **AB**.

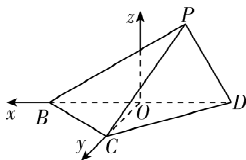
12. 【解】(1) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD, BC \perp CD$, 因为 $BC = CD$, 所以 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形, $BC = CD = 2$.

在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, 因为 $BD = 2\sqrt{2}, AD = \sqrt{2}$, 所以 $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{6}, \angle ABD = 30^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \angle ABC = \cos(\angle ABD + \angle CBD) = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 6 + 4 - 2 \times \sqrt{6} \times 2 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$, 所以 $AC = \sqrt{3} + 1$.

(2) 取 BD 的中点 O , 连接 OC , 易知 $OC \perp OB$, 以 O 为坐标原点, 以 OB, OC 所在直线分别为 x, y 轴, 以过点 O 且垂直于平面 BCD 的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, \sqrt{2}, 0), D(-\sqrt{2}, 0, 0)$.



设 $P(x, y, z) (z > 0)$, 由 (1) 可知, $PB = \sqrt{6}, PD = \sqrt{2}$, 又因为 $CP = \sqrt{6}$,

$$\text{所以} \begin{cases} (x - \sqrt{2})^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 + (y - \sqrt{2})^2 + z^2 = 6, \\ (x + \sqrt{2})^2 + y^2 + z^2 = 2, \end{cases} \text{解得 } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, z = 1,$$



即 $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, 则 $\overrightarrow{CP} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $\overrightarrow{BP} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $\overrightarrow{BD} = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$.

设平面 PBD 的一个法向量 $\mathbf{n} = (a, b, c)$, 直线 CP 与平面

PBD 所成角为 θ , 则
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BP} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}b + c = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -2\sqrt{2}a = 0, \end{cases}$$
 取 $b = \sqrt{2}$,

则 $c = 1, a = 0$, 所以平面 PBD 的一个法向量 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{2}, 1)$,

所以 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CP}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CP} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{CP}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 所以直线 CP

与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

一题多解 (1) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD, BC \perp CD$,

所以平面四边形 $ABCD$ 为以 BD 为直径的圆的内接四边形.

在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $AD = \sqrt{2}, BD = 2\sqrt{2}$, 则 $AB = \sqrt{6}$, 所以 $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$, $\sin \angle ABC = \sin(\angle ABD + \angle CBD) = \sin(30^\circ +$

$45^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, 由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA}$, 又

$\angle BCA = \angle ADB = 60^\circ$, 故 $AC = \frac{AB \sin \angle ABC}{\sin \angle BCA} = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \times$

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$.

(2) 在 $\text{Rt} \triangle PBD$ 中, $PD = \sqrt{2}, BD =$

$2\sqrt{2}$, 所以 $PB = \sqrt{6}$, 所以 $PB = PC =$

$\sqrt{6}$, 取 BC 的中点 E, BD 的中点 F .

连接 PE, PF, EF , 则 $PE \perp BC, EF \parallel$

CD , 又 $BC \perp CD$, 所以 $EF \perp BC$.

因为 $PE \cap EF = E, PE, EF \subset$ 平面 PEF , 所以 $BC \perp$ 平面 PEF . 因

为 $BC \subset$ 平面 BCD , 所以平面 $BCD \perp$ 平面 PEF .

在 $\triangle PEF$ 中, $PE = \sqrt{5}, EF = \frac{1}{2} CD = 1, PF = \sqrt{2}$, 所以

$\cos \angle EFP = \frac{1+2-5}{2 \times 1 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\angle EFP \in (0, \pi)$, 所以 $\angle EFP = \frac{3\pi}{4}$.

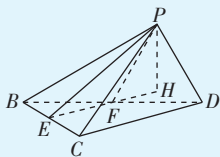
过 P 作 $PH \perp EF$ 交 EF 的延长线于 H , 由 $PH \subset$ 平面 PEF 知 $BC \perp PH$, 又 $EF \cap BC = E, EF, BC \subset$ 平面 BCD , 则 $PH \perp$

平面 BCD , 且 $PH = PF \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1$.

设 C 到平面 PBD 的距离为 h , 因为 $V_{C-PBD} = V_{P-BCD}$, 所以 $\frac{1}{3} \times$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1$, 所以 $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 所以直线 CP

与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{h}{CP} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.





13. (1)【证明】如图①,取 BC 中点 M ,连接 AM, ME .

因为 $AB=AC$,所以 $AM \perp BC$.

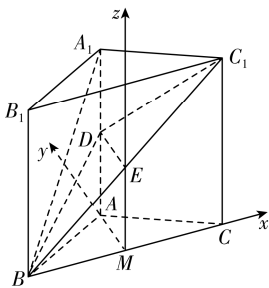
因为 E 为 BC_1 的中点,所以 EM 为 $\triangle BCC_1$ 的中位线,所以

$EM \parallel CC_1 \parallel AD$,又 $EM = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}AA_1 = AD$,所以四边形

$AMED$ 为平行四边形,则 $DE \parallel AM$.

又因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AM \subset$ 平面 ABC ,则 $AA_1 \perp AM$,则 $EM \perp AM$,

因为 $EM, BC \subset$ 平面 B_1BCC_1 , $EM \cap BC = M$,所以 $AM \perp$ 平面 B_1BCC_1 ,又因为 $DE \parallel AM$,所以 $DE \perp$ 平面 B_1BCC_1 .



图①

(2)【解】建系,然后利用余弦定理得到 B_1C_1 ,利用空间向量求线面角.

由(1)可知 MA, MC, ME 两两垂直,以 M 为坐标原点, MC, MA, ME 所在直线分别为 x, y, z 轴,建立如图①所示的空间直角坐标系.

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,由余弦定理可得 $B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos \angle B_1A_1C_1$,则 $B_1C_1 = 6$,于是 $D(0, \sqrt{3}, 3), B(-3, 0, 0), C_1(3, 0, 6), A_1(0, \sqrt{3}, 6)$,则 $\overrightarrow{BA_1} = (3, \sqrt{3}, 6), \overrightarrow{BD} = (3, \sqrt{3}, 3), \overrightarrow{BC_1} = (6, 0, 6)$.

设平面 DBC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{3}y + 3z = 0, \\ 6x + 6z = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (-1, 0, 1).$$

设直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角为 θ ,则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BA_1},$

$$\mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{3}{4\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}, \text{ 即直线 } A_1B \text{ 与平面 } DBC_1$$

所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$.



一题多解 1 (1) 由正解(2)的分析可知 $D(0, \sqrt{3}, 3), E(0, 0, 3), M(0, 0, 0), A(0, \sqrt{3}, 0)$, $AM \perp BC, AM \perp ME$, 又 $ME \cap BC = M, ME, BC \subset \text{平面 } B_1BCC_1$, 所以 $AM \perp \text{平面 } B_1BCC_1$, 所以 $\overrightarrow{AM}$ 为平面 B_1BCC_1 的一个法向量, 易知 $\overrightarrow{AM} = (0, -\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{DE} = (0, -\sqrt{3}, 0)$, 则 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DE}$, 所以 $DE \perp \text{平面 } B_1BCC_1$.

(2) 根据线面角的定义作出直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成的角, 然后求线面角.

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 由余弦定理可得 $B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos \angle B_1A_1C_1$, 则 $B_1C_1 = 6$.

连接 B_1E , 由(1)得 $DE \perp \text{平面 } B_1BCC_1$, 又 $BC_1 \subset \text{平面 } B_1BCC_1$, 则 $DE \perp BC_1$, 又因为 $BB_1 = B_1C_1$, 所以四边形 B_1BCC_1 为正方形, 又 E 为 BC_1 的中点, 所以 $B_1E \perp BC_1$, $B_1E = 3\sqrt{2}$.

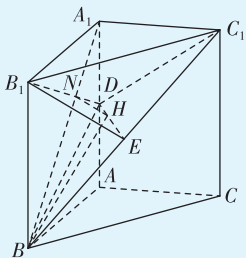
由于 $B_1E \cap DE = E, B_1E, DE \subset \text{平面 } B_1DE$, 则 $BC_1 \perp \text{平面 } B_1DE$.

如图②, 记 $A_1B \cap B_1D = N$, 过点 N 作 $NH \perp DE$, 垂足为点 H , 连接 BH .

由于 $BC_1 \perp \text{平面 } B_1DE, NH \subset \text{平面 } B_1DE$, 则 $NH \perp BC_1$,

又因为 $DE \cap BC_1 = E, DE, BC_1 \subset \text{平面 } DBC_1$, 所以 $NH \perp \text{平面 } DBC_1$,

所以 $\angle NBH$ 即为直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角.



图②

易知 $\triangle A_1DN \sim \triangle BB_1N$, 则 $\frac{B_1N}{ND} =$

$\frac{BN}{A_1N} = \frac{BB_1}{A_1D} = 2$, 则 $NB = \frac{2}{3}A_1B = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, N 为 DB_1 的三等分点,

由于 $DE \perp B_1E$, 因此 $NH \parallel B_1E$, 则 $NH = \frac{1}{3}B_1E = \sqrt{2}$,

于是 $\sin \angle NBH = \frac{NH}{NB} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$, 即直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$.



一题多解 2 (2) 利用等体积的思路得到点 A_1 到平面 DBC_1 的距离, 然后求线面角.

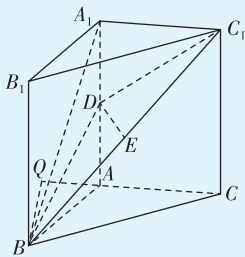
设直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角为 θ , 点 A_1 到平面 DBC_1 的距离为 h , 则 $\sin \theta = \frac{h}{A_1B}$.

在 $\text{Rt} \triangle A_1B_1B$ 中, $A_1B_1 = 2\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$, 则 $A_1B = 4\sqrt{3}$, 如图③, 过点 B 作 $BQ \perp CA$, 交 CA 的延长线于 Q , 易得 $BQ = 3$, 且易证 $BQ \perp$ 平面 A_1ACC_1 .

由于 $S_{\triangle A_1DC_1} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, 则 $V_{B-A_1DC_1} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$,

在 $\triangle DBC_1$ 中, $DB = DC_1 = \sqrt{21}$, 且 $BC_1 = 6\sqrt{2}$, 所以 $DE = \sqrt{3}$, 所以 $S_{\triangle DBC_1} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$,

又 $V_{A_1-BDC_1} = V_{B-A_1DC_1} = 3\sqrt{3}$, 则 $h = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$, $\sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

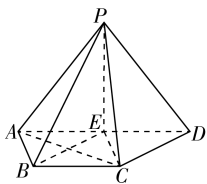


图③

14. (1) 【证明】 如图①, 连接 CE , 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 因为 $AD \parallel BC$, $AB = 1$, $BC = 1$, $AD = 2$, E 是 AD 的中点, 所以 $AE \parallel BC$, $AE = BC = AB = 1$, 所以四边形 $ABCE$ 是菱形, 所以 $AC \perp BE$.

因为 $PA = PD$, E 为 AD 的中点, 所以 $PE \perp AD$, 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PE \subset$ 平面 PAD , 所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PE \perp AC$.

因为 $PE, BE \subset$ 平面 PBE , $PE \cap BE = E$, 所以 $AC \perp$ 平面 PBE , 因为 $AC \subset$ 平面 PAC , 所以平面 $PAC \perp$ 平面 PBE .



图①

(2) **【解】** 如图②, 取 BC 的中点 H , 连接 EH , 由底面 $ABCD$ 为等腰梯形, 可得 $EH \perp AD$, 易知 EH, ED, PE 两两垂直, 故以 E 为坐标原点, EH, ED, EP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系.

因为 $AB = BC = 1$, $AD = 2$, 所以 $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 设 $PE = t, t > 0$,

则 $E(0, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $P(0, 0, t)$,



$$\text{则 } \overrightarrow{PC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -t \right), \overrightarrow{EB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \overrightarrow{EP} = (0, 0, t),$$

设平面 PBE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EP} = tz = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = \sqrt{3}, \text{ 得 } \mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, 0).$$

因为直线 PC 与平面 PBE 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $\sin \frac{\pi}{4} =$

$$|\cos \langle \overrightarrow{PC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right|}{2 \times \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + t^2}}, \text{ 所以 } t^2 = \frac{1}{2}, \text{ 即 } PE = t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 易知 $\overrightarrow{PC} =$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \overrightarrow{PD} = \left(0, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \overrightarrow{PB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

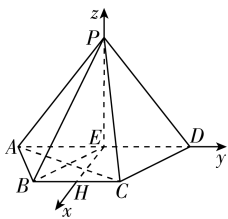
$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PD} = y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_1 = \sqrt{2}, \text{ 得 } \mathbf{m} =$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}, 2 \right), \text{ 设直线 } PB \text{ 与平面 } PCD \text{ 所成角为 } \theta,$$

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PB}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{15}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

又 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, 所以直线 PB 与平面 PCD 所成角的余弦值

$$\text{为 } \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



图②

15. (1)【证明】由题意得 $AE = A_1E = 4$, $DE = 12 - 4 = 8$, 又 $AD = 4\sqrt{3}$, 所以 $AE^2 + AD^2 = DE^2$, 故 $AD \perp AE$.

因为在梯形 A_1BCD 中, $BE \perp A_1D$, 所以 $BE \perp AE$ 且 $BE \perp DE$.

因为 $AE \cap DE = E$, $AE, DE \subset$ 平面 ADE , 所以 $BE \perp$ 平面 ADE ,

因为 $AD \subset$ 平面 ADE , 所以 $BE \perp AD$,

因为 $AE \cap BE = E$, $AE, BE \subset$ 平面 ABE , 所以 $AD \perp$ 平面 ABE .

(2)【解】(i) 因为平面 $ABE \perp$ 平面 $BCDE$, 平面 $ABE \cap$ 平面 $BCDE = BE$, $AE \perp BE$, $AE \subset$ 平面 ABE , 所以 $AE \perp$ 平面 $BCDE$.

又 $DE \subset$ 平面 $BCDE$, 所以 $AE \perp DE$, 取 BC 的中点 G , 在 DE 上取点 P , 使得 $EP = 3$, 连接 PG, PA, PB, PC , 则 $PD = 5$.

因为 $EP = BG$, $EP \parallel BG$, $BE \perp DE$, 所以四边形 $PGBE$ 为矩形.

关键点

由勾股定理得 $BP = \sqrt{BG^2 + PG^2} = 5$, 同理 $CP = 5$, $AP =$



$\sqrt{AE^2 + EP^2} = 5$, 所以 $PA = PB = PC = PD = 5$, 即 P 为球心 O , 球 O 的半径为 5.

(ii) 以 E 为坐标原点, EB, ED, EA 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系, 故 $O(0, 3, 0), C(4, 6, 0), A(0, 0, 4), B(4, 0, 0), \overrightarrow{AB} = (4, 0, -4), \overrightarrow{AC} = (4, 6, -4), \overrightarrow{OC} = (4, 3, 0)$.

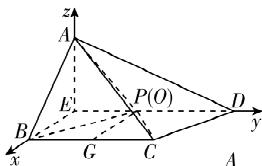
设平面 ABC 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AB} = 4x - 4z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AC} = 4x + 6y - 4z = 0, \end{cases}$$

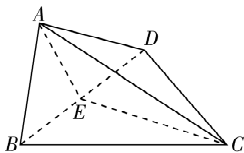
解得 $y = 0$, 令 $x = 1$, 则 $z = 1$, 故 $m = (1, 0, 1)$.

设直线 OC 与平面 ABC 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{OC}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{OC} \cdot m|}{|\overrightarrow{OC}| \cdot |m|} = \frac{|(4, 3, 0) \cdot (1, 0, 1)|}{\sqrt{16+9} \times \sqrt{1+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, 即直线

OC 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.



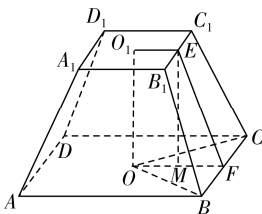
16. D 【解析】如图, 设 BD 的中点为 E , 连接 CE, AE , 则 $CE \perp BD$, $CE = \sqrt{3}$, 因为 AC 是三棱锥 $A-BCD$ 外接球的直径, 则 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 且 $CD = CB, CA = CA$, 则 $\text{Rt} \triangle ABC \cong \text{Rt} \triangle ADC$, 可得 $AB = AD$, 则 $AE \perp BD$, 所以二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AEC = 120^\circ$.



设 $AE = a (a > 0)$, 则 $AB = \sqrt{a^2 + 1}, AC = \sqrt{a^2 + 5}$, 在 $\triangle ACE$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2 \cdot AE \cdot CE \cdot \cos \angle AEC$, 即 $a^2 + 5 = a^2 + 3 - 2 \times a \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 解得 $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 所以 $AC =$

$$\sqrt{a^2 + 5} = \sqrt{\frac{4}{3} + 5} = \frac{\sqrt{57}}{3}.$$

17. A 【解析】如图所示, 取正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面中心分别为 O_1, O , 连接 O_1O , 则 O_1O 与正四棱台的上、下底面垂直, 即 O_1O 为棱台的高, 设 $O_1O = h$.



取 B_1C_1, BC 的中点分别为 E, F , 连接 O_1E, OF, EF , 在直角梯形 OO_1EF 中, 过点 E 作 $EM \parallel OO_1$, 交 OF 于点 M , 连接 OB, OC .

在等腰三角形 OBC 中, 由 $OB = OC$, 可得 $OF \perp BC$, 在等腰梯形 BCC_1B_1 中, 由 E, F 分别为 B_1C_1, BC 的中点, 可得 $EF \perp BC$, 所



以 $\angle EFM$ 为正四棱台的侧面与底面所成角的平面角.

关键点

因为 $AB=4, A_1B_1=2$, 且正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{56\sqrt{2}}{3}$, 可得 $\frac{1}{3}(2^2+4^2+\sqrt{4\times 16})\cdot h=\frac{56\sqrt{2}}{3}$, 解得 $h=2\sqrt{2}$, 即 $OO_1=EM=2\sqrt{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle EMF$ 中, 可得 $EF=\sqrt{EM^2+MF^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$,

所以 $\cos\angle EFM=\frac{MF}{EF}=\frac{1}{3}$, 即侧面与底面所成二面角的余弦值为 $\frac{1}{3}$. 故选 A.

18. D 【解析】三棱锥 $P-BCD$ 的体积与 P 到平面 BCD 的距离成正比, 故当三棱锥 $P-BCD$ 的体积最大时, P 处于半圆弧

关键点

的正中间位置.

记 AD 的中点为 O , 连接 PO , 则

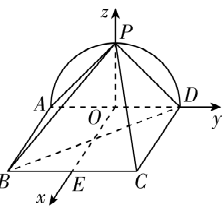
$PO\perp AD$, 过点 O 作 $OE\parallel AB$, 交 BC

于点 E , 则 $OE\perp AD$, 易知 OE, OD ,

OP 两两垂直, 以 O 为坐标原点,

$\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OP}$ 的方向分别作为 x, y, z

轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $P(0,0,1), B(2,-1,0), C(2,1,0), \overrightarrow{PB}=(2,-1,-1),$

$\overrightarrow{PC}=(2,1,-1)$, 易知平面 BCD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 PBC 的法向量, 所以 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0, \end{cases}$ 从而

$\begin{cases} 2x-y-z=0, \\ 2x+y-z=0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 解得 $y=0, z=2$, 故 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

显然二面角 $P-BC-D$ 为锐二面角, 因此所求余弦值为

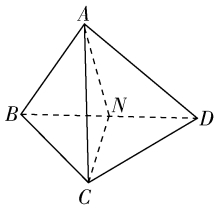
$$|\cos\langle\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|1\times 0+0\times 0+2\times 1|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故选 D.

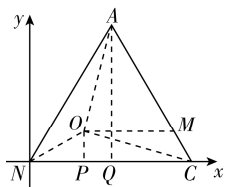
19. C 【解析】由题意知 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 均为等边三角形, 如图①, 连接 AN, CN , 则 $AN\perp BD, CN\perp BD$, 所以 $\angle ANC$ 是二

面角 $A-BD-C$ 的平面角, 所以 $\angle ANC=\frac{\pi}{3}$, 又易知 $AN=CN$,

所以 $\triangle ACN$ 是等边三角形.



图①



图②

设 P 为 $\triangle BCD$ 的外心, Q 为 CN 的中点, 连接 OP, ON, AQ, OM, AO, OC , 则 $OP\perp$ 平面 BCD , 点 O, P, Q 都在平面 ACN 内, 则以 N 为坐标原点, 在平面 ACN 内建立平面直角坐标系, 如图②所示 (关键: 结合几何关系, 建立如图所示的平面直角坐标系, 转化为平面几何问题).



设 $AN=NC=AC=2$, 则 $NP=\frac{2}{3}$, 又由 $AO=OC$, 得 NO 是 AC 的垂直平分线, 所以 $\angle ONP=\frac{\pi}{6}$, 所以 $OP=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

又 $AQ=\sqrt{3}$, 所以 $OP=\frac{2}{9}AQ$, 因为 $MO\parallel CN$, 易知 $CM=\frac{2}{9}CA=\frac{4}{9}$, 则 $O\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, $M\left(\frac{16}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, 从而 $MO=\frac{10}{9}$, $\lambda=\frac{MO}{CN}=\frac{5}{9}$. 故选 C.

20. B 【解析】设正方体棱长为 1, 以 B 为坐标原点, BA, BE, BC 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系,

则 $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$.

方法一: 先利用两个平面夹角的定义, 在两个半平面内分别找到与二面角 $A-MN-B$ 的棱 MN 垂直的两条直线, 将问题转化为求两直线方向向量的夹角或其补角.

取 MN 的中点 G , 连接 BG, AG , 则

$G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. 因为 $\triangle AMN, \triangle BMN$

为等腰三角形, 所以 $AG \perp MN, BG \perp MN$, 故 $\angle AGB$ 为两个平面的夹角或其补角. 又因为 $\vec{GA} =$

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $\vec{GB} = \left(-\frac{1}{2},$

$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, 所以 $\cos \langle \vec{GA}, \vec{GB} \rangle = \frac{\vec{GA} \cdot \vec{GB}}{|\vec{GA}| |\vec{GB}|} =$

$$\frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{8}} \times \sqrt{\frac{3}{8}}} = -\frac{1}{3}.$$

设平面 MNA 与平面 MNB 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{GA}, \vec{GB} \rangle| = \frac{1}{3}$. 故所求两平面夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$. 故选 B.

方法二: 直接转化为求两平面的法向量的夹角.

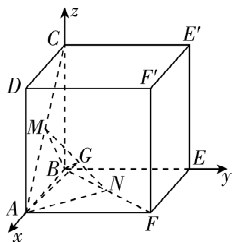
设平面 AMN 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$, 由于 $\vec{AM} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{AN} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AM} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AN} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = 0, \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0, \end{cases} \text{令 } x=1, \text{解得 } y=1, z=1,$$

则 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$, 同理可求得平面 BMN 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = (1, -1, -1)$.

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$, 设平面 MNA 与

平面 MNB 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{1}{3}$. 故所求





两平面夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$. 故选 B.

21. A 【解析】不妨设 $AB = 2$, 则 $BC = CC_1 = 1$, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 如图所示, 则 $D(0, 0, 0), E(1, 1, 0), F(0, 1, 0), B(1, 2, 0), P(1, t, 1) (t \in [0, 2])$,

则 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{FP} = (1, t-1, 1), \overrightarrow{DP} = (1, t, 1)$.

设平面 PDE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE} = x_1 + y_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = x_1 + ty_1 + z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = -1, z_1 = t-1$, 所以

$\mathbf{m} = (1, -1, t-1)$, 则 $|\mathbf{m}| = \sqrt{2+(t-1)^2}$.

设平面 PBF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FB} = x_2 + y_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FP} = x_2 + (t-1)y_2 + z_2 = 0, \end{cases}$

令 $x_2 = 1$, 则 $y_2 = -1, z_2 = t-2$, 所以 $\mathbf{n} = (1, -1, t-2)$, 则 $|\mathbf{n}| = \sqrt{2+(t-2)^2}$.

设平面 PDE 和平面 PBF 的夹角为 $\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{(t-1)(t-2)+2}{\sqrt{(t-1)^2+2} \cdot \sqrt{(t-2)^2+2}} \right|$,

$\cos^2 \theta = \frac{[(t-1)(t-2)]^2 + 4(t-1)(t-2) + 4}{[(t-1)(t-2)]^2 + 2(t-1)^2 + 2(t-2)^2 + 4}$,

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{2(t-1)^2 + 2(t-2)^2 - 4(t-1)(t-2)}{[(t-1)(t-2)]^2 + 2(t-1)^2 + 2(t-2)^2 + 4}$

$= \frac{2[(t-1)-(t-2)]^2}{[(t-1)(t-2)]^2 + 2(t-1)^2 + 2(t-2)^2 + 4}$

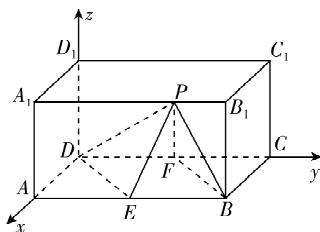
$= \frac{2}{(t^2-3t+2)^2 + 2(2t^2-6t+5)+4} = \frac{2}{(t^2-3t+2)^2 + 4(t^2-3t+2)+4+2}$

$= \frac{2}{(t^2-3t+2)^2 + 2} \leq \frac{32}{81}$, 当且仅当 $t = \frac{3}{2}$ 时, $\sin^2 \theta = \frac{32}{81}$, 所以

$\sin \theta \leq \frac{4\sqrt{2}}{9}$,

故平面 PDE 与平面 PBF 的夹角的正弦值的最大值为 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

故选 A.



22. $\frac{13}{24}$ 【解析】因为 $BD \perp AB, AC \perp AB$, 所以 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} =$

0, 设二面角 $C-AB-D$ 的大小为 θ ,

则由题图可知, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times \cos(\pi - \theta) = -12 \cos \theta$.

又 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{DC}^2 = \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BA} +$



$2\vec{DB} \cdot \vec{AC} + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC}$, 即 $4^2 = 4^2 + 2^2 + 3^2 - 24\cos \theta$,

所以 $\cos \theta = \frac{13}{24}$.

23. 49 π 【解析】因为三棱锥 $P-ABC$ 的底面是边长为 6 的正三角形, 侧棱长均相等, 其顶点都在同一球面上, 所以三棱锥 $P-ABC$ 是正三棱锥.

设底面三角形 ABC 的中心为 O' , BC 的中点为 D , 连接 PO' , PD , AD , $O'B$, 则 O' 在直线 AD 上, 球心 O 在直线 PO' 上, 连接 $O'O$, OB , 由几何关系可知 $O'D = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \sqrt{3}$,

$O'B = 2\sqrt{3}$.

因为平面 $PBC \cap$ 平面 $ABC = BC$, $PD \perp BC$, $O'D \perp BC$, 所以

$\angle PDO'$ 是侧面与底面夹角的平面角, 即 $\angle PDO' = \frac{\pi}{3}$, 所以

$PO' = \sqrt{3}O'D = 3$.

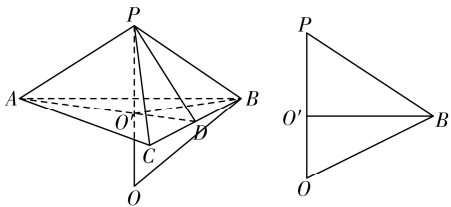
先将 $\triangle POB$ 转化为平面三角形, 设该球半径为 r , 则 $OB = r$,

$OO' = r - 3$,

在 $\text{Rt}\triangle OO'B$ 中, 由勾股定理可得 $OB^2 = OO'^2 + O'B^2$, 即 $r^2 =$

$(r-3)^2 + (2\sqrt{3})^2$, 解得 $r = \frac{7}{2}$, 所以该球的表面积 $S = 4\pi r^2 =$

49π .



24. (1) 【证明】连接 PD (图略), 因为 $PA = PC$, D 为 AC 的中点, 所以 $AC \perp PD$, 又因为 $PH \perp$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PH \perp AC$, 又因为 $PD, PH \subset$ 平面 PHD , $PD \cap PH = P$, 所以 $AC \perp$ 平面 PHD .

又 $DH \subset$ 平面 PHD , 所以 $AC \perp DH$.

因为 $AC \perp BC$, 且 HD, BC 均在平面 ABC 内, 所以 $DH \parallel BC$, 因为 $BC \subset$ 平面 PBC , $DH \not\subset$ 平面 PBC , 所以 $DH \parallel$ 平面 PBC .

(2) 【解】如图, 过点 H 作 $HQ \perp BC$, 垂足为点 Q , 连接 PQ .

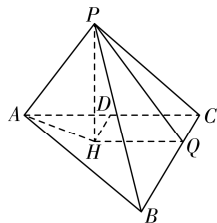
因为 $PH \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PH \perp BC$, 又 $HQ \perp BC$, $HQ \cap PH = H$, $HQ, PH \subset$ 平面 PHQ , 所以 $BC \perp$ 平面 PHQ , 又 $PQ \subset$ 平面 PHQ , 所以

$PQ \perp BC$, 所以 $\angle PQH$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角.

因为 $AC = 2$, $\angle PAH = \angle CAH = 45^\circ$, 所以 $PH = AH = \sqrt{2}AD =$

$\sqrt{2}$, $HQ = DC = 1$, 所以 $PQ = \sqrt{3}$, 所以 $\sin \angle PQH = \frac{PH}{PQ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所

以二面角 $P-BC-A$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

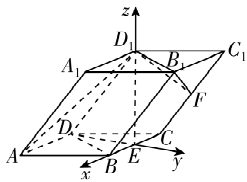




25. (1)【证明】连接 BD , 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle BCD$ 为正三角形, 又 E 为 BC 的中点, 所以 $DE \perp BC$, 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $AD \perp DE$.

因为 $D_1E \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AD \perp D_1E$, 又 $DE, D_1E \subset$ 平面 DED_1 , 且 $DE \cap D_1E = E$, 所以 $AD \perp$ 平面 DD_1E , 又 $AD \subset$ 平面 ADD_1 , 所以平面 $ADD_1 \perp$ 平面 DD_1E .

(2)【解】由(1)知 EB, ED, ED_1 两两垂直, 以 E 为坐标原点, EB, DE, ED_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(2, -\sqrt{3}, 0), D(0, -\sqrt{3}, 0), D_1(0, 0, \sqrt{3}), C(-1, 0, 0), B(1, 0, 0)$,



又 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{DD_1} = (0, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, 所以 $C_1(-1, \sqrt{3}, \sqrt{3}), B_1(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}), F(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 所以 $\overrightarrow{DA} = (2, 0, 0), \overrightarrow{D_1B_1} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{D_1F} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设平面 ADD_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DD_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x = 0, \\ \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 令 $y = 1$, 解得 $x = 0, z = -1$, 所以 $\mathbf{m} = (0, 1, -1)$.

设平面 B_1D_1F 的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1B_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{D_1F} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a + \sqrt{3}b = 0, \\ -a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0, \end{cases}$ 令 $b = 1$, 解得 $a = -\sqrt{3}, c = 3$, 所以 $\mathbf{n} = (-\sqrt{3}, 1, 3)$.

设平面 ADD_1 与平面 B_1D_1F 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{26}}{13}$, 所以平面 ADD_1 与平面 B_1D_1F 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{26}}{13}$.

26. (1)【证明】如图, 连接 BM, BD .

因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $BC = DC$, 又 $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\angle DCB = 60^\circ$, 则 $\triangle BDC$ 为等边三角形, 又 M 是线段 DC 的中点, 可得 $BM \perp DC$.

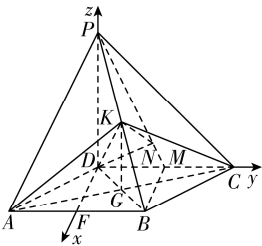
因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $BM \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp BM$,

又 $PD \cap DC = D, PD, DC \subset$ 平面 PDC , 所以 $BM \perp$ 平面 PDC .

因为 $DN \subset$ 平面 PDC , 所以 $BM \perp DN$,

因为 $DN \perp PM, PM \cap BM = M, PM, BM \subset$ 平面 PBM , 所以 $DN \perp$ 平面 PBM , 又 $PB \subset$ 平面 PBM , 所以 $DN \perp PB$.

(2)【解】如图所示, 取 AB 中点 F , 连接 DF , 易知 $DF \perp AB$,



所以 $DF \perp DC$.

以 D 为原点, DF, DC, DP 所在的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系.

设菱形的边长为 2, 则 $DP=2$, 可得 $D(0,0,0), B(\sqrt{3}, 1, 0),$

$M(0, 1, 0), P(0, 0, 2), K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{PM} = (0, 1, -2).$

设 $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{PM} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $N(0, \lambda, 2-2\lambda)$, 所以 $\overrightarrow{DN} = (0, \lambda, 2-2\lambda).$

又 $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$, 则 $\lambda = \frac{4}{5}$, 所以 $N\left(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, 可得 $\overrightarrow{DK} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{DN} = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right).$

设平面 KDN 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DK} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DN} = 0, \end{cases}$ 可得

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 + z_1 = 0, \\ \frac{4}{5}y_1 + \frac{2}{5}z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{不妨设 } z_1 = 1, \text{ 则 } x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y_1 = -\frac{1}{2}, \text{ 可}$$

得 $\mathbf{n}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$

设 BD 交 AC 于点 G , 连接 KG , 则 $KG \parallel PD$, 所以 $KG \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BD \perp KG$,

又 $BD \perp AC$, 且 $KG \cap AC = G, KG, AC \subset$ 平面 KAC , 所以 $BD \perp$ 平面 KAC , 所以平面 KAC 的法向量可取 $\overrightarrow{DB} = (\sqrt{3}, 1, 0).$

设平面 KDN 与平面 KAC 的夹角为 $\theta, 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 可得

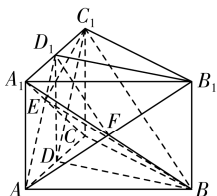
$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DB}|}{|\mathbf{n}_1| |\overrightarrow{DB}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{即平面 } KDN \text{ 与平面 } KAC \text{ 夹角的余弦}$$

值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

27. (1) 【解】 如图①, 连接 A_1B , 交 AB_1 于点 F , 则 F 为 A_1B 的中点, 连接 D_1F .

$\because$ 平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , 平面 $AB_1D_1 \cap$ 平面 $BA_1C_1 = D_1F$, 平面 $BDC_1 \cap$ 平面 $BA_1C_1 = BC_1$, $\therefore D_1F \parallel BC_1$, $\therefore D_1$ 为 A_1C_1 的中点, $\therefore \lambda = \frac{1}{2}.$

$\because$ 平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , 平面 $AB_1D_1 \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = AD_1$, 平面 $BDC_1 \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = C_1D$, $\therefore AD_1 \parallel DC_1$, 又 $AD \parallel D_1C_1$, $\therefore$ 四边形 ADC_1D_1 为平行四边形, $\therefore AD = D_1C_1 = \frac{1}{2}AC$, $\therefore \mu = \frac{1}{2}$, 故 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}.$



图①



(2) (i) 【证明】 $\because A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1 , 又 $B_1D_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , $\therefore A_1C \perp B_1D_1$, 又 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $B_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\therefore AA_1 \perp B_1D_1$, 又 $AA_1 \cap A_1C = A_1$, $AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $\therefore B_1D_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

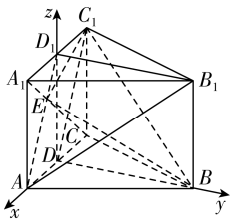
$\because D, D_1$ 分别为 AC, A_1C_1 的中点, 连接 DD_1 , 如图①, $\therefore DD_1 \parallel BB_1$, 且 $DD_1 = BB_1$, $\therefore$ 四边形 BB_1D_1D 为平行四边形, $\therefore B_1D_1 \parallel BD$, 则 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又 $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $\therefore BD \perp AC$.

(ii) 【解】 $\because A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1 , $AD_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , $\therefore A_1C \perp AD_1$, $\therefore \triangle AA_1D_1 \sim \triangle CAA_1$, $\therefore \frac{AA_1}{CA} = \frac{A_1D_1}{AA_1}$, 又 $A_1D_1 = \frac{1}{2}AC$, $\therefore AC = \sqrt{2}AA_1$, 又 $AB = \sqrt{2}AA_1$, $\therefore AC = AB$.

由(i)知 $BD \perp AC$, 且 D 为 AC 中点, $\therefore AB = BC$, $\therefore AB = BC = AC$.

方法一(建系法): 设 $AB = 2a (a > 0)$,

则 $AA_1 = \sqrt{2}a$, 如图②, 以 D 为坐标原点, 以 DA 所在直线为 x 轴, DB 所在直线为 y 轴, DD_1 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



图②

则 $A_1(a, 0, \sqrt{2}a)$, $B(0, \sqrt{3}a, 0)$,

$C(-a, 0, 0)$, $E\left(\frac{a}{3}, 0, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)$, $C_1(-a, 0, \sqrt{2}a)$,

$\therefore \overrightarrow{BE} = \left(\frac{a}{3}, -\sqrt{3}a, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-a, -\sqrt{3}a, \sqrt{2}a)$, $\overrightarrow{A_1C} = (-2a, 0, -\sqrt{2}a)$.

设平面 EBC_1 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} \frac{a}{3}x - \sqrt{3}ay + \frac{2\sqrt{2}a}{3}z = 0, \\ -ax - \sqrt{3}ay + \sqrt{2}az = 0, \end{cases}$$

不妨令 $x = \sqrt{2}$, 可得 $z = 4$, $y = \sqrt{6}$, 即 $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, 4)$.

又向量 $\overrightarrow{A_1C}$ 为平面 BC_1D 的法向量, 且 $\overrightarrow{A_1C} = (-2a, 0, -\sqrt{2}a)$,

设二面角 $E-BC_1-D$ 的平面角为 θ , 由图②易知 $\theta \in$

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } \cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{6\sqrt{2}a}{\sqrt{2+6+16} \cdot \sqrt{6}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

方法二(几何法): 如图③, 延长 C_1E , 交 A_1A 于点 H , 交 CA

的延长线于点 T , 则 $\frac{A_1D_1}{AC} = \frac{A_1E}{EC} = \frac{A_1C_1}{CT} = \frac{1}{2}$, 则 $AT = A_1C_1$, 则

H 为 A_1A 的中点.

$\because A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1 , 平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , $\therefore A_1C \perp$ 平面 BDC_1 , 连接 HD , 取 C_1B 的中点 S , 连接 DS , $\because HD \parallel A_1C$, $\therefore HD \perp$ 平面 BDC_1 , $\therefore HD \perp DS$.

设 $AB = 2a (a > 0)$, 则 $AA_1 = \sqrt{2}a$, 则 $DC_1 = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3}a$, $DB = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a = DC_1$, $\therefore \triangle DC_1B$ 为等腰三角

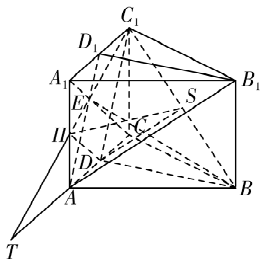


形, 则 $DS \perp BC_1$, 连接 HS , 则 $\angle DSH$ 即为二面角 $E-BC_1-D$ 的平面角.

由 (i) 知 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $\therefore BD \perp C_1D$, $\triangle DC_1B$ 为等腰直角三角形, $\therefore DS = \frac{1}{2}C_1B = \frac{\sqrt{6}a}{2}$.

又 $DH = \frac{1}{2}A_1C = \frac{\sqrt{6}a}{2}$, $\therefore DH = DS$, $\therefore \tan \angle DSH = \frac{DH}{DS} = 1$, 故

$\cos \angle DSH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即二面角 $E-BC_1-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



图③

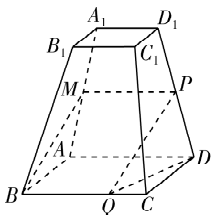
28. (1) 【证明】取 AA_1 的中点 M , 连接 MP, MB , 如图①.

在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 A_1ADD_1 是梯形, $A_1D_1 = 2, AD = 4$, 且 M, P 分别是棱 A_1A, D_1D 的中点, 所以

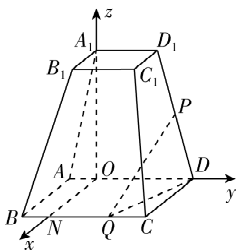
$$MP \parallel AD, \text{ 且 } MP = \frac{A_1D_1 + AD}{2} = 3.$$

在正方形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD, BC = 4$, 又 $BQ = 3QC$, 所以 $BQ = 3$. 从而 $MP \parallel BQ$ 且 $MP = BQ$, 所以四边形 $BMPQ$ 是平行四边形, 所以 $PQ \parallel MB$.

又因为 $MB \subset$ 平面 $ABB_1A_1, PQ \not\subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 .



图①



图②

(2) 【解】在平面 AA_1D_1D 中, 过点 A_1 作 $A_1O \perp AD$, 垂足为点 O , 如图②.

因为平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $AA_1D_1D \cap$ 平面 $ABCD = AD, A_1O \perp AD, A_1O \subset$ 平面 AA_1D_1D , 所以 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$.

在正方形 $ABCD$ 中, 过点 O 作 AB 的平行线, 交 BC 于点 N , 则 $ON \perp OD$.

以 O 为坐标原点, ON, OD, OA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.

因为四边形 AA_1D_1D 是等腰梯形, $A_1D_1 = 2, AD = 4$, 所以 $AO = 1$, 又 $A_1A = D_1D = \sqrt{17}$, 所以 $A_1O = 4$.

易得 $B(4, -1, 0), D(0, 3, 0), C(4, 3, 0), D_1(0, 2, 4),$

$P(0, \frac{5}{2}, 2)$, 所以 $\overrightarrow{DC} = (4, 0, 0), \overrightarrow{DP} = (0, -\frac{1}{2}, 2), \overrightarrow{CB} = (0, -4, 0).$



方法一：设 $\overrightarrow{CQ} = \lambda \overrightarrow{CB} = (0, -4\lambda, 0) (0 < \lambda \leq 1)$ ，所以 $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ} = (4, -4\lambda, 0)$ 。

设平面 PDQ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y + 2z = 0, \\ 4x - 4\lambda y = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = 1, \text{ 则 } x = 4\lambda, y = 4, \text{ 故 } \mathbf{m} = (4\lambda, 4, 1),$$

取平面 DCQ 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 。

设二面角 $P-QD-C$ 的平面角为 θ ，由题意得 $\sin \theta = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ ，

$$\text{则 } |\cos \theta| = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{26}}{26}.$$

又 $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{(4\lambda)^2 + 17}}$ ，所以

$$\frac{1}{\sqrt{(4\lambda)^2 + 17}} = \frac{\sqrt{26}}{26}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{3}{4} \text{ (舍负)}, \text{ 因此 } CQ = \frac{3}{4} \times 4 = 3, BQ = 1,$$

所以当二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时， BQ 的长为 1。

方法二：设 $Q(4, t, 0) (-1 \leq t < 3)$ ，所以 $\overrightarrow{DQ} = (4, t-3, 0)$ ，设

平面 PDQ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y + 2z = 0, \\ 4x + (t-3)y = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = 1, \text{ 则 } x = 3-t, y = 4, \text{ 故 } \mathbf{m} = (3-t, 4, 1),$$

取平面 DCQ 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 。

设二面角 $P-QD-C$ 的平面角为 θ ，由题意得 $\sin \theta = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ ，

$$\text{则 } |\cos \theta| = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{26}}{26}.$$

又 $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{(3-t)^2 + 17}}$ ，所以

$$\frac{1}{\sqrt{(3-t)^2 + 17}} = \frac{\sqrt{26}}{26}, \text{ 解得 } t = 0 \text{ 或 } t = 6 \text{ (舍)}, \text{ 因此 } BQ = 1.$$

所以当二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时， BQ 的长为 1。



一题多解 (2) 在平面 A_1ADD_1 中, 过点 P 作 $PH \perp AD$, 垂足为 H , 如图③.

因为平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $A_1ADD_1 \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PH \perp AD$, $PH \subset$ 平面 A_1ADD_1 , 所以 $PH \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $DQ \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PH \perp DQ$.

在平面 $ABCD$ 中, 作 $HG \perp DQ$, 垂足为 G , 连接 PG , 如图③.

因为 $PH \perp DQ$, $HG \perp DQ$, $PH \cap HG = H$, $PH, HG \subset$ 平面 PHG , 所以 $DQ \perp$ 平面 PHG , 又 $PG \subset$ 平面 PHG , 所以 $DQ \perp PG$. 因为 $HG \perp DQ$, $PG \perp DQ$, 所以 $\angle PGH$ 是二面角 $P-DQ-A$ 的平面角.

在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 A_1ADD_1 是梯形, $A_1D_1 = 2$, $AD = 4$, $A_1A = D_1D = \sqrt{17}$, P 是棱 DD_1 的中点, 所以 $PH = 2$, $DH = \frac{1}{2}$.

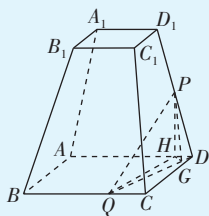
设 $BQ = x$ ($0 \leq x < 4$), 则 $CQ = 4 - x$, $DQ = \sqrt{4^2 + (4-x)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$, 连接 QH , 在 $\triangle QHD$ 中, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = \frac{1}{2} \times \sqrt{x^2 - 8x + 32} \times HG$, 从而 $HG = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}$.

因为二面角 $P-QD-C$ 的平面角与二面角 $P-QD-A$ 的平面角互补, 且二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$, 所以

$\sin \angle PGH = \frac{5\sqrt{26}}{26}$, 从而 $\tan \angle PGH = 5$. 所以在 $\text{Rt} \triangle PHG$

中, $\frac{PH}{HG} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} = 5$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 7$ (舍).

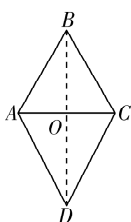
所以当二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时, BQ 的长为 1.



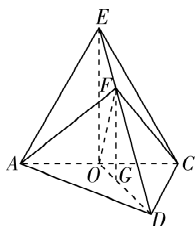
图③

29. (1) 【证明】 如图①, 取 AC 的中点 O , 连接 OB, OD , 由题意知 $OB \perp AC$, $OD \perp AC$, 所以 B, O, D 三点共线.

由 $AB = AC = BC = 2$ 得 $OB = OE = \sqrt{3}$, 由 $AD = CD = \sqrt{5}$ 得 $OD = 2$, 又 $DE = \sqrt{7}$, 故 $DE^2 = OE^2 + OD^2$, 所以 $OE \perp OD$, 又 $OE \perp AC$, 且 $AC \cap OD = O$, $AC, OD \subset$ 平面 ACD , 所以 $OE \perp$ 平面 ACD , 又 $OE \subset$ 平面 EAC , 所以平面 $EAC \perp$ 平面 ACD .



图①



图②

(2)【解】(几何法)(i)如图②,连接 OF ,由(1)知 $OE \perp AC$, $OD \perp AC$,又 $OE \cap OD = O$, $OE, OD \subset$ 平面 ODE ,所以 $AC \perp$ 平面 ODE ,又 $OF \subset$ 平面 ODE ,所以 $OF \perp AC$,又 $OD \perp AC$,平面 $FAC \cap$ 平面 $DAC = AC$,所以 $\angle DOF$ 是二面角 $F-AC-D$ 的平面角,所以 $\angle DOF = 60^\circ$,

$$\text{由 } \angle DOE = 90^\circ \text{ 得 } \angle EOF = 30^\circ, \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle ODF}} = \frac{EF}{DF} = \frac{\frac{1}{2}OF \cdot OE \cdot \sin 30^\circ}{\frac{1}{2}OF \cdot OD \cdot \sin 60^\circ} = \frac{OE \cdot \sin 30^\circ}{OD \cdot \sin 60^\circ}, \text{ 即 } \frac{EF}{DF} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 即}$$

$$\frac{DF}{DE} = \frac{2}{3}, \text{ 由 } \vec{DF} = \lambda \vec{DE} \text{ 得 } \lambda = \frac{|\vec{DF}|}{|\vec{DE}|}, \text{ 所以 } \lambda = \frac{2}{3}.$$

(ii)过 F 作 $FG \parallel OE$ 交 OD 于 G ,则 $FG \perp$ 平面 ACD ,由(i)知

$$FG = \frac{2}{3}OE = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } V_{F-ACD} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}, \text{ 又}$$

$$\vec{OF} = \vec{OD} + \vec{DF} = \vec{OD} + \frac{2}{3}\vec{DE} = \vec{OD} + \frac{2}{3}(\vec{OE} - \vec{OD}) = \frac{1}{3}\vec{OD} + \frac{2}{3}\vec{OE},$$

$$\text{所以 } |\vec{OF}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\vec{OD} + 2\vec{OE})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 4 \times 3} = \frac{4}{3}, \text{ 记 } D \text{ 到平面}$$

$$ACF \text{ 的距离为 } h, \text{ 所以 } V_{D-ACF} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} \right) h = \frac{4}{9}h, \text{ 所以}$$

$$\frac{4}{9}h = \frac{4\sqrt{3}}{9}, \text{ 即 } h = \sqrt{3}, \text{ 记直线 } CD \text{ 与平面 } ACF \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则}$$

$$\sin \theta = \frac{h}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}, \text{ 所以直线 } CD \text{ 与平面 } ACF \text{ 所成角的正}$$

$$\text{弦值为 } \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

**一题多解** (2) (建系法) (i) 如图③, 连接 OF , 以 O 为坐标

原点, OD, OC, OE 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $O(0, 0, 0), C(0, 1, 0), D(2, 0, 0), E(0, 0, \sqrt{3})$, 则 $\overrightarrow{DE} = (-2, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{OC} =$

$(0, 1, 0)$, 由 $\overrightarrow{DF} = \lambda \overrightarrow{DE}$ 得 $F(2-2\lambda, 0,$

$\sqrt{3}\lambda)$, 则 $\overrightarrow{OF} = (2-2\lambda, 0, \sqrt{3}\lambda)$, 设平面

ACF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OF} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} y = 0, \\ (2-2\lambda)x + \sqrt{3}\lambda z = 0, \end{cases} \text{故}$$

图③

$y=0$, 取 $x=\sqrt{3}\lambda$, 可得 $z=2\lambda-2$, 所以 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}\lambda, 0, 2\lambda-2)$.

取平面 ACD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, 又二面角

$F-AC-D$ 的大小为 60° , 则 $\cos 60^\circ = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} \right| =$

$$\frac{|2\lambda-2|}{\sqrt{3\lambda^2 + (2\lambda-2)^2}}, \text{化简得 } 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0, \text{解得 } \lambda = \frac{2}{3} \text{ 或 } \lambda =$$

2 (舍去), 故 $\lambda = \frac{2}{3}$.

(ii) 由(i)知 $\mathbf{n} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{2}{3} \right)$, 取平面 ACF 的一个法向量为

$\mathbf{n}' = (\sqrt{3}, 0, -1)$, 又 $\overrightarrow{CD} = (2, -1, 0)$, 记直线 CD 与平面 ACF 所

$$\text{成角为 } \beta, \text{ 则 } \sin \beta = |\cos \langle \mathbf{n}', \overrightarrow{CD} \rangle| = \frac{|\mathbf{n}' \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\mathbf{n}'| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

所以直线 CD 与平面 ACF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

**综合提分练**

1. A 必刷考点 ①充分、必要条件的判断, 异面直线所成角的向量求法

【解析】如图, 设 $AA_1 = a$.

以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 为基底,

则 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2, |\overrightarrow{AA_1}| = a,$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2, \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, |\overrightarrow{A_1B}| = |\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{a^2 + 4}.$

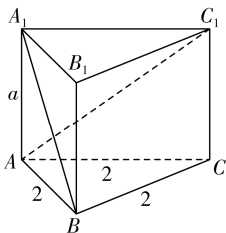
因为 $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}) = 2 - a^2.$

由 $\frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{1}{4}$, 可得 $\frac{|2-a^2|}{a^2+4} = \frac{1}{4}$, 解得 $a^2 = 4$ 或 $a^2 =$

$\frac{4}{5}$, 即 $a = 2$ 或 $a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

即“异面直线 AC_1 与 A_1B 所成角的余弦值是 $\frac{1}{4}$ ”的充要条件是

“ $AA_1 = 2$ 或 $AA_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ”, 故“ $AA_1 = 2$ ”是“异面直线 AC_1 与



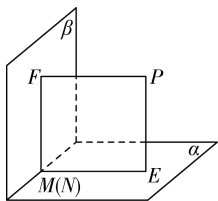


A_1B 所成角的余弦值是 $\frac{1}{4}$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

2. D 必刷题型 ⊙ 立体几何中的新定义问题

【解析】如图, 设 $f^\beta(P) = F$, 则 $f^\alpha(F) = M$, 设 $f^\alpha(P) = E$, 则 $f^\beta(E) = N$.

因为 $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PN}|$ 恒成立, 所以 M, N 两点重合, 所以四边形 $PENF$ 为矩形, 且 $\angle EMF$ 为平面 α, β 所成二面角的平面角, 所以 $\alpha \perp \beta$. 故选 D.



3. AB 必刷考点 ⊙ 四面体的外接球、四面体的体积、异面直线所成的角、线面角

【解析】长方形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 4$, 则 $AC = 5$, 设 AC 的中点为 O , 连接 BO, DO ,

则 $OA = OB = OC = OD = \frac{5}{2}$, 故 O 为四面体 $ABCD$ 外接球的球心, 半径为

$BO = \frac{5}{2}$, 则外接球的表面积为 $4\pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25\pi$, 故 A 正确.

又平面 $ABC \perp$ 平面 ADC , 平面 $ABC \cap$ 平面 $ADC = AC$, 在 $\triangle DAC$ 中, $DC = 3, AD = 4$, 过点 D 作 $DH \perp AC$ 于点 H , 则 $DH \perp$ 平面 ABC , 且 $DH = \frac{12}{5}$, 又 $\triangle ABC$ 的面积为 6, 则四面体 $ABCD$ 的体

积为 $\frac{1}{3} \times 6 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$, 故 B 正确.

若异面直线 AB 与 CD 所成角为 90° , 则 $CD \perp AB$, 又 $CD \perp AD$, $AB \cap AD = A, AB, AD \subset$ 平面 ABD , 则 $CD \perp$ 平面 ABD , 又 $BD \subset$ 平面 ABD , 所以 $CD \perp DB$, 连接 BH , 在 $\triangle BHC$ 中, $BC = 4, HC = \frac{9}{5}, \cos \angle BCH = \frac{4}{5}$, 则 $BH^2 = BC^2 + CH^2 - 2BC \cdot CH \cos \angle BCH$,

则 $BH = \frac{\sqrt{193}}{5}$, 又 $DC = 3, BC = 4, DB = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \frac{\sqrt{337}}{5}$,

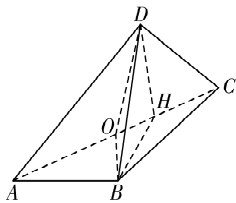
则 $CD^2 + DB^2 \neq BC^2$ 与 $CD \perp DB$ 矛盾, 故 C 错误.

因为二面角 $D-AC-B$ 为直二面角, 所以直线 AD 在平面 ABC 上的射影与直线 AC 重合, 则直线 DA 与平面 ABC 所成角为 $\angle DAC$, 其余弦值为 $\frac{4}{5}$, 故 D 错误. 故选 AB.

4. C 必刷题型 ⊙ 利用空间向量法解决空间角问题

【解析】连接 DB , 由底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, 得 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 故 $PB \perp AD$.

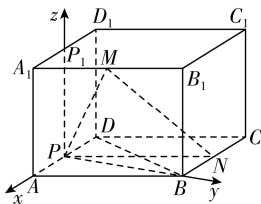
取 A_1D_1 中点 P_1 , 连接 PP_1 , 因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱, 所以 $PP_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $AD, PB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PP_1 \perp AD, PP_1 \perp PB$.





不妨设 $AA_1 = \sqrt{2}$, 所以 $AB = 2$, 故 $PA = 1, PB = \sqrt{3}$.

由 PP_1, AD, PB 两两互相垂直, 故以 P 为坐标原点, PA, PB, PP_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $P(0, 0, 0), A(1, 0, 0), A_1(1, 0, \sqrt{2}), M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right),$
 $N(-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{2}\right), \overrightarrow{PN} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AA_1} =$
 $(0, 0, \sqrt{2}).$

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$.

设平面 PMN 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{2}z = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PN} = -x + \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

取 $x = 2\sqrt{3}$, 则 $y = 2, z = -\sqrt{6}$, 故 $\mathbf{n}_2 = (2\sqrt{3}, 2, -\sqrt{6})$.

因为 MN 与 AA_1 所成的角为 α , MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 β , 二面角 $M-PN-B$ 的平面角为 γ , 其中 $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{所以 } \cos \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AA_1} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AA_1}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\sin \beta = |\cos \langle \overrightarrow{MN}, \mathbf{n}_1 \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\mathbf{n}_1|} = \frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{5} \times 1} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$\cos \gamma = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|-\sqrt{6}|}{1 \times \sqrt{22}} = \frac{\sqrt{33}}{11}.$$

因为 $y = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

且 $\frac{\sqrt{15}}{5} > \frac{\sqrt{10}}{5} > \frac{\sqrt{33}}{11}$, 所以 $\gamma > \alpha > \beta$. 故选 C.

5. AC 必刷题型 ⊙ 直线与平面所成角、平面与平面的夹角

【解析】不妨设 $PA = 6$, 直线 PC 与平面 BMN 所成角为 θ , 平面 PBD 与平面 BMN 的夹角为 φ .

以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(6, 0, 0), C(6, 6, 0), D(0, 6, 0), P(0, 0, 6), M(3, 3, 3)$, 所以 $\overrightarrow{PC} = (6, 6, -6),$
 $\overrightarrow{PB} = (6, 0, -6), \overrightarrow{PD} = (0, 6, -6), \overrightarrow{BM} = (-3, 3, 3).$

设平面 PBD 的法向量 $\mathbf{m} = (x_0, y_0, z_0)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases}$ 即



$$\begin{cases} 6x_0 - 6z_0 = 0, \\ 6y_0 - 6z_0 = 0, \end{cases} \text{ 令 } x_0 = 1, \text{ 则 } \mathbf{m} = (1, 1, 1).$$

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 由 $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ND}$, 得 $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$, 故 $N(0, 2, 4)$,

$\overrightarrow{NM} = (3, 1, -1)$, 设平面 BMN 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{NM} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -3x + 3y + 3z = 0, \\ 3x + y - z = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (1, -1, 2),$$

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PC}| |\mathbf{n}|} = \frac{12}{6\sqrt{3} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos \varphi = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ 故 A,}$$

C 正确.

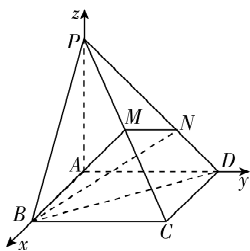
当 $k = 2$ 时, $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{ND}$, 则 $\overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PD}$, 故 $N(0, 4, 2)$, $\overrightarrow{NM} = (3,$

$-1, 1)$, 设平面 BMN 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{NM} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -3x_1 + 3y_1 + 3z_1 = 0, \\ 3x_1 - y_1 + z_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } x_1 = 1, \text{ 则 } \mathbf{n}_1 = (1, 2,$$

$$-1), \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\overrightarrow{PC}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{24}{6\sqrt{3} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \varphi =$$

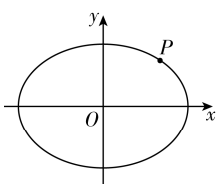
$$\frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ 故 B, D 错误. 故选 AC.}$$



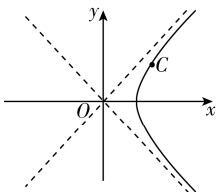
6. A 必刷题型 ② 二面角余弦值的最值问题

【解析】取 AB 中点为 O , 因为 $PA + PB = 4 > AB$, 所以在平面 PAB 内, 以 O 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴建立平面直角

坐标系, 如图①所示, 则点 P 的坐标满足方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ (提示: 椭圆的定义).



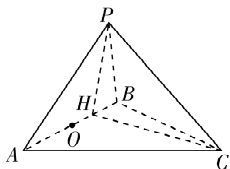
图①



图②

因为 $CA - CB = 2 < AB$, 所以在平面 ABC 内, 以 O 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 如图②所示, 则点 C 的坐标满足方程 $x^2 - y^2 = 1 (x > 0)$ (提示: 双曲线的定义).

如图③, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 过点 P 作 $PH \perp AB$ 于点 H , 连接 CH , 因为 $AB \perp PC$, $PH \cap PC = P$, $PH, PC \subset$ 平面 PHC , 所以 $AB \perp$ 平面 PHC , 又 $CH \subset$ 平面 PHC , 所以 $AB \perp CH$.



图③

则二面角 $P-AB-C$ 的平面角为 $\angle PHC$.

关键点

方法一: 由 P 的轨迹可得 $PH^2 = 2 - \frac{x^2}{2}$, 由 C 的轨迹可得 $CH^2 = x^2 - 1$, 且 $1 < x < 2$,

在 $\triangle PHC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle PHC = \frac{PH^2 + CH^2 - PC^2}{2PH \cdot CH} =$

$$\begin{aligned} & \frac{2 - \frac{x^2}{2} + x^2 - 1 - 1}{2\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \\ & \frac{x^2}{2\sqrt{2} \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{2x^2 - 2}} \geq \frac{x^2}{\sqrt{2} \left(2 - \frac{x^2}{2} + 2x^2 - 2 \right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

当且仅当 $2 - \frac{x^2}{2} = 2x^2 - 2$, 即 $x^2 = \frac{8}{5}$ 时等号成立, 所以

$\cos \angle PHC$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 故选 A.

方法二: 不妨设 $OH = 2\cos \theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,

则 $PH = \sqrt{2}\sin \theta$, $CH = \sqrt{4\cos^2 \theta - 1}$,

所以 $\cos \angle PHC = \frac{2\sin^2 \theta + 4\cos^2 \theta - 1 - 1}{2\sqrt{2}\sin \theta \sqrt{4\cos^2 \theta - 1}} = \frac{2\cos^2 \theta}{2\sqrt{2}\sin \theta \sqrt{4\cos^2 \theta - 1}} =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta \sqrt{3 - 4\sin^2 \theta}},$$

所以 $\cos^2 \angle PHC = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \sin^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta (3 - 4\sin^2 \theta)}$.

令 $1 - \sin^2 \theta = t$, $\frac{1}{4} < t < 1$, 则 $\cos^2 \angle PHC = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \sin^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta (3 - 4\sin^2 \theta)} =$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{(1-t)(4t-1)} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{\left(\frac{1-t+4t-1}{2}\right)^2} = \frac{2}{9},$$

当且仅当 $1-t=4t-1$, 即 $t = \frac{2}{5} = 1 - \sin^2 \theta$ 时等号成立,

易错点

所以当且仅当 $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{5}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 时, $(\cos \angle PHC)_{\min} =$

$\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 A.

7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 必刷考点 ⊙ 向量法求异面直线所成角的余弦值

【解析】设 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$, 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, 所以 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{BD_1} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})^2 - \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}^2 = 4 + 4\cos \theta$, $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = \overrightarrow{AB}^2 +$



$\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 8\cos \theta + 6$, 同理可得 $|\overrightarrow{BD_1}|^2 = 6$.

设直线 AC_1 与 BD_1 所成的角为 α , 则 $\cos \alpha = \left| \frac{4\cos \theta + 4}{\sqrt{6} \times \sqrt{8\cos \theta + 6}} \right| = \left| \frac{4\cos \theta + 4}{2\sqrt{3} \times \sqrt{4\cos \theta + 3}} \right|$, 令 $\sqrt{4\cos \theta + 3} = t \in (0, \sqrt{7})$, 则 $\cos \alpha = \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{3}t} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (提示: 换元法的应用), 当且仅当 $t = \frac{1}{t}$, 即 $t = 1$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

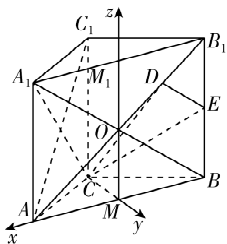
8. 必刷考点 ④ 线面平行的判定、异面直线所成角、线面角的正弦值

(1) 【证明】在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 令 $A_1B \cap AB_1 = O$, 则 O 是 AB_1 的中点.

由 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB_1}$, $\lambda = \frac{3}{4}$, 得 D 是 OB_1 的中点, 而点 E 为 BB_1 的中点, 则 $DE \parallel OB$, 即 $DE \parallel A_1B$, 而 $DE \not\subset$ 平面 A_1BC , $A_1B \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $DE \parallel$ 平面 A_1BC .

(2) 【解】(i) 分别取 AB, A_1B_1 的中点 M, M_1 , 连接 CM, MM_1 , 则 $MM_1 \parallel AA_1$, 又 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $MM_1 \perp$ 平面 ABC .

由 $AC = BC$, 得 $CM \perp AB$, 则直线 MA, CM, MM_1 两两垂直, 所以以点 M 为原点, 向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MM_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图所示空间直角坐标系.



令 $AA_1 = AB = 2t$, $CM = a$, 则 $A(t, 0, 0)$, $C(0, -a, 0)$, $C_1(0, -a, 2t)$, $B_1(-t, 0, 2t)$, $E(-t, 0, t)$, 所以 $\overrightarrow{CA} = (t, a, 0)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 2t)$, $\overrightarrow{AB_1} = (-2t, 0, 2t)$, $\overrightarrow{AC_1} = (-t, -a, 2t)$.

设平面 AA_1C_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA} = tx + ay = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 2tz = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = t, \text{ 得 } \mathbf{n} = (-a, t, 0),$$

设平面 AB_1C_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB_1} = -2tx_1 + 2tz_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC_1} = -tx_1 - ay_1 + 2tz_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_1 = t, \text{ 得 } \mathbf{m} = (a, t, a).$$

由平面 AA_1C_1 与平面 AB_1C_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$,

$$\text{得 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{|-a^2 + t^2|}{\sqrt{2a^2 + t^2} \cdot \sqrt{a^2 + t^2}} = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

解得 $a^2 = 2t^2$ 或 $13a^2 = 7t^2$, 由 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 得 $CM > AM$,

关键点

即 $a > t$, 则 $a^2 = 2t^2$, 即 $a = \sqrt{2}t$.

设异面直线 AB_1 与 CE 所成的角为 α , 又 $\overrightarrow{CE} = (-t, \sqrt{2}t, t)$, 则

$$\cos \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CE} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{CE}|} = \frac{4t^2}{\sqrt{4t^2 + 4t^2} \cdot \sqrt{4t^2}} =$$



$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 故 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 所以异面直线 AB_1 与 CE 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

(ii) 由 (i) 知, $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB_1} = (-2t\lambda, 0, 2t\lambda)$, 则 $D(t-2t\lambda, 0, 2t\lambda)$, $\overrightarrow{CD} = (t-2t\lambda, \sqrt{2}t, 2t\lambda)$, 而平面 AB_1C_1 的一个法向量 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}t, t, \sqrt{2}t)$, 设直线 CD 与平面 AB_1C_1 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CD}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{CD}| |\mathbf{m}|} = \frac{|2\sqrt{2}t^2|}{\sqrt{3t^2 - 4t^2\lambda + 8t^2\lambda^2} \cdot \sqrt{5t^2}} = \frac{4}{5}, \text{ 所以 } \lambda = \frac{1}{4}.$$

9. 必刷考点 ⊙ 异面直线所成角、二面角

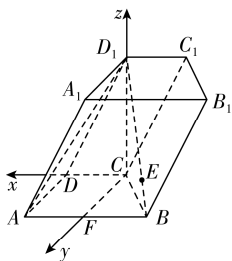
(1) 【证明】因为 $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, 所以 $AD \perp CD$.

因为 $CD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $CD_1 \perp AD$.

因为 $CD \cap CD_1 = C$, $CD, CD_1 \subset$ 平面 C_1CDD_1 , 所以 $AD \perp$ 平面 C_1CDD_1 , 又 $AD \subset$ 平面 A_1ADD_1 , 所以平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 C_1CDD_1 .

(2) 【解】取 AB 中点 F , 连接 CF .

在梯形 $ABCD$ 中, 因为 $AB = 2CD$, $AB \parallel CD$, 所以 $AF \parallel CD$, $AF = CD$, 则四边形 $AFCD$ 为平行四边形, 则 $AD \parallel CF$, 由 $AD \perp CD$, 得 $CD \perp CF$, 易知 CD, CF, CD_1 两两垂直, 以 C 为原点, CD, CF, CD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立



空间直角坐标系, 如图所示.

在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = \sqrt{5}$, 则 $DD_1 = \sqrt{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle CDD_1$ 中, $CD_1 = \sqrt{DD_1^2 - CD^2} = 2$,

则 $C(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $D_1(0, 0, 2)$, $A_1(0, 1, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$, $\overrightarrow{AD_1} = (-1, -1, 2)$, $\overrightarrow{AA_1} = (-1, 0, 2)$.

连接 AD_1 , 设平面 ABD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} -2x = 0, \\ -x - y + 2z = 0, \end{cases}$$

取 $z = 1$, 则 $x = 0, y = 2$, 所以平面 ABD_1 的一个法向量 $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$.

$$\text{则点 } A_1 \text{ 到平面 } ABD_1 \text{ 的距离为 } d = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{0 + 4 + 1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

设直线 AA_1 与平面 ABD_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{d}{|\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{2}{5}$, 所

$$\text{以 } \cos \theta = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 因为 $AA_1 \parallel BB_1$, 且 $AE \subset$ 平面 ABD_1 , 所以当直线 AE 与 BB_1 所成角为 θ 时, 其余弦值取得最

$$\text{大值, 即为 } \frac{\sqrt{21}}{5}.$$



(3)【解】存在, $BE = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

由(2)可知 $\overrightarrow{CA} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$, $\overrightarrow{BD_1} = (1, -1, 2)$.

因为 $E \in BD_1$, 所以 $\overrightarrow{BE} // \overrightarrow{BD_1}$, 设 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD_1} = (\lambda, -\lambda, 2\lambda)$, $0 < \lambda \leq 1$, 则 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = (\lambda - 2, -\lambda, 2\lambda)$.

设平面 AEB 的法向量为 $\mathbf{m}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 可得

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{m}_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} -2x_1 = 0, \\ (\lambda - 2)x_1 - \lambda y_1 + 2\lambda z_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } z_1 = 1, \text{ 则 } x_1 = 0, y_1 = 2, \text{ 所以平面 } AEB \text{ 的一个法向量 } \mathbf{m}_1 = (0, 2, 1).$$

设平面 AEC 的法向量为 $\mathbf{m}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 可得 $\begin{cases} \mathbf{m}_2 \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \\ \mathbf{m}_2 \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases}$ 则

$$\begin{cases} x_2 + y_2 = 0, \\ (\lambda - 2)x_2 - \lambda y_2 + 2\lambda z_2 = 0, \end{cases} \text{ 令 } z_2 = -\lambda + 1, \text{ 则 } x_2 = \lambda, y_2 = -\lambda, \text{ 所以}$$

平面 AEC 的一个法向量 $\mathbf{m}_2 = (\lambda, -\lambda, 1 - \lambda)$.

设二面角 $B-AE-C$ 的大小为 α ,

$$\text{则 } |\cos \alpha| = \frac{|\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2|}{|\mathbf{m}_1| \cdot |\mathbf{m}_2|} = \frac{|-2\lambda + 1 - \lambda|}{\sqrt{5} \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + (1 - \lambda)^2}} = \frac{|1 - 3\lambda|}{\sqrt{5} \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 1}},$$

由二面角 $B-AE-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} =$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 即 } \frac{|1 - 3\lambda|}{\sqrt{5} \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 化简可得 } 3\lambda^2 - 2\lambda = 0, \text{ 解得 } \lambda =$$

$$\frac{2}{3} \text{ 或 } \lambda = 0, \text{ 由 } 0 < \lambda \leq 1, \text{ 得 } \lambda = \frac{2}{3}, \text{ 故 } BE = |\overrightarrow{BE}| = \left| \frac{2}{3} \overrightarrow{BD_1} \right| =$$

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

10. 必刷题型 ② 点到平面的距离, 面面角的余弦值的最值

(1)【证明】取 AC 的中点 E , 连接 SE, BE .

$\because AB = BC, SA = SC$, 且 AC 的中点为 E , $\therefore SE \perp AC, BE \perp AC$, 又 $SE \cap BE = E, SE, BE \subset$ 平面 SBE , 故 $AC \perp$ 平面 SBE .

$\because SB \subset$ 平面 SBE , $\therefore AC \perp SB$.

(2)【解】若 $SC \perp BC$, 由 $\triangle CBS \cong \triangle ABS$, 得 $SA \perp BA$.

取 BS 的中点 O , 连接 OA, OC , 则 O 到 A, B, C, S 四点的距离

相等 (提示: 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边一半

可知 $AO = \frac{1}{2}SB = CO$), 故 O 为三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球

心 (提示: 外接球的定义).

$\because AB = BC = 2, AS = CS = 2\sqrt{2}$, 故 $SE = \sqrt{6}, SB = 2\sqrt{3}, EB = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 在 $\triangle SEB$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle SEB = \frac{SE^2 + EB^2 - SB^2}{2 \cdot SE \cdot EB} =$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } \angle SEB \in (0, \pi), \text{ 故 } \sin \angle SEB = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

设 S 到平面 ABC 的距离为 h_1 , B 到平面 SAC 的距离为 h_2 ,

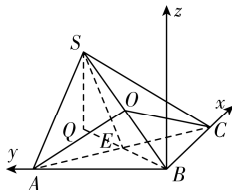
$$\therefore h_1 = SE \cdot \sin(\pi - \angle SEB) = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 2,$$



由等体积法可得 $V_{S-ABC} = V_{B-ACS}$, 即 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times h_1 = \frac{1}{3}S_{\triangle ASC} \times h_2$,

$$\text{从而 } h_2 = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot h_1}{S_{\triangle ASC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2}{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 } O \text{ 到平面 } SAC$$

的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(3)【解】(建系法)以 B 为原点, BC, BA 所在直线分别为 x, y 轴, 过 B 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Bxyz$, 过点 S 作平面 ABC 的垂线, 垂足为 Q , 连接 EQ , 易知 Q, E, B 三点共线.

设 $\angle SEQ = \theta$ 为翻折过程中所旋转的角度, 则 $SQ = \sqrt{6} \sin \theta$,

关键点

$QB = \sqrt{2} + \sqrt{6} \cos \theta$, 故 $B(0, 0, 0), C(2, 0, 0), A(0, 2, 0), Q(1 + \sqrt{3} \cos \theta, 1 + \sqrt{3} \cos \theta, 0), S(1 + \sqrt{3} \cos \theta, 1 + \sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{6} \sin \theta)$, 则 $\overrightarrow{BC} = (2, 0, 0), \overrightarrow{BS} = (1 + \sqrt{3} \cos \theta, 1 + \sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{6} \sin \theta), \overrightarrow{CS} = (-1 + \sqrt{3} \cos \theta, 1 + \sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{6} \sin \theta), \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0)$.

设平面 SBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 2x_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BS} = (1 + \sqrt{3} \cos \theta)x_1 + (1 + \sqrt{3} \cos \theta)y_1 + (\sqrt{6} \sin \theta)z_1 = 0, \end{cases}$$

取 $y_1 = \sqrt{6} \sin \theta$, 则 $x_1 = 0, z_1 = -(1 + \sqrt{3} \cos \theta)$,

$$\therefore \mathbf{m} = (0, \sqrt{6} \sin \theta, -1 - \sqrt{3} \cos \theta).$$

设平面 SAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x_2 - 2y_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CS} = (-1 + \sqrt{3} \cos \theta)x_2 + (\sqrt{3} \cos \theta + 1)y_2 + (\sqrt{6} \sin \theta)z_2 = 0, \end{cases}$$

取 $x_2 = \sin \theta$, 则 $y_2 = \sin \theta, z_2 = -\sqrt{2} \cos \theta$, $\therefore \mathbf{n} = (\sin \theta, \sin \theta, -\sqrt{2} \cos \theta)$.

设平面 SBC 与平面 SAC 的夹角为 α ,

$$\text{故 } \cos \alpha = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot |\sqrt{3} + \cos \theta|}{\sqrt{7 - 3\cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta} \times \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta + 3}{7 - 3\cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta}}$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3} \cos \theta + 2}{7 - 3\cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta}}.$$

令 $\sqrt{3} \cos \theta + 2 = t, 2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}$, 故 $\cos \alpha =$

$$\sqrt{-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{1}{6 - \left(t + \frac{1}{t}\right)}},$$



由于 $t + \frac{1}{t} \geq 2$, 故 $\cos \alpha = \sqrt{-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{1}{6 - (t + \frac{1}{t})}} \geq \sqrt{\frac{1}{3}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当 $t = 1$, 即 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号,

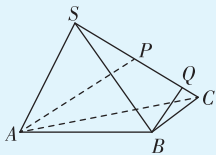
故平面 SAC 与平面 SBC 夹角余弦值的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

一题多解 (3) (向量基底法) 设平面 SAC 与平面 SBC 的

夹角为 $\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$,

如图, 过点 A 作 $AP \perp SC$ 于点 P , 过点 B 作 $BQ \perp SC$ 于点 Q , 设 $\angle BCQ =$

$\alpha \left(0 < \alpha < \frac{7\pi}{12}\right)$, 则 $AP = \sqrt{6}, SP = PC =$



$\sqrt{2}, BQ = 2\sin \alpha, PQ = \sqrt{2} - 2\cos \alpha$.

$\therefore \vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QB}$ (提示: 利用基向量转化),

$\therefore |\vec{AB}|^2 = |\vec{AP}|^2 + |\vec{PQ}|^2 + |\vec{QB}|^2 + 2\vec{AP} \cdot \vec{PQ} + 2\vec{AP} \cdot \vec{QB} + 2\vec{PQ} \cdot \vec{QB}$,

即 $4 = 6 + (\sqrt{2} - 2\cos \alpha)^2 + 4\sin^2 \alpha + 0 + 2\vec{AP} \cdot \vec{QB} + 0$ (*).

设平面 SAC 与平面 SBC 夹角的补角为 θ' , 则 $\theta' = \pi - \theta$,

易错点

$\vec{AP} \cdot \vec{QB} = \sqrt{6} \cdot 2\sin \alpha \cdot \cos \theta'$,

代入 (*) 式整理得 $6 + 2 - 4\sqrt{2}\cos \alpha + 4\sqrt{6}\sin \alpha \cos \theta' = 0$,

$\therefore \cos \theta' = \frac{4\sqrt{2}\cos \alpha - 8}{4\sqrt{6}\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\cos \alpha - \sqrt{2}}{\sin \alpha}$.

令 $f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{2}}{\sin x}, x \in \left(0, \frac{7\pi}{12}\right)$, 则 $f'(x) = \frac{-1 + \sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x}$,

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$, 即 $\left(\frac{\cos \alpha - \sqrt{2}}{\sin \alpha}\right)_{\max} = -1$.

而 $\cos \theta = \cos(\pi - \theta') = -\cos \theta'$,

$\therefore (\cos \theta)_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故平面 SAC 与平面 SBC 夹角余弦

值的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

真题风向练

11. 命题点 面面垂直的判定、线线所成角的余弦值的求解、建系法在立体几何中的应用

(1) 【证明】 $\because PA \perp$ 底面 $ABCD, AB \subset$ 底面 $ABCD, \therefore PA \perp AB$,

..... 1 分



又 $AB \perp AD, PA \cap AD = A, PA, AD \subset \text{平面 } PAD, \therefore AB \perp \text{平面 } PAD$ 3 分

又 $AB \subset \text{平面 } PAB, \therefore \text{平面 } PAB \perp \text{平面 } PAD$ 4 分

一题多解 $\because PA \perp \text{平面 } ABCD, PA \subset \text{平面 } PAB,$

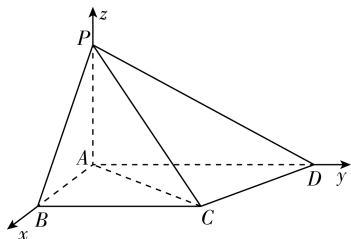
$\therefore \text{平面 } PAB \perp \text{平面 } ABCD$.

$\because \text{平面 } PAB \cap \text{平面 } ABCD = AB, AD \subset \text{平面 } ABCD, AD \perp AB,$

$\therefore AD \perp \text{平面 } PAB, \because AD \subset \text{平面 } PAD, \therefore \text{平面 } PAB \perp \text{平面 } PAD$ 4 分

(2)(i)【证明】方法一：第一步：建立空间直角坐标系，求出相应点的坐标.

$\because PA \perp \text{底面 } ABCD, AD \subset \text{底面 } ABCD, \therefore PA \perp AD$, 又 $AB \perp AD$, 则 PA, AB, AD 两两垂直, 故以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则由题易知 $A(0,0,0), B(\sqrt{2}, 0, 0), C(\sqrt{2}, 2, 0), D(0, 1+\sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{2})$ 6 分



第二步：设出点 O 的坐标，表示出 OB, OC, OD, OP .

设点 O 的坐标为 (x, y, z) ,

$\therefore OB = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2 + z^2}, OC = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-2)^2 + z^2},$

$OD = \sqrt{x^2 + (y-1-\sqrt{3})^2 + z^2}, OP = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\sqrt{2})^2}.$

..... 8 分

第三步：根据球心 O 到球面上任意一点的距离相等求出点 O 的坐标.

$\because$ 点 P, B, C, D 均在球 O 的球面上, $\therefore$ 由 $OB = OC$, 得 $y^2 = (y-2)^2$, 解得 $y = 1$; 由 $OB = OD$ 且 $y = 1$, 得 $(x-\sqrt{2})^2 + 1 = x^2 + 3$, 解得 $x = 0$; 由 $OB = OP$ 且 $x = 0$, 得 $2 + z^2 = (z-\sqrt{2})^2$, 解得 $z = 0$, $\therefore$ 点 O 的坐标为 $(0, 1, 0)$, 故点 O 在平面 $ABCD$ 内.

..... 10 分

方法二：第一步：求出点 B, C, D 所在圆 O' 的圆心坐标.

$\because$ 点 P, B, C, D 均在球 O 的球面上,

$\therefore$ 点 B, C, D 在同一个圆上, 设其圆心为 O' ,

则点 O' 在 BC 的垂直平分线上. 5 分

$\because PA \perp \text{底面 } ABCD, AD \subset \text{底面 } ABCD, \therefore PA \perp AD$, 又 $AB \perp AD$, 则 AB, AD, AP 两两垂直, 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0), B(\sqrt{2}, 0, 0), C(\sqrt{2}, 2, 0), D(0, 1+\sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{2})$ 6 分



设 $O'(x, 1, 0)$, 则 $\overrightarrow{O'B} = (\sqrt{2}-x, -1, 0)$, $\overrightarrow{O'D} = (-x, \sqrt{3}, 0)$,

由 $|\overrightarrow{O'B}| = |\overrightarrow{O'D}|$, 得 $\sqrt{(\sqrt{2}-x)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(-x)^2 + (\sqrt{3})^2}$,

解得 $x=0$, $\therefore$ 点 O' 的坐标为 $(0, 1, 0)$, 即 O' 在 AD 上. 8 分

第二步: 求出点 O' 到点 P, B, C, D 的距离相等, 则点 O 与点 O' 重合, 即可证明点 O 在平面 $ABCD$ 内.

又 $\because O'P = \sqrt{PA^2 + AO'^2} = \sqrt{3} = O'D = O'B = O'C$, $\therefore$ 点 O 与点 O' 重合,

$\therefore$ 点 O 在平面 $ABCD$ 内. 10 分

(ii) 【解】由 (i) 易知 $\overrightarrow{PO} = (0, 1, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{2}, 2, 0)$,

..... 12 分

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{PO}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 14 分

$\therefore$ 直线 AC 与 PO 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 15 分

一题多解

$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP}$, 且 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}$,

$|\overrightarrow{PO}| = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PO} = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AO}) \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AO}^2 - 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 - 0 + 2 - 0 = 2$.

$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PO} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{PO}|} = \frac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore$ 直线 AC 与 PO 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 15 分



第6节 空间向量的应用——空间距离



题型上分练

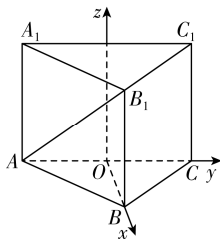
1. C 【解析】取 AC 的中点为 O , 连接 BO , 则 $BO \perp AC$, 且 $BO = \sqrt{3}$.

以 OB 所在直线为 x 轴, OC 所在直线为 y 轴, 点 O 与线段 A_1C_1 中点的连线所在直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$, 则 $A(0, -1, 0)$, $B_1(\sqrt{3}, 0, \sqrt{2})$, $C(0, 1, 0)$, $\overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CA} = (0, -2, 0)$.

$\overrightarrow{CA}$ 在 $\overrightarrow{AB_1}$ 上的投影向量的长度为 $\frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故点

C 到直线 AB_1 的距离 $d = \sqrt{|AC|^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$,

故选 C.



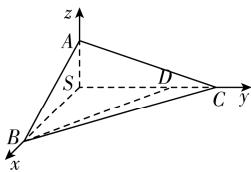
2. B 【解析】根据题意, 以 S 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(2, 0, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $A(0, 0, 1)$, $C(0, 3, 0)$.

因为点 E 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $E\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$, 则 $\overrightarrow{EB} = \left(\frac{4}{3}, -1, -\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{DB} = (2, -2, 0)$,

则 $\cos \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle = \frac{|\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{EB}| |\overrightarrow{DB}|} = \frac{\frac{8}{3} + 2}{\sqrt{\frac{16}{9} + 1 + \frac{1}{9}} \times 2\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{52}},$

$\sin \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}},$

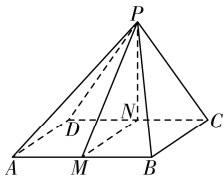
所以点 E 到直线 BD 的距离为 $|\overrightarrow{EB}| \cdot \sin \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle = \sqrt{\frac{16}{9} + 1 + \frac{1}{9}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 B.



3. A 【解析】取 AB 的中点为 M , CD 的中点为 N , 连接 PM , PN , MN , 如图所示, 因为 $PA = PB = 2$, $PC = PD = \sqrt{3}$, 所以 $PM \perp AB$, $PN \perp CD$, 又 $AB \parallel CD$, 所以 $PN \perp AB$, 又 $PM \cap PN = P$, $PM, PN \subset$ 平面 PMN , 所以 $AB \perp$ 平面 PMN ,



又 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PMN \perp$ 平面 PAB .



因为 $AB \parallel CD$, $AB \subset$ 平面 PAB , $CD \not\subset$ 平面 PAB , 所以 $CD \parallel$ 平面 PAB , 则直线 CD 到平面 PAB 的距离为点 N 到平面 PAB 的距

关键点

离, 即点 N 到直线 PM 的距离.

在 $\text{Rt}\triangle PAM$ 中, $PM = \sqrt{PA^2 - AM^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle PDN$ 中, $PN = \sqrt{PD^2 - DN^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$, $MN = AD = 2$.

在 $\triangle PMN$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle MPN = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} =$

$$\frac{\sqrt{6}}{12}, \text{ 则 } \sin \angle MPN = \frac{\sqrt{138}}{12},$$

所以点 N 到直线 PM 的距离为 $PN \cdot \sin \angle MPN = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{138}}{12} =$

$$\frac{\sqrt{69}}{6}. \text{ 故选 A.}$$

4. B 【解析】如图, 设 AD 与 BC 的中点分别为 M, N , 连接 EM, MN, NF , 因为侧面 BCF 是等腰直角三角形, 所以 $BF = CF$, 又 N 为 BC 中点, 所以 $FN \perp BC$, $FN = \frac{1}{2}BC = 9$.

又底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $BC \perp AB$, 又 $EF \parallel AB$, 所以 $BC \perp EF$, 因为 M, N 分别为 AD 与 BC 的中点, 所以 $MN \parallel AB$, 故 $EF \parallel MN$, 故 E, F, N, M 四点共面.

因为 $BC \perp EF, BC \perp FN, FN \cap EF = F, FN, EF \subset$ 平面 $EFNM$, 所以 $BC \perp$ 平面 $EFNM$, 因为 $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $EFNM \perp$ 平面 $ABCD$.

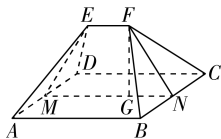
过点 F 作 $FG \perp MN$, 垂足为 G , 则 FG 的长度就是 EF 与 MN

关键点

的距离, 即 EF 与平面 $ABCD$ 的距离,

由题意得 $GN = \frac{MN - EF}{2} = 6$, 所以 $FG = \sqrt{FN^2 - GN^2} = 3\sqrt{5}$, 则

EF 到平面 $ABCD$ 的距离为 $3\sqrt{5}$. 故选 B.



5. BD 【解析】如图, 以 A 为坐标原点, 以 AB, AD, AA_1 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0), A_1(0, 0, 2), B_1(2, 0, 2), C_1(2, 2, 2), D_1(0, 2, 2), E(1, 0, 2), O(1, 1, 2)$.

对于 $A, \vec{BE} = (-1, 0, 2), \vec{B_1C} = (0, 2, -2)$, 设 BE 与 B_1C 所成

角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{B_1C}, \vec{BE} \rangle| = \frac{|\vec{B_1C} \cdot \vec{BE}|}{|\vec{B_1C}| |\vec{BE}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} =$



$\frac{\sqrt{10}}{5}, \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{5}$. 故 **A** 错误.

对于 **B**, 因为 $AB \perp$ 平面 A_1ADD_1 , $A_1D \subset$ 平面 A_1ADD_1 , 所以 $AB \perp A_1D$, 又 $A_1D \perp AD_1$, $AD_1 \cap AB = A$, $AD_1, AB \subset$ 平面 ABC_1D_1 , 所以 $A_1D \perp$ 平面 ABC_1D_1 , 则平面 ABC_1D_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DA_1} = (0, -2, 2)$, 又 $\overrightarrow{C_1O} = (-1, -1, 0)$, 所以点 O 到平面 ABC_1D_1 的距离 $d_1 = \frac{|\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 **B** 正确.

对于 **C**, 因为 $A_1D_1 \parallel BC, A_1D_1 = BC$, 所以四边形 A_1BCD_1 为平行四边形, 所以 $A_1B \parallel CD_1$, 又因为 $CD_1 \subset$ 平面 $B_1CD_1, A_1B \not\subset$ 平面 B_1CD_1 , 所以 $A_1B \parallel$ 平面 B_1CD_1 , 同理可得 $BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 . 因为 $A_1B \cap BD = B, A_1B, BD \subset$ 平面 A_1BD , 所以平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 , 所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离等于点 D_1 到平面 A_1BD 的距离.

$\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -2), \overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -2), \overrightarrow{A_1D_1} = (0, 2, 0)$, 设平面 A_1BD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} 2x - 2z = 0, \\ 2y - 2z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 得 $x = y = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, 所以点 D_1

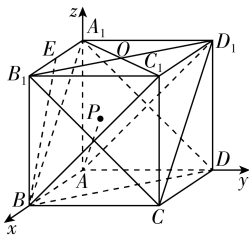
到平面 A_1BD 的距离 $d_2 = \frac{|\overrightarrow{A_1D_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故平面 A_1BD

与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 **C** 错误.

对于 **D**, 因为 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 2, 0), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{4}{3}\right)$, 则 $\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} =$

$\frac{3}{2}$, 所以点 P 到直线 AB 的距离 $d_3 = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - \left|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right|^2} =$

$\sqrt{\frac{9}{4} + 1 + \frac{16}{9} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$, 故 **D** 正确. 故选 **BD**.

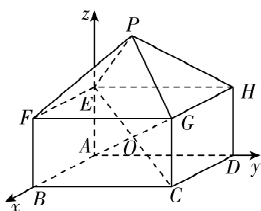


6. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【解析】由正四棱柱的性质知, 外接球的球心 O 为正四棱柱的体对角线的交点.

设正四棱柱和正四棱锥的高为 h , 外接球的半径为 r , 则 $r =$

$\frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 8} = h +$





$$\frac{1}{2}h, \text{解得 } h=1.$$

如图所示,以 A 为坐标原点, AB, AD, AE 所在直线分别为 x, y, z 轴,建立空间直角坐标系,则 $E(0,0,1), F(2,0,1), P(1,1,2),$

$$O\left(1,1,\frac{1}{2}\right), \text{则 } \overrightarrow{EF}=(2,0,0), \overrightarrow{EP}=(1,1,1), \overrightarrow{EO}=\left(1,1,-\frac{1}{2}\right).$$

设平面 EFP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z),$

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{EF}=2x=0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{EP}=x+y+z=0, \end{cases} \text{令 } y=1, \text{则 } x=0, z=-1, \text{所以平面 } EFP$$

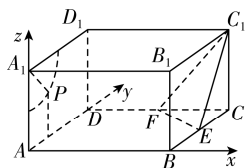
的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1).$ 所以球心 O 到平面 EFP 的距离

$$\text{为 } \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{EO}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

7. $\frac{14}{3}$ 【解析】由题意,以 A 为坐标原

点, AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz,$ 则 $A_1(0,0,2), E(4,2,$

$0), F(2,4,0), C_1(4,4,2).$



设 $P(0,y,z), 0 \leq y \leq 2,$ 则 $z = \sqrt{y^2 + (z-2)^2},$ 整理得 $z = \frac{y^2}{4} + 1.$

由 $\overrightarrow{EC_1} = (0,2,2), \overrightarrow{FC_1} = (2,0,2),$ 设 $\boldsymbol{m} = (a,b,c)$ 是平面

$$EFC_1 \text{ 的一个法向量, 则 } \begin{cases} \overrightarrow{EC_1} \cdot \boldsymbol{m} = 2b+2c=0, \\ \overrightarrow{FC_1} \cdot \boldsymbol{m} = 2a+2c=0, \end{cases} \text{取 } c=-1, \text{ 则 } \boldsymbol{m} =$$

$(1,1,-1).$

又 $\overrightarrow{PC_1} = (4,4-y,2-z),$ 则点 P 到平面 EFC_1 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{PC_1} \cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|} = \frac{|6-y+z|}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{综上, } d = \frac{\left|7-y+\frac{y^2}{4}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{(y-2)^2+24}{4\sqrt{3}}, \text{ 故 } y=0 \text{ 时, } d_{\max} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

显然 $\triangle EFC_1$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形, 故 $S_{\triangle EFC_1} = \frac{1}{2} \times$

$(2\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$ 所以三棱锥 $P-EFC_1$ 的体积的最大值为

$$\frac{1}{3} \times \frac{7}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = \frac{14}{3}.$$

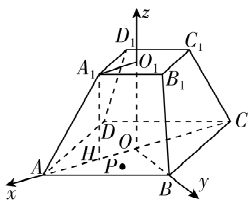
8. $\frac{8\sqrt{3}}{3} \quad \frac{5\sqrt{2}\pi}{3}$ 【解析】如图①, 设 O_1, O 分别为正四棱台上、

下底面的中心, 连接 $A_1O_1, AC, O_1O, OB,$ 则 $A_1O_1=2, AO=4,$

$O_1O \perp$ 平面 $ABCD.$

过 A_1 作 $A_1H \parallel O_1O$ 交 AO 于点 $H,$ 则 $A_1H \perp AO, AH = \frac{1}{2}AO = 2,$

又 $A_1A = 2\sqrt{2},$ 所以 $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = 2,$ 则 $O_1O = A_1H = 2.$



图①

如图①,以 O 为坐标原点, OA, OB, OO_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(4,0,0), B(0,4,0), C(-4,0,0), C_1(-2,0,2)$, 所以 $\overrightarrow{AB}=(-4,4,0), \overrightarrow{CC_1}=(2,0,2), \overrightarrow{AC}=(-8,0,0)$.

设与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC_1}$ 都垂直的向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} -4x+4y=0, \\ 2x+2z=0, \end{cases}$$
 令 $x=1$, 则 $y=1, z=-1$, 故 $\mathbf{n}=(1, 1, -1)$, 则异面

直线 AB, CC_1 之间的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, 则点 P 到

直线 CC_1 的距离的最小值为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (提示: 异面直线间的距离

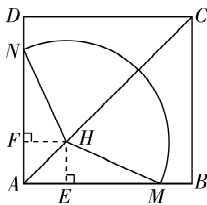
是其中一条直线上的动点到另一条直线距离的最小值).

底面 $ABCD$ 的平面图如图②所示, 过 H 作 $HF \perp AD$ 于 F , $HE \perp AB$ 于 E . 因为 $A_1P=2\sqrt{3}, A_1H=2$, 所以 $PH=2\sqrt{2}$, 所以点 P 在正方形 $ABCD$ 内, 以 H 为圆心, $2\sqrt{2}$ 为半径的圆弧 MN

上, 因为 $AH=2$, 所以 $FH=\sqrt{2}$, 又 $NH=2\sqrt{2}$, 所以 $\angle NHF=\frac{\pi}{3}$,

同理 $\angle MHE=\frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle NHM=2\pi-\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$, 所以点 P

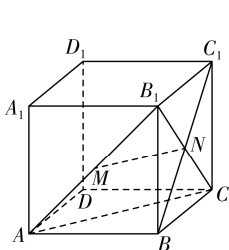
的轨迹长度为 $\frac{5\pi}{6} \times 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{3}$.



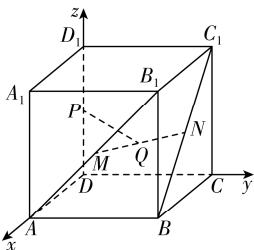
图②

9. (1) 【证明】如图①, 连接 B_1C, AC , 当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时, M 是 AB_1 的中点, N 是 BC_1 的中点, 易知 N 也为 B_1C 的中点, 所以 $MN \parallel AC$.

因为 $D_1D \perp$ 平面 $ABCD, AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $D_1D \perp AC$, 所以 $D_1D \perp MN$.



图①



图②



(2)【解】以 D 点为坐标原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图②所示的空间直角坐标系, 则 $D(0,0,0), A(1,0,0), B_1(1,1,1), C_1(0,1,1), B(1,1,0), D_1(0,0,1), \overrightarrow{AB_1}=(0,1,1), \overrightarrow{C_1B}=(1,0,-1)$, 所以 $\overrightarrow{AM}=(0, \lambda, \lambda), \overrightarrow{C_1N}=(\mu, 0, -\mu)$, 所以 $M(1, \lambda, \lambda), N(\mu, 1, 1-\mu)$, 所以 $\overrightarrow{MN}=(\mu-1, 1-\lambda, 1-\mu-\lambda)$.

易知 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$, 设直线 PQ 的方向向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$,

$$\text{由 } PQ \perp DD_1, PQ \perp MN, \text{ 得 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DD_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \end{cases}$$

$$\text{则 } \begin{cases} z = 0, \\ (\mu-1)x + (1-\lambda)y + (1-\mu-\lambda)z = 0, \end{cases}$$

令 $x=1-\lambda$, 则 $y=1-\mu$, 即 $\mathbf{n}=(1-\lambda, 1-\mu, 0)$, 又 $\overrightarrow{DM}=(1, \lambda, \lambda)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\overrightarrow{PQ}| &= \frac{|\overrightarrow{DM} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|1-\lambda+\lambda-\lambda\mu|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-2(\lambda+\mu)+2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2-2(\lambda+\mu)+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{|\lambda+\mu-1|} = \frac{\frac{1}{2}}{\left|\lambda+\frac{1}{2\lambda}-1\right|}. \end{aligned}$$

$$\text{由 } \begin{cases} 0 \leq \lambda \leq 1, \\ 0 \leq \frac{1}{2\lambda} \leq 1, \end{cases} \text{ 得 } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1,$$

易知 $y=\lambda+\frac{1}{2\lambda}-1$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 上单调递增, 所以 $y \in \left[\sqrt{2}-1, \frac{1}{2}\right]$, 所以 $|\overrightarrow{PQ}| \in \left[1, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$.

所以线段 PQ 的长的取值范围为 $\left[1, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$.

10. (1)【证明】连接 BC_1 , 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 因为 $AB=BC, AB \perp BC$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 为等腰直角三角形.

因为 D 为 A_1C_1 的中点, 所以 $B_1D \perp A_1C_1$, 又 $\angle BB_1A_1 = \angle BB_1C_1 = 60^\circ, A_1B_1 = B_1C_1, BB_1 = BB_1$, 所以 $\triangle BB_1C_1 \cong \triangle BB_1A_1$, 所以 $BC_1 = BA_1$.

因为 D 为 A_1C_1 的中点, 所以 $BD \perp A_1C_1$, 又 $BD \cap B_1D = D, BD, B_1D \subset \text{平面 } BB_1D$, 所以 $A_1C_1 \perp \text{平面 } BB_1D$, 又 $A_1C_1 \subset \text{平面 } AA_1C_1C$, 所以平面 $BB_1D \perp \text{平面 } AA_1C_1C$.

(2)【解】因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 为等腰直角三角形, $BD = B_1D = \sqrt{2}$, 所以 $DC_1 = DA_1 = B_1D = \sqrt{2}$, 则 $A_1B_1 = B_1C_1 = 2$.

由(1)知 $BD \perp A_1C_1$, 则 $BC_1 = BA_1 = \sqrt{DC_1^2 + DB^2} = 2$, 又 $\angle BB_1A_1 = \angle BB_1C_1 = 60^\circ$, 所以 $\triangle BB_1C_1$ 和 $\triangle BB_1A_1$ 为等边三角形, 所以 $BB_1 = BA_1 = 2$, 所以 $BD^2 + B_1D^2 = B_1B^2$, 所以 $BD \perp DB_1$.

以 D 为坐标原点, DB_1, DC_1, DB 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B_1(\sqrt{2}, 0, 0), C_1(0, \sqrt{2}, 0), A_1(0, -\sqrt{2}, 0), B(0, 0, \sqrt{2})$, 所以 $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{B_1B} = (-\sqrt{2}, 0,$



$$\sqrt{2}), \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{BC_1} = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{A_1B} = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

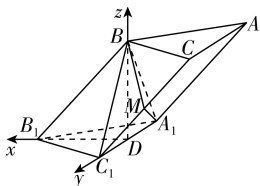
$$\text{所以 } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) + \frac{1}{2}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

设平面 A_1BM 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = \sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y=1, \text{ 则 } z=-1, x=3, \text{ 所以}$$

以平面 A_1BM 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (3, 1, -1)$, 所以点 A 到平面 A_1BM 的距离为

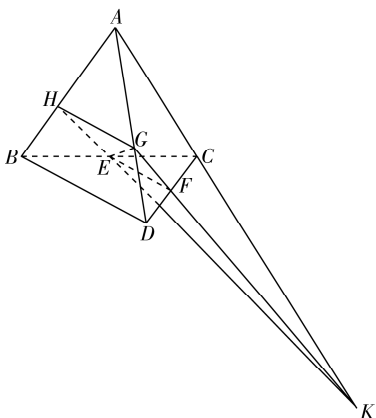
$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1A}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{11}.$$



11. (1) 【证明】若选择结论①, 由 E, F 分别为 BC, CD 的中点, 得 $EF \parallel BD$, 又 $BD \not\subset$ 平面 $EFG, EF \subset$ 平面 EFG , 则 $BD \parallel$ 平面 EFG . 又 $BD \subset$ 平面 ABD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $EFG = GH$, 所以 $BD \parallel GH$.

若选择结论②, 在 $\triangle ACD$ 中, $AG = 2GD, F$ 为 CD 的中点, 则 GF 与 AC 不平行.

如图, 设 $GF \cap AC = K$, 则 $K \in AC, K \in GF$. 又 $AC \subset$ 平面 $ABC, FG \subset$ 平面 EFG , 于是 $K \in$ 平面 $ABC, K \in$ 平面 EFG , 又平面 $ABC \cap$ 平面 $EFG = HE$, 因此 $K \in HE$, 所以 HE, GF, AC 相交于一点.



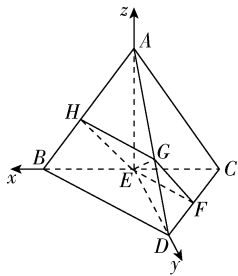
- (2) 【解】若第(1)问中选①, 由(1)知, $BD \parallel$ 平面 EFG , 则点 B 到平面 EFG 的距离即为 BD 与平面 EFG 的距离.

若第(1)问中选②, 由 E, F 分别为 BC, CD 的中点, 得 $EF \parallel BD$, 又 $BD \not\subset$ 平面 $EFG, EF \subset$ 平面 EFG , 于是 $BD \parallel$ 平面 EFG , 因此点 B 到平面 EFG 的距离即为 BD 与平面 EFG 的距离. 连接 EA, ED , 由 $\triangle ABC, \triangle BCD$ 均为正三角形, E 为 BC 的中点, 得 $EA \perp BC, ED \perp BC$.



又平面 $ABC \perp$ 平面 BCD , 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCD = BC$, $AE \subset$ 平面 ABC , 所以 $AE \perp$ 平面 BCD , 又 $ED \subset$ 平面 BCD , 所以 $EA \perp ED$.

以 E 为坐标原点, EB, ED, EA 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $E(0, 0, 0), B(2, 0, 0), F(-1, \sqrt{3}, 0), G(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}), \vec{EB} = (2, 0, 0), \vec{EF} = (-1, \sqrt{3}, 0), \vec{EG} = (0, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.



设平面 EFG 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{EF} \cdot \mathbf{n} = -x + \sqrt{3}y = 0, \\ \vec{EG} \cdot \mathbf{n} = \frac{4\sqrt{3}}{3}y + \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -2).$$

设点 B 到平面 EFG 的距离为 d , 则 $d = \frac{|\vec{EB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以直线 BD 与平面 EFG 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

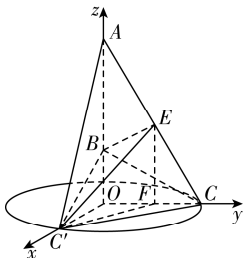
12. 【解】(1) 连接 AO, CO (图略).

在 $\triangle AOC$ 中, 由题可得 $AO = AB + BC \cos \frac{\pi}{3} = 3, BO = BC \cos \frac{\pi}{3} =$

$$1, CO = BC \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

因为新的几何体是以 AO 为高的圆锥减去以 BO 为高的圆锥后剩余的部分, 所以新的几何体的体积 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^2 \times (AO - BO) = 2\pi$.

(2) 如图, 取 OC 的中点为 F , 连接 $EF, C'F, BO$, 因为 E, F 分别为 AC, CO 的中点, 所以 $EF \parallel AO, EF = \frac{1}{2}AO = \frac{3}{2}$.



因为 $AO \perp$ 平面 OCC' , 所以 $EF \perp$ 平面 OCC' , 所以 $\angle EC'F$ 为 EC' 与底面 OCC' 所成的角,

$$\text{所以 } \sin \theta = \sin \angle EC'F = \frac{EF}{C'E} = \frac{EF}{\sqrt{EF^2 + C'F^2}}.$$



又因为 $OF = \frac{1}{2}OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $C'F_{\max} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$C'F_{\min} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $C'F \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right]$, 所以 $\sin \theta =$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C'F^2}{EF^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4C'F^2}{9}}} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

(3) 以 O 为坐标原点, OC', OC, OA 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 3), B(0, 0, 1), C(0, \sqrt{3}, 0), C'(\sqrt{3}, 0, 0), E\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{BE} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BC'} = (\sqrt{3}, 0, -1)$.

设平面 BEC' 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC'} = \sqrt{3}x_1 - z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_1 = 1, \text{ 则 } y_1 = -1, z_1 = \sqrt{3}, \text{ 即 } \mathbf{n} =$$

$$(1, -1, \sqrt{3}).$$

设 $AM \perp$ 平面 BEC' 于点 L , $\overrightarrow{AL} = \lambda \mathbf{n} = (\lambda, -\lambda, \sqrt{3}\lambda), \lambda \neq 0$,

则 $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} = (0, 0, 2) + (\lambda, -\lambda, \sqrt{3}\lambda) = (\lambda, -\lambda, 2 + \sqrt{3}\lambda)$,

由 $\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{AL} = 0$, 得 $\lambda^2 + \lambda^2 + \sqrt{3}\lambda(2 + \sqrt{3}\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

所以 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{AL} = (2\lambda, -2\lambda, 2 + 2\sqrt{3}\lambda) = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}, \frac{4\sqrt{3}}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, 易知 $\overrightarrow{CC'} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$,

设平面 BCC' 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CC'} = \sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}y_2 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC'} = \sqrt{3}x_2 - z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_2 = 1, \text{ 则 } y_2 = 1, z_2 = \sqrt{3}, \text{ 即 } \mathbf{m} =$$

$$(1, 1, \sqrt{3}).$$

所以点 M 到平面 BCC' 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \left| \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{5}}{\sqrt{5}} \right| =$

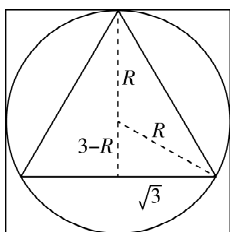
$$\frac{2\sqrt{15}}{25}.$$

专题 1 外接球、内切球、棱切球问题

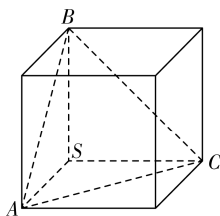


题型上分练

- 1. D** 【解析】作出轴截面图,显然球心在圆锥的高所在的直线上,记球的半径为 R ,由勾股定理得 $R^2 = 3 + (3-R)^2$,解得 $R = 2$,则圆柱的底面半径为 2,高为 4,故该圆柱的体积 $V = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$.

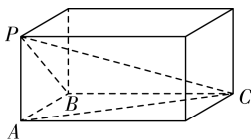


- 2. D** 【解析】有三条棱两两垂直的正三棱锥 $S-ABC$ 可以看成是正方体的一个角,补成正方体如图所示.



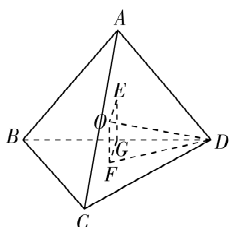
正方体的体对角线长是外接球的直径,因为 $AB = 2\sqrt{5}$,所以 $SA = SB = SC = \sqrt{10}$,则外接球直径为 $2R = \sqrt{3} \times \sqrt{10}$,所以 $R = \frac{\sqrt{30}}{2}$,所以外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 30\pi$. 故选 D.

- 3. D** 【解析】四个面都是直角三角形的三棱锥,将其补形为长方体,如图所示. 设三棱锥外接球的半径为 R ,易知三棱锥 $P-ABC$ 的外接球就是所补形成的长方体的外接球,则 $2R = PC = \sqrt{PA^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$,所以 $R = \frac{\sqrt{52}}{2}$,所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 52\pi$. 故选 D.



- 4. C** 【解析】过 $\triangle ABD$ 的中心 E 作平面 ABD 的垂线,过 $\triangle BCD$ 的中心 F 作平面 BCD 的垂线,两垂线交于点 O ,连接 OD , DF ,依据题中条件可知, O 为四面体 $ABCD$ 的外接球球心.

关键点



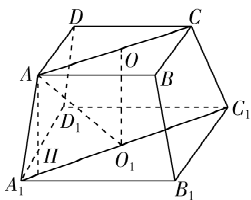
取 BD 中点 G ,连接 EG, FG . 由平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ,易证四



边形 $OEGF$ 为矩形, 则 $OF=EG$.

又因为 $AB=BC=CD=DA=BD=2\sqrt{3}$, 所以 $DF=2$, $OF=1$, 则 $OD=\sqrt{OF^2+FD^2}=\sqrt{5}$, 即外接球半径为 $\sqrt{5}$, 则该球的表面积为 $4\pi(\sqrt{5})^2=20\pi$. 故选 C.

5. D 【解析】如图, 连接 AC, A_1C_1 , 它们的中点分别记为 O, O_1 , 连接 AO_1, OO_1 , 易知 OO_1 为此正四棱台的高, 由题知 $AB=\frac{3}{4}A_1B_1=3\sqrt{2}$, 则 $A_1B_1=4\sqrt{2}$, 所以 $AC=6, AO=3, A_1C_1=8, A_1O_1=4$.



过点 A 作 A_1C_1 的垂线, 垂足为 H , 则 $A_1H=\frac{8-6}{2}=1$, 又 $AA_1=\sqrt{2}$, 则 $OO_1=AH=\sqrt{2-1}=1$,

$AO_1=\sqrt{AO^2+OO_1^2}=\sqrt{10}<A_1O_1=4$, 故能将正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 罩住的半球的最小半径 $R_1=4$.

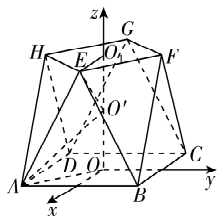
设该正四棱台外接球的球心到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离为 d , 则

关键点

$d^2+4^2=(d+1)^2+3^2=R_2^2$, 解得 $d=3, R_2=5$, 故 $\frac{R_2}{R_1}=\frac{5}{4}$, 故选 D.

6. B 【解析】取下底面正方形 $ABCD$ 的中心为坐标原点, 建立如图所示的坐标系, 则 $A(1, -1, 0), E(1, 0, \sqrt{3})$.

设几何体外接球的球心为 $O'(0, 0, t)$, 外接球半径为 R .



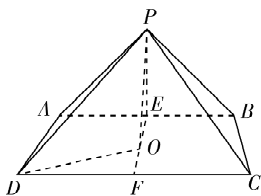
连接 AO, AO' , 设上底面 $EFGH$ 的中心为 O_1 , 连接 $O_1E, O'E$.

在 $\triangle O'AO$ 中, $R^2=O'A^2=1^2+(-1)^2+t^2=2+t^2$, 在 $\triangle O'EO_1$ 中, $R^2=O'E^2=1^2+(\sqrt{3}-t)^2=1+(\sqrt{3}-t)^2$,

则 $2+t^2=1+(\sqrt{3}-t)^2$, 解得 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $R^2=2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$, 故该几何体的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{7}{3}=\frac{28\pi}{3}$. 故选 B.

7. C 【解析】由题意可得 A, B, C, D 共圆, 且 $AB\parallel CD$, 所以四边形 $ABCD$ 必为等腰梯形.

如图所示, 取 AB 中点 E, CD 中点 F , 连接 EF , 则 $EF\perp AB$.



因为 $\cos\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{10}$, 所以 $\tan\angle ADC=7$, 则 $\tan\angle ADC=\frac{EF}{DF-AE}=\frac{EF}{1}=7$, 故 $EF=7$, 所以梯形 $ABCD$ 的面积为定值.

连接 PE , 因为 $\triangle PAB$ 是等腰直角三角形, $AB=6$, 所以 $PE=3$, 要使四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大, 必有 $PE\perp$ 平面 $ABCD$,

关键点

因为 $EF\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PE\perp EF$, 又 $EF\perp AB, PE\cap AB=E$



$E, PE, AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $EF \perp$ 平面 PAB , 而点 E 为 $\triangle PAB$ 的外心, 因此四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心 O 在 EF 上.

设 $OE = x$, 球 O 的半径为 R , 连接 OP, OD , 则 $R^2 = OP^2 = PE^2 + OE^2 = OD^2 = OF^2 + FD^2$,

即 $R^2 = 3^2 + x^2 = (7-x)^2 + 4^2$, 解得 $x = 4$,

所以 $R^2 = 25$, 球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = 100\pi$.

8. D 【解析】如图, 取 BD 中点 O , 连接 OA, OC , 因为三棱锥 $A-BCD$ 中,

$\angle BAD = \angle BCD = \frac{\pi}{2}, AB = AD = \sqrt{2}$, 所

以 $\triangle BAD$ 与 $\triangle BCD$ 均为直角三角形, 且 BD 为公共斜边, 所以 $OA = OC =$

$OB = OD = 1$, 即点 O 为三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心, 外接球半径为 1.

设点 D 到平面 ABC 的距离为 d , 则球心 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{d}{2}$,

因为二面角 $A-BD-C$ 的平面角为锐角, 所以点 D 到平面 ABC 的距离 $d \leq AD = \sqrt{2}$, 当且仅当 $AD \perp AC$ 时等号成立, 所以球心

O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{2}d \leq \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心到平面 ABC 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

9. $(0, \sqrt{R^2 - r^2})$ 20π 【解析】圆台外接球的球心 O 必在圆台的轴线上, 因为 O 在圆台外, 所以球心 O 在圆台下底面的下方.

关键点

如图, 设 O 到下底面的距离为 x , 则 $r^2 + (h+x)^2 = R^2 + x^2$, 所

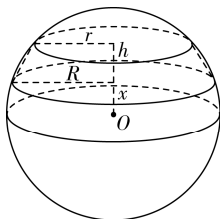
以 $x = \frac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} > 0$, 所以 $0 < h < \sqrt{R^2 - r^2}$,

所以圆台的外接球表面积为 $S = 4\pi(R^2 + x^2) = 4\pi R^2 + 4\pi x^2 =$

$4\pi R^2 + 4\pi \left(\frac{R^2 - r^2 - h^2}{2h} \right)^2 = 16\pi + \pi \left(\frac{3}{h} - h \right)^2$.

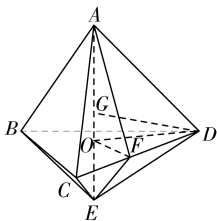
易知 $u = \frac{3}{h} - h$ 在 $1 \leq h \leq \sqrt{2}$ 时单调递减, 且 $u_{\max} = \frac{3}{1} - 1 = 2, u >$

0 , 所以 $S_{\max} = 16\pi + \pi \times 2^2 = 20\pi$.



10. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 【解析】由题意知, $AE \perp$ 平面 BCD , 几何体 $ABCDE$ 的

外接球直径为 AE , 不妨设 $AO > OE$, 设 AE 的中点为 G , 即为外接球的球心, 如图, 连接 DG, OD , 则 $AG = GE = GD = 2$.



设 $OG=x, OF=a$, 则 $AO=2+x, OE=2-x, OD=2a, DC=2DF=2\sqrt{3}a$,

在 Rt $\triangle ODG$ 中, $OG^2 + OD^2 = DG^2$, 得 $4a^2 = 4 - x^2$,

在 $\triangle OFA$ 中, $\tan \angle AFO = \frac{AO}{OF} = \frac{2+x}{a}$, 同理 $\tan \angle EFO = \frac{EO}{OF} =$

$\frac{2-x}{a}$, 所以 $\tan \angle AFE = \tan (\angle AFO + \angle EFO) =$

$$\frac{\tan \angle AFO + \tan \angle EFO}{1 - \tan \angle AFO \tan \angle EFO} = \frac{\frac{2+x}{a} + \frac{2-x}{a}}{1 - \frac{2+x}{a} \times \frac{2-x}{a}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{化简得}$$

$$\frac{\frac{4}{a}}{1-\frac{4-x^2}{a^2}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 代入 } 4a^2 = 4-x^2, \text{ 可得 } a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 } DC = 2.$$

则该几何体的体积为 $V_{\text{三棱锥}A-BCD} + V_{\text{三棱锥}E-BCD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times OA +$

$$\frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times OE = \frac{1}{3} \times AE \times S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

11. (1)【证明】在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 = CC_1 = AA_1$,
 $\angle ABB_1 = \angle BCC_1 = \angle CAA_1 = 90^\circ$,

又因为 $AB_1=BC_1=CA_1$, 所以 $\triangle ABB_1 \cong \triangle BCC_1 \cong \triangle CAA_1$, 所以 $AB=BC=CA$, 所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱.

(2)【证明】分别取 AC, A_1C_1 的中点 D, D_1 , 连接 BD, DD_1 , 则 $BD \perp AC$.

因为 $AA_1 \parallel DD_1, AA_1 \perp \text{平面 } ABC$, 所以 $DD_1 \perp \text{平面 } ABC$.

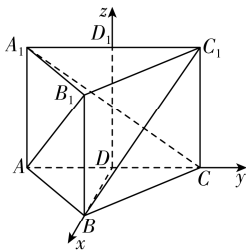
以 D 为原点, DB, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

不妨设 $AC=2a, AA_1=b$, 则 $A(0, -a, 0), B(\sqrt{3}a, 0, 0), C(0, a, 0), A_1(0, -a, b), C_1(0, a, b), B_1(\sqrt{3}a, 0, b)$,

所以 $\overrightarrow{BC_1} = (-\sqrt{3}a, a, b)$, $\overrightarrow{CA_1} = (0, -2a, b)$, $\overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}a, a, b)$.

因为 $BC_1 \perp CA_1$, 所以 $\overrightarrow{BC_1} \perp \overrightarrow{CA_1}$, 所以 $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} = -2a^2 + b^2 = 0$, 所以 $b = \sqrt{2}a$.

所以 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} = -2a^2 + b^2 = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{CA_1}$, 即 $AB_1 \perp CA_1$.





(3)【解】因为 $AB_1 \subset$ 平面 α , $BC_1 //$ 平面 α , AB_1 与 BC_1 不平行, $BC_1 \perp CA_1$, $AB_1 \perp CA_1$, 所以不妨取平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n} = \overrightarrow{CA_1} = (0, -2a, \sqrt{2}a)$.

因为直线 BC_1 与平面 α 的距离为 $\sqrt{3}$, 所以点 B 到平面 α 的距离为 $\sqrt{3}$.

因为 $\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, \sqrt{2}a)$, 所以点 B 到平面 α 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BB_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}a = \sqrt{3}$, 所以 $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

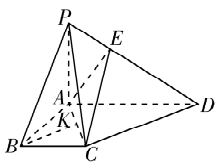
所以正三角形 ABC 的外接圆半径 $r = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$, 所以正

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径 $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{AA_1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{2}$, 所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 33\pi$.

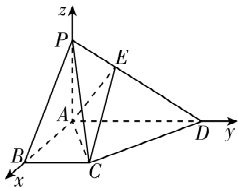
12. (1)【证明】由 $BC \perp$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB , 得 $BC \perp PA$.

如图①, 取 AC 的中点 K , 连接 BK , 因为 $BA = BC$, 所以 $BK \perp AC$, 因为平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC$, $BK \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BK \perp$ 平面 PAC .

因为 $PA \subset$ 平面 PAC , 所以 $BK \perp PA$, 又因为 $BC \cap BK = B$, $BC, BK \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.



图①



图②

(2)【解】(i) 以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图②所示的空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0), D(0, 2, 0), C(1, 1, 0), P(0, 0, 1),$

$E\left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{AE} = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 0,$

$1)$, 设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = x_1 + y_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_1 = 1, \text{ 则 } \mathbf{n}_1 = (1, -1, 0).$$

设平面 ACE 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AC} = x_2 + y_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_2 = 1, \text{ 则 } \mathbf{n}_2 = (1, -1, 1).$$

设二面角 $P-AC-E$ 的平面角为 θ , 注意到二面角 $P-AC-E$ 为锐二面角,

所以 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 即二面角 $P-AC-E$ 的

余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(ii) 设 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PD}$ ($0 < \lambda < 1$), 则 $E(0, 2\lambda, 1-\lambda)$ ($0 < \lambda < 1$), 设过 B, C, P, E 四点的球的球心为 $O(x, y, z)$, 半径为 R , 则 $R^2 = OB^2 = OC^2 = OP^2 = OE^2$,

$$\text{即} \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = R^2, \\ x^2 + (y-2\lambda)^2 + [z-(1-\lambda)]^2 = R^2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = 2 - \frac{5\lambda}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \\ z = 2 - \frac{5\lambda}{2}, \end{cases}$$

令 $z = 2 - \frac{5\lambda}{2} = 0$, 解得 $\lambda = \frac{4}{5} \in (0, 1)$ 满足条件,

故当 $\overrightarrow{PE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{PD}$ 时, B, C, P, E 四点共球且该球的球心位于平面 $ABCD$ 内.

一题多解 (1) 因为 $BC \perp$ 平面 PAB , $PA, BA \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp BA, BC \perp PA$, 又因为 $AB = BC = 1$, 所以 $AC = \sqrt{2}$. $\angle BAC = 45^\circ$, 又因为 $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 $\angle CAD = 45^\circ$. 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cos \angle CAD = 4 + 2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, 所以 $AC^2 + CD^2 = AD^2$, 故 $AC \perp CD$. 因为平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAC \cap$ 平面 $ABCD = AC, CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAC , 因为 $PA \subset$ 平面 PAC , 所以 $DC \perp PA$, 又因为 $BC \perp PA$, 且 $BC \cap CD = C, BC, CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

13. A 【解析】正四棱锥的底面边长为 4, 侧棱长为 $2\sqrt{10}$, 所

以斜高为 $\sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$, 高为 $\sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

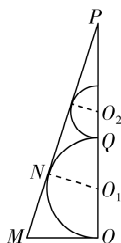
设正四棱锥底面中心为 O , AD 的中点为 M , 连接 PM, OM , 设 N 为球 O_1 与平面 PAD 的切点, 连接 O_1N , 则 N 在 PM 上, 且 $O_1N \perp PM$, 作出 $\triangle POM$, 如图.

设球 O_1 的半径为 R , 则 $O_1N = O_1O = R$, 因为 $\sin \angle MPO = \frac{OM}{PM} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{NO_1}{PO_1} = \frac{1}{3}$, 所以 $PO_1 = 3R$, 所以 $PO = PO_1 + OO_1 = 4R = 4\sqrt{2}$, 即 $R = \sqrt{2}$.

设球 O_1 与球 O_2 相切于点 Q , 则 $PQ = PO - 2R = 2R$, 设球 O_2

的半径为 r , 同理可得 $PQ = 4r$, 所以 $r = \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故小球 O_2 的

体积为 $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. 故选 A.





14. D 【解析】正四棱台存在内切球, 设 A_1D_1, B_1C_1, AD, BC 的中点分别为 N, M, E, F , 连接 NE, EF, FM, NM , 作出截面图, 如图所示.

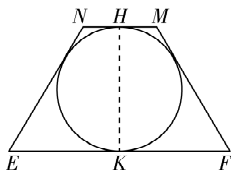
设 NM, EF 的中点分别为 H, K , 连接 HK .

四边形 $NMFE$ 为等腰梯形, $NM=2, EF=6$, 则 $NE=\frac{2}{2}+\frac{6}{2}=4$,

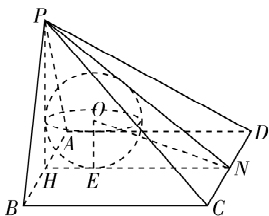
则梯形的高 $HK=\sqrt{4^2-\left(\frac{6-2}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$, 此时梯形的高即为正四棱台的高.

故正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times(4+36+\sqrt{4\times 36})=\frac{104\sqrt{3}}{3}$,

故选 D.



15. B 【解析】如图, 设四棱锥的内切球半径为 r , 取 AB 的中点为 H , CD 的中点为 N , 连接 PH, PN, HN .



球 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球, 底面 $ABCD$ 为矩形, 侧面 PAB 为正三角形且垂直于底面 $ABCD$, 则平面 PHN 截四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球 O 所得的截面为大圆, 其半径为 r , 此圆为 $\triangle PHN$ 的内切圆, 设该圆与 HN 相切于点 E , 连接 OE .

由平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 AB , $PH \subset$ 平面 PAB , $\triangle PAB$ 为正三角形, 有 $PH \perp AB$, $\therefore PH \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $HN \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PH \perp HN$.

由 $AB=2\sqrt{3}, BC=4$, 则有 $PH=3, HN=4, PN=5$, 则 $\triangle PHN$ 中, $S_{\triangle PHN}=\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times(3+4+5)r$ (提示: 三角形面积等于三角形内切圆半径与周长乘积的一半), 解得 $r=1$, $\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球半径为 1.

连接 ON , $\because PH \perp$ 平面 $ABCD, CD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore CD \perp PH$. 又 $CD \perp HN, PH, HN \subset$ 平面 $PHN, PH \cap HN=H$, $\therefore CD \perp$ 平面 PHN , $\because ON \subset$ 平面 PHN , $\therefore ON \perp CD$, $\therefore$ 内切球 O 表面上一点 M 到直线 CD 的距离的最小值即为线段 ON 的长减去内切球 O 的半径.

又 $ON=\sqrt{OE^2+EN^2}=\sqrt{10}$, $\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 内切球表面上的一点 M 到直线 CD 的距离的最小值为 $\sqrt{10}-1$. 故选 B.

**关键点拨**

四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球与四棱锥的五个面都相切, 由对称性知平面 PHN 截四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球 O 所得的截面为大圆, 可利用等面积法求出 $\triangle PHN$ 内切圆 O 的半径, 即内切球 O 的半径, 利用球心到直线 CD 的距离, 求点 M 到直线 CD 的距离的最小值.

16. D 【解析】要使两个球的体积之和最大, 则应满足两个球互相外切, 并且分别与正方体的内表面相切, 即两个球球心的连线应位于正方体的体对角线上.

作出正方体的对角面 ACC_1A_1 , 如图, 设两球的球心分别为 O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 , 球 O_1 与正方体上底面相切于点 M , 球 O_2 与正方体下底面相切于点 N , 连接 O_1M, O_2N .

由已知可得 $AA_1 = 1, AC = \sqrt{2}, A_1C = \sqrt{3}$, 所以 $\sin \angle ACA_1 = \frac{AA_1}{A_1C} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$O_1O_2 = r_1 + r_2, O_1A_1 = \frac{O_1M}{\sin \angle ACA_1} = \sqrt{3}r_1, O_2C = \frac{O_2N}{\sin \angle ACA_1} = \sqrt{3}r_2$.

又 $O_1A_1 + O_1O_2 + O_2C = r_1 + r_2 + \sqrt{3}(r_1 + r_2) = (\sqrt{3} + 1)(r_1 + r_2) = \sqrt{3}$, 所以 $r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, r_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} - r_1$.

因为 $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}, 0 < r_2 \leq \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq r_1 \leq \frac{1}{2}$.

又两球的体积之和 $V(r_1) = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2} - r_1\right)^3$,

且 $V'(r_1) = 4(3 - \sqrt{3})\pi \times \left(r_1 - \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)$, 当 $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq r_1 < \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$

时, 有 $V'(r_1) < 0$, 即函数 $V(r_1) = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2} - r_1\right)^3$

在 $\left[\frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)$ 上单调递减; 当 $\frac{3 - \sqrt{3}}{4} < r_1 \leq \frac{1}{2}$ 时, 有

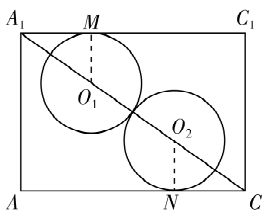
$V'(r_1) > 0$, 即函数 $V(r_1) = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2} - r_1\right)^3$ 在

$\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增.

当 $r_1 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ 时, $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} - r_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $V\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = V\left(\frac{1}{2}\right) =$

$\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{(9 - 5\sqrt{3})\pi}{2}$.

所以所求最大值为 $\frac{(9 - 5\sqrt{3})\pi}{2}$.





17. 9π 【解析】如图, 设大球 O 与杯盖相切于点 A , 与杯壁相切于点 F , 小球 P 与大球相切于点 G , 与杯底相切于点 C , 与杯壁相切于点 E , BD 为杯子的母线, 点 F, E 在 BD 上, 大球半径为 R , 小球半径为 r , 则大球体积 $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi(\text{cm}^3)$, 小球体积 $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi(\text{cm}^3)$, 圆台杯子的高 $h = 2R + 2r = 6(\text{cm})$.

根据切线长定理可得 $AB = BF, CD = DE$.

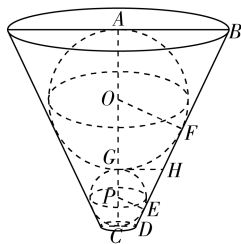
连接 AC, OF, PE , 过点 G 作 $GH \parallel CD$ 交 BD 于点 H , 易知四边形 $DEPC$ 、四边形 $PEHG$ 、四边形 $OFBA$ 、四边形 $HFOG$ 两两

之间相似, $\frac{PC}{CD} = \frac{GH}{GP} = \frac{OG}{GH} = \frac{AB}{AO}$, 即 $\frac{1}{CD} = \frac{GH}{1} = \frac{2}{GH} = \frac{AB}{2}$, 解得

$GH = \sqrt{2} \text{ cm}$, 则 $CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$, $AB = 2\sqrt{2} \text{ cm}$, 则圆台体积 $V_0 =$

$\frac{1}{3}\pi h(AB^2 + AB \cdot CD + CD^2) = 2\pi\left(8 + 2 + \frac{1}{2}\right) = 21\pi(\text{cm}^3)$,

则酸奶的体积 $V = V_0 - V_1 - V_2 = 21\pi - \frac{32}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = 9\pi(\text{cm}^3)$.



18. 【解】(1) $\because PA \perp$ 平面 $ABC, AB, BC \subset$ 平面 $ABC, \therefore PA \perp AB, PA \perp BC$.

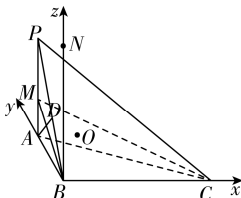
过点 A 作 $AD \perp PB$, 交 PB 于点 $D, \because$ 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC , 且交线为 $PB, AD \subset$ 平面 $PAB, \therefore AD \perp$ 平面 PBC , 又 $BC \subset$ 平面 $PBC, \therefore AD \perp BC$, 又 $PA \cap AD = A, PA, AD \subset$ 平面 $PAB, \therefore BC \perp$ 平面 PAB .

则三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times S_{\triangle PAB} \times BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 \times 6 = 12\sqrt{3}$.

(2) 由(1)得 $BC \perp$ 平面 PAB , 又 $AB \subset$ 平面 PAB , 则 $BC \perp AB$. 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , 过点 B 作平面 ABC 的垂线 BN , 则 $BN \parallel AP, BN \perp$ 平面 ABC .

如图, 以 B 为原点, BC, BA, BN 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系 $B-xyz$,

则 $B(0, 0, 0), C(6, 0, 0), A(0, 2\sqrt{3}, 0), P(0, 2\sqrt{3}, 6)$.



$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 的内切球与平面 PAB 和平面 ABC 相切,

∴ 设内切球半径为 r , 内切球球心为 $O(r, t, r)$,

$$\text{又 } PB = AC = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3},$$

由 $V_{\text{三棱锥}P-ABC} = \frac{1}{3}(S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle ABC}) \cdot r$, 得 $12\sqrt{3} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times 2 \right) r = 12\sqrt{3}r$, 解得 $r = 1$, 则 $O(1, t, 1)$.

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (6, -2\sqrt{3}, 0)$, 得 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 6z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 6x - 2\sqrt{3}y = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 解得 $y = \sqrt{3}, z = 0$, 则 $\mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, 0)$ 为平面 PAC 的一个法向量.

由内切球球心性质得球心 O 到平面 PAC 的距离 d 等于半径 1,

由 $\overrightarrow{AO} = (1, t - 2\sqrt{3}, 1)$, 得 $d = \frac{|\overrightarrow{AO} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|1 + \sqrt{3}(t - 2\sqrt{3})|}{2} = 1$, 解得 $t = \frac{7}{\sqrt{3}}$ 或 $t = \sqrt{3}$, 又 $\frac{7}{\sqrt{3}} > 2\sqrt{3}$, 不合题意, 故舍去, ∴ $t = \sqrt{3}$, 即球心 $O(1, \sqrt{3}, 1)$.

设平面 BOC 的法向量为 $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$, 又 $\overrightarrow{BO} = (1, \sqrt{3}, 1)$,

$\overrightarrow{BC} = (6, 0, 0)$, 故 $\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{BC} = 6x_0 = 0, \\ \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{BO} = x_0 + \sqrt{3}y_0 + z_0 = 0, \end{cases}$ 令 $y_0 = 1$, 解得

$x_0 = 0, z_0 = -\sqrt{3}$, 则 $\mathbf{a} = (0, 1, -\sqrt{3})$ 为平面 BOC 的一个法向量.

若 M 在线段 PA 上, 连接 BM, CM , 则可设 $M(0, 2\sqrt{3}, m)$, $0 < m < 6$, $\overrightarrow{BM} = (0, 2\sqrt{3}, m)$,

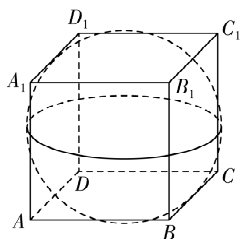
若平面 MBC 经过三棱锥 $P-ABC$ 内切球的球心 O , 即 O, M, B, C 四点共面, 则 $\overrightarrow{BM} \perp \mathbf{a}$, 故 $\overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{a} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}m = 0$, 解得 $m = 2$, 即 $AM = 2, PM = 4$,

故当点 M 位于线段 PA 靠近点 A 的三等分点处时, 平面 MBC 经过三棱锥 $P-ABC$ 内切球的球心 O , 且 $\frac{PM}{MA} = 2$.

关键点拨 解决此题的关键, 一是将内切球球心与平面相切的性质转化为点面距等于半径求解; 二是将四点共面的条件转化为平面 OBC 的法向量与 $\overrightarrow{BM}$ 垂直.

19. C 【解析】 当球 O 是正方体的棱切球时, 球与棱有公共点, 如

图①, 此时球的半径最小, 最小半径 $r_1 = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

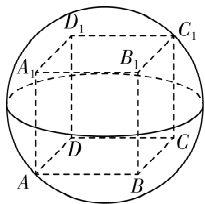


图①



当球 O 是正方体的外接球时,球与棱有公共点,如图②,此时球

的半径最大,最大半径 $r_2 = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{3}{2}$.



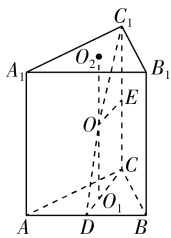
图②

所以球 O 的半径 $r \in \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2} \right]$, 故球 O 的表面积 $S = 4\pi r^2 \in [6\pi, 9\pi]$. 故选 C.

20. A 【解析】设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的下底面中心为 O_1 , 上底面中心为 O_2 , 连接 O_1O_2 .

若该正三棱柱存在棱切球, 则棱切球的球心 O 为线段 O_1O_2 的中点.

设 AB, CC_1 的中点分别为 D, E , 连接 CD ,



OD, OE, OC_1 , 则 $OD = OE = O_1C = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故棱切球

的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为 $O_1D = \frac{1}{2}O_1C = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $OO_1 = \sqrt{OD^2 - O_1D^2} = 1$, 所以正

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的半径 $OC_1 = \sqrt{OE^2 + O_1E^2} =$

$\sqrt{OE^2 + OO_1^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$, 故该正三棱柱棱切球的半径与外接球

的半径之比为 $\frac{2\sqrt{3}}{3} : \frac{\sqrt{21}}{3} = 2 : \sqrt{7}$.

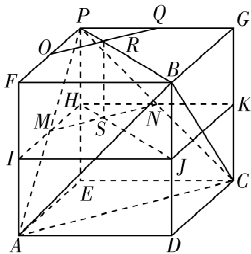
21. B 【解析】将正四面体 $PABC$ 放置于正方体 $ADCE-FBGP$ 中, 如图所示, 因为正四面体的棱长为 a , 所以正方体的棱长

为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 正四面体的棱切球即为正方体的内切球.

设 I, J, K, H 分别是线段 AF, BD, CG, PE 的中点, 连接 HI, IJ, JK, KH , 则平面 $FBGP \parallel$ 平面 $IJKH$, 且 $MN \subset$ 平面 $IJKH$, $PB \subset$ 平面 $FBGP$.

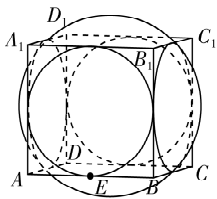
设 O, Q 分别是 PF, PG 的中点, 连接 OQ 交 PB 于 R , 连接 HJ 交 MN 于 S , 连接 RS , 易知 $RS \perp MN, RS \perp PB$, 所以异面直线

MN 和 PB 之间的距离为 $RS = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a$. 故选 B.





22. ABD 【解析】对于 A, 如图, 正方体的棱切球 O 的半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 2\pi$, 故 A 正确.



对于 B, 若球 O 、正方体的体积分别为 V_1, V_2 , 则球 O 在正方体外部的体积 $V > V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi - 1$, 故 B 正确.

对于 C, 球 O 的半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设其内接圆柱的高为 h , 则底面圆半径 $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{h^2}{4}}$, 所以 $S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi rh = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{h^2}{4}} \cdot h = 2\pi \sqrt{-\frac{1}{4}(h^2 - 1)^2 + \frac{1}{4}}$, 当 $h^2 = 1$ 时, 取得最大值, 且最大值为 π , 故 C 错误.

对于 D, 取 AB 中点 E , 易知 E 在球面上, 可得 $\vec{EB} = -\vec{EA} = -\frac{1}{2}\vec{BA}$, 所以 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{ME} + \vec{EA}) \cdot (\vec{ME} + \vec{EB}) = \vec{ME}^2 - \vec{EA}^2 = |\vec{ME}|^2 - \frac{1}{4}$.

点 M 在球 O 上且在正方体外部(含正方体表面)运动, 所以 $0 \leq |\vec{ME}| \leq \sqrt{2}$ (提示: 当 ME 为直径时, $|\vec{ME}| = \sqrt{2}$),

所以 $\vec{MA} \cdot \vec{MB} \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right]$, 故 D 正确. 故选 ABD.

真题风向练

23. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ 命题点 ⊙ 三棱锥的外接球问题

【解析】设球 O 的半径为 R , 由球 O 的体

积为 $4\sqrt{3}\pi$, 得 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi$, 解得 $R =$

$\sqrt{3}$. 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 且 $DA =$

$DB = DC = \sqrt{2}$, 所以 A, B, C, D 不在同一平

面上, 故 $D-ABC$ 为正三棱锥. 设 $\triangle ABC$

的中心为 H , 连接 DH , 由正三棱锥的结构特征可知球心 O

在直线 DH 上, 连接 AH, AO , 设 $OH = d, DH = h, r$ 为 $\triangle ABC$ 外

接圆的半径, 则 $OA^2 = OH^2 + AH^2 = d^2 + r^2 = R^2 = 3$ ①, $DA^2 =$

$DH^2 + AH^2 = h^2 + r^2 = 2$ ②, 由 ①② 式得 $d^2 - h^2 = 1$, 则 $d > h$, 所以

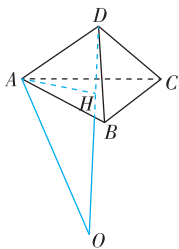
球心 O 在三棱锥 $D-ABC$ 外, $OD = d + h = R = \sqrt{3}$, 结合 $d^2 - h^2 =$

$(d - h)(d + h) = 1$, 解得 $d = \frac{2}{\sqrt{3}}, h = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 则 $r^2 = 3 - d^2 = 3 - \frac{4}{3} =$

$\frac{5}{3}, r = \sqrt{\frac{5}{3}}$ (关键: 求出 d , 进而求出 $\triangle ABC$ 外接圆的半

径), 所以等边三角形 ABC 的边长为 $\sqrt{3}r = \sqrt{5}$, 故 $S_{\triangle ABC} =$

$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{5})^2 = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.





专题2 截面、翻折问题



题型上分练

1. C 【解析】如图, 设圆锥底面圆的半径为 R , 易知 $AO = BO = R$, 由 $\cos \angle AOB = \frac{1}{2}$, 可知 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle AOB$ 为等边三角形, 所以 $AB = R$.

易知四边形 $ABCD$ 为矩形, 则 $BC =$

$$\sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3}R.$$

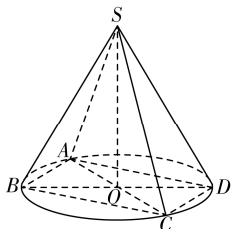
因为 $SO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以圆锥母线 SC 与底面 $ABCD$ 所成的角即为

$$\angle SCO, \text{ 则 } \tan \angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{SO}{R} = \sqrt{2},$$

$$\text{故 } SO = \sqrt{2}R, \text{ 则 } V_{\text{四棱锥 } S-ABCD} = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times SO = \frac{\sqrt{6}}{3} R^3 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

解得 $R = \sqrt{2}$.

故圆锥 SO 的轴截面面积为 $\frac{1}{2} \times 2R \times \sqrt{2}R = 2\sqrt{2}$, 故选 C.

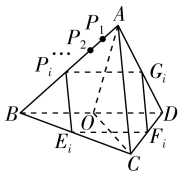


2. D 【解析】如图, 取 BD 的中点 O , 连接 AO, CO , 在正四面体 $ABCD$ 中, 易知 $AO \perp BD, CO \perp BD$, 又 $AO \cap CO = O, AO, CO \subset$ 平面 AOC , 所以 $BD \perp$ 平面 AOC , 又 $AC \subset$ 平面 AOC , 所以 $BD \perp AC$.

过 P_i 作 AC 的平行线, 交 BC 于 E_i , 过 P_i 作 BD 的平行线, 交 AD 于 G_i , 过 E_i 作 $E_i F_i \parallel BD$ 交 CD 于 F_i , 连接 $G_i F_i$, 得到截面四边形 $P_i E_i F_i G_i$, 易知四边形 $P_i E_i F_i G_i$ 为平行四边形, 又 $BD \perp AC$, 即 $P_i E_i \perp E_i F_i$, 所以四边形 $P_i E_i F_i G_i$ 为矩形, 由相似

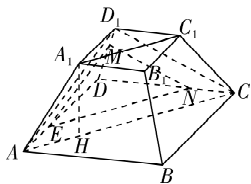
三角形的知识可知 $P_i G_i = \frac{i}{10}, P_i E_i = 1 - \frac{i}{10}, i = 1, 2, \dots, 9$,

$$\text{所以 } S_i = \frac{i}{10} \left(1 - \frac{i}{10} \right) = \frac{i}{10} - \frac{i^2}{100}.$$

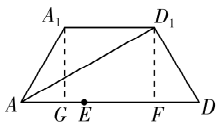


3. D 【解析】如图①所示, 过点 A_1 作 $A_1 H \perp AC$, 垂足为点 H , 则该正四棱台的高为 $A_1 H$, 连接 $A_1 C_1$, 因为 $A_1 C_1 = 3\sqrt{2}, AC = 6\sqrt{2}$, 所以 $AH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则四棱台的体积为 $\frac{1}{3} \times (3^2 + 6^2 + 3 \times 6) \times$

$$A_1 H = \frac{63\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } A_1 H = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以侧棱 } AA_1 = \sqrt{AH^2 + A_1 H^2} = 3.$$



图①



图②

如图②所示, 过点 D_1 作 $D_1 F \perp AD$, 垂足为点 F , 过点 A_1 作 $A_1 G \perp AD$, 垂足为点 G .

由对称性可知 $DF = AG = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$, 所以 $AF = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, 而

$$DD_1 = AA_1 = 3, \text{ 所以 } D_1 F = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } AD_1 =$$



$$\sqrt{\frac{81}{4} + \frac{27}{4}} = 3\sqrt{3}, \text{同理}, CD_1 = 3\sqrt{3}.$$

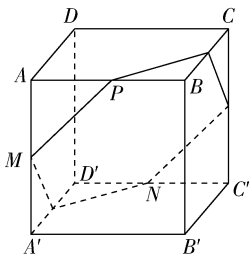
如图①所示,分别在棱 DC, DD_1 上取点 N, M ,使得 $DN : NC = DM : MD_1 = 2 : 1$,连接 EN, EM, MN ,易得 $EN \parallel AC, EM \parallel AD_1$, $EN \cap EM = E, AC \cap AD_1 = A, EN, EM \subset \text{平面 } EMN, AC, AD_1 \subset \text{平面 } AD_1C$,所以平面 $EMN \parallel \text{平面 } AD_1C, ME = NM = \frac{2}{3}AD_1 = 2\sqrt{3}, EN = \frac{2}{3}AC = 4\sqrt{2}$,所以截面多边形的周长为 $4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$.

故选 D.

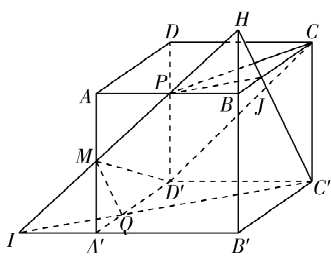
4. BCD 【解析】当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,易知截面为正六边形(如图①),

且正六边形的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,故截面面积为 $6 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,故 A 错误.

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,由对称性可知,平面将正方体分成的两部分体积相等,故 B 正确.



图①



图②

如图②,当 $\lambda = 0$ 时, $\overrightarrow{D'N} = \mathbf{0}$, N 与 D' 重合,连接 $D'C$,易知 $MP \parallel D'C$,则 M, P, D', C 四点共面,连接 MD', PC ,此时截面为四边形 $MD'CP$. 当 $\lambda = 1$ 时, $\overrightarrow{D'N} = \overrightarrow{D'C'}$, N 与 C' 重合,设直线 MP 分别交 $B'B, B'A'$ 的延长线于点 H, I ,连接 HC' ,交 BC 于点 J ,连接 IC' ,交 $A'D'$ 于点 Q ,连接 MQ, PJ ,此时截面为五边形 $MPJC'Q$,由相似易得 J 为 BC 的三等分点, Q 为 $A'D'$ 的三等分点. 当 λ 从 0 变化到 1 时,截面从四边形 $MD'CP$ 变化至五边形 $MPJC'Q$,由图②易知,被截面所分成的两部分体积之差的绝对值先减小至 0,再逐渐增大,故 C 正确.

$|V_1 - V_2|$ 取最大值时对应 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时的情形. 当 $\lambda = 0$ 时,不妨记 V_1 为截面 $MD'CP$ 左上角的部分几何体的体积,则

$$V_1 = V_{P-AMD'D} + V_{P-DD'C} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{7}{24},$$

$$\text{则 } V_2 = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}, \text{此时 } |V_1 - V_2| = \frac{17}{24} - \frac{7}{24} = \frac{5}{12};$$

当 $\lambda = 1$ 时,不妨记 V_2 为截面 $MPJC'Q$ 右下角的部分几何体的体积,由相似易知 $A'I = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}, BH = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}, BJ =$

$$\frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}, A'Q = \frac{1}{3}B'C' = \frac{1}{3}, \text{则 } V_2 = V_{H-IB'C'} - V_{H-PBJ} - V_{I-A'QM} =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 1 \times \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times$$



$$\frac{1}{2} = \frac{25}{72}, \text{ 所以 } V_1 = 1 - \frac{25}{72} = \frac{47}{72}, \text{ 此时 } |V_1 - V_2| = \frac{47}{72} - \frac{25}{72} = \frac{11}{36}.$$

所以 $|V_1 - V_2|$ 的最大值为 $\frac{5}{12}$, 故 **D 正确**. 故选 BCD.

5. BCD 【解析】对于 A, 连接 BC_1 , 如图, 因为 E, F 分别是棱 BC, CC_1 的中点, 所以 $EF \parallel BC_1$, 所以直线 EF 与 A_1B 所成的角为 $\angle A_1BC_1$, 因为几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, 所以 $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形, 所以 $\angle A_1BC_1 = \frac{\pi}{3}$, 即直线 EF 与 A_1B 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 故 **A 错误**.

对于 B, 连接 AD_1, D_1F , 易知 $AB \perp C_1D_1$, 所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形, 所以 $AD_1 \parallel BC_1$, 又 $EF \parallel BC_1$, 所以 $AD_1 \parallel EF$, 所以平面 AEF 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面为梯形 $AEFD_1$. 又 $AE = D_1F = \sqrt{15}$, 梯形 $AEFD_1$ 的高为

$$\sqrt{(\sqrt{15})^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}, \text{ 所以梯形 } AEFD_1 \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times (2\sqrt{6} + \sqrt{6}) \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{27}{2}, \text{ 故 B 正确.}$$

对于 C, 因为 $\overrightarrow{BP} = \cos^2 \theta \overrightarrow{BC} + \sin^2 \theta \overrightarrow{BB_1} = \cos^2 \theta \overrightarrow{BC} + (1 - \cos^2 \theta) \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \cos^2 \theta \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{BB_1} + \cos^2 \theta \overrightarrow{B_1C}$,

所以 $\overrightarrow{B_1P} = \cos^2 \theta \overrightarrow{B_1C}$, 又 $\theta \in \mathbf{R}$, 所以 $\cos^2 \theta \in [0, 1]$, 所以 P 点在线段 B_1C 上. 因为 B_1C 与 A_1D 平行, $B_1C \not\subset$ 平面 A_1C_1D , $A_1D \subset$ 平面 A_1C_1D , 所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D , 故 P 到平面 A_1C_1D 的距离为定值, 又 $\triangle A_1C_1D$ 的面积为定值, 所以 $V_{D-A_1C_1P} = V_{P-A_1C_1D}$ 为定值 (提示: 等体积法), 故 **C 正确**.

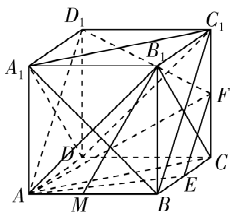
对于 D, 在棱 AB 上取一点 M 使 $BM = 2$, 连接 B_1M , 则 $B_1M = 4$, $\angle BB_1M = \frac{\pi}{6}$, 故 $\angle AB_1M = \frac{\pi}{12}$, 同理在 BC 上取一点 Q 使 $BQ = 2$, 也有类似的结论, 所以球面与 $\triangle B_1BC, \triangle B_1BA$ 的交线均为以 B_1 为圆心, 4 为半径, 且圆心角为 $\frac{\pi}{12}$ 的圆弧, 这两段

$$\text{弧长之和为 } \frac{\pi}{12} \times 4 \times 2 = \frac{2\pi}{3}.$$

易知 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 设 N 为平面 ABC 内一点, 且 N 为球面与平面 ABC 的交线上任一点, 连接 B_1N, BN (图略), 所以 $B_1N = 4$, 则 $BN = \sqrt{16 - (2\sqrt{3})^2} = 2$, 又点 B 到直线 AC 的距离为 $\sqrt{6} > 2$, 所以球面与 $\triangle ABC$ 的交线为以 B 为圆心, 2 为半径, 且圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ 的圆弧, 其弧长为 $\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$.

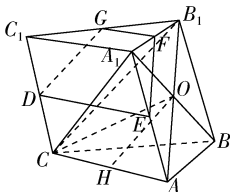
易知 $\triangle AB_1C$ 是等边三角形, 其高为 $2\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} > 4$, 所以球面与 $\triangle AB_1C$ 的交线为以 B_1 为圆心, 4 为半径, 且圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的圆弧, 其弧长为 $\frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$.

所以该球的球面与三棱锥 B_1-ABC 表面的交线的长度之和为 $\frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} = 3\pi$, 故 **D 正确**. 故选 BCD.



6. $3+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 【解析】如图, 连接 AB_1 , 设 $A_1B \cap AB_1 = O$, 取 AC 的中点 H , 连接 CO, B_1C, OH , 可知 $CO = OA = \sqrt{3}$, 所以 $OH \perp AC$, 所以 $OH = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$.

由题意可知 $A_1B \perp AO, A_1B \perp CO$, 且 $AO \cap CO = O, AO, CO \subset$ 平面 AB_1C , 所以 $A_1B \perp$ 平面 AB_1C .



又因为 $A_1B \perp$ 平面 α , 所以平面 $AB_1C \parallel$ 平面 α (关键: 以平面 AB_1C 为参考作截面), 设平面 $\alpha \cap AA_1 = E$, 即平面 $\alpha \cap$ 平面 $AA_1C_1C = DE$, 且平面 $AB_1C \cap$ 平面 $AA_1C_1C = AC$, 则 $AC \parallel DE$.

又 D 为棱 CC_1 的中点, 可知 E 为棱 AA_1 的中点.

同理, 分别取 A_1B_1, B_1C_1 的中点 F, G , 连接 EF, FG, DG , 可知平面 α 即为平面 $DEFG$, 则 $DE = 2, EF = AO = \sqrt{3}, GF = \frac{1}{2}A_1C_1 = 1, DG = \frac{1}{2}B_1C = OH = \sqrt{2}$.

所以 α 与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 表面的交线的长度之和为 $2 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

7. $\left[1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ 【解析】如图①, 过点 O 作 $EF \perp AB$, 交底面圆于 E, F 两点, 连接 OP, DO, CO , 设 $SA = SB = 2$, 则 $DC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$.

由圆锥的性质得 $SO \perp$ 底面 $\odot O$, 因为 $EF \subset$ 底面 $\odot O$, 所以 $SO \perp EF$, 又 $SO \cap AB = O, SO, AB \subset$ 平面 SAB , 所以 $EF \perp$ 平面 SAB , 因为 $SA \subset$ 平面 SAB , 所以 $SA \perp EF$, 因为 C, O 分别是 SA, AB 的中点, 所以 $CO \parallel SB$, 则 $CO \perp SA$, 因为 $CO \cap EF = O, CO, EF \subset$ 平面 CEF , 所以 $SA \perp$ 平面 CEF , 则平面 CEF 为截面.

因为 D, O 分别为 SB, AB 的中点, 所以 $OD \parallel SA$, 所以 $OD \perp$ 平面 CEF , 因为 $OP \subset$ 平面 CEF , 所以 $OD \perp OP$, 所以 $DP = \sqrt{OD^2 + OP^2} = \sqrt{1 + OP^2}$.

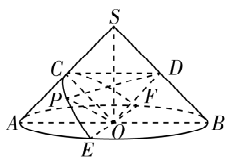
如图②为截面的平面图 (提示: 简化题目, 在截面上进行分析更直观), 以 C 为原点, CO 所在直线为 x 轴, 过点 C 且垂直 CO 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 则 $CO = 1, OE = OF = \sqrt{2}, O(1, 0)$, 则抛物线方程为 $y^2 = 2x$, 设 $P\left(\frac{a^2}{2}, a\right), a \in$

$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 则 $OP = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^4}{4} + 1}$, 所以 $OP \in$

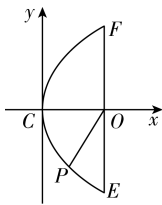
$[1, \sqrt{2}]$, 则 $DP = \sqrt{1 + OP^2} \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, 所以 $\frac{DP}{DC} = \frac{DP}{\sqrt{2}} \in$



$$\left[1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right].$$



图①



图②

8. B 【解析】如图①,过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,

因为 $AB=8, AD=2\sqrt{5}, \tan \angle BAD=2$, 可得 $AE=2$.

分别取 AB, CD 的中点为 P, Q , 连接 DP, PQ, BQ , 将平行四边形 $ABCD$ 沿 DP, PQ, BQ 折叠即可得三棱锥 $B-CPQ$, 易知该三棱锥对棱相等, 且三组对棱分别为 $4, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$.

将该三棱锥放到如图②的长方体中,

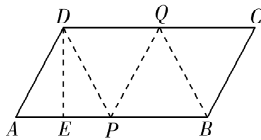
关键点

此时三棱锥 $B-CPQ$ 的外接球即为长方体的外接球, 设长方

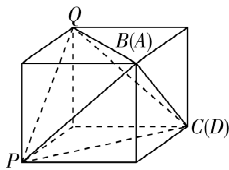
$$\text{体的棱长分别为 } a, b, c, \text{ 可得 } \begin{cases} a^2 + b^2 = 16, \\ a^2 + c^2 = 20, \\ b^2 + c^2 = 20, \end{cases}$$

所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 28$, 即其外接球半径 $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \sqrt{7}$, 故

外接球表面积 $S = 4\pi R^2 = 28\pi$, 故选 B.



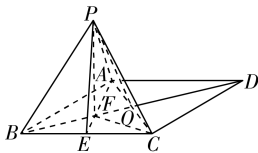
图①



图②

9. A 【解析】如图, 连接 BD , 记 $AC \cap BD = O$, P 在平面 ABC 上的射影为点 F , 则 F 在 AE 上, 连接 CF, PO .

由 $PF \perp$ 平面 $ABC, PA=PC$, 可得 $AF=CF$.



又 BO 是线段 AC 的中垂线, 所以 F 在 BO 上, 即 $AE \cap BO = F$.

设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为 R , 因为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 8\pi$, 所以 $R = \sqrt{2}$.

又 $OP=OA=OC=OB$, 所以 O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心, 故 $OP=OA=OC=OB=\sqrt{2}$.

因为 E 为 BC 的中点, O 为 AC 的中点, 所以 F 为 $\triangle ABC$ 的重

心, 所以 $OF = \frac{1}{3}OB = \frac{\sqrt{2}}{3}, AB=BC=2, PF = \sqrt{OP^2 - OF^2} = \frac{4}{3}$,

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot PF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times$

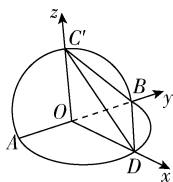
$$\frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

10. B 【解析】依题意, $OC' \perp AB, OD \perp AB$, 又平面 $ABC' \perp$ 平面



ABD , 平面 $ABC' \cap$ 平面 $ABD = AB$, $OC' \subset$ 平面 ABC' , 则 $OC' \perp$ 平面 ABD , 又 $OD \subset$ 平面 ABD , 所以 $OD \perp OC'$.

因此直线 OD, OB, OC' 两两垂直, 以点 O 为原点, OD, OB, OC' 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $OD = 1$, 则 $O(0, 0, 0), D(1, 0, 0)$,

$B(0, 1, 0), C'(0, 0, 1)$, 则 $\overrightarrow{OB} = (0, 1, 0), \overrightarrow{BC'} = (0, -1, 1)$,

$\overrightarrow{BD} = (1, -1, 0)$, 设平面 $C'BD$ 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC'} = -y + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = x - y = 0, \end{cases} \text{令 } y = 1, \text{得 } \mathbf{n} = (1, 1, 1).$$

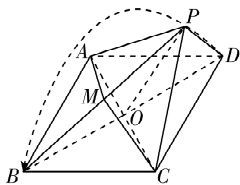
设直线 AB 与平面 $C'BD$ 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{OB} \rangle|$

$$= \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以直线 AB 与平面 $C'BD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

11. AC 【解析】对于 A, 连接 BD , 与

AC 交于点 O , 连接 OP , 如图所示, 无论点 P 在何位置, 总有 $AC \perp OP, AC \perp OD$. 连接 PD , 因为 $OP \subset$ 平面 $OPD, OD \subset$ 平面 $OPD, OP \cap OD = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 OPD , 又因为 $PD \subset$ 平面 OPD , 所以 $AC \perp PD$, A 正确.



对于 B, 当平面 $APC \perp$ 平面 ABC 时, V_{P-ABC} 取得最大值, 此时

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot OP = \frac{1}{6} AC \cdot OB \cdot OP = \frac{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{6} = 1, \text{所以}$$

只有平面 $APC \perp$ 平面 ABC 时, $V_{P-ABC} = 1$, B 错误.

对于 C, 由于 $OP = OD = OB = \sqrt{3}$, 当 $PB = \sqrt{6}$ 时, $OP \perp OD$, 边 AD 旋转所形成的曲面是以 A 为顶点, 以 OP 为底面半径的

圆锥的侧面的 $\frac{1}{4}$, 其面积为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 2\pi \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, C 正

确.

对于 D, 当 $PB = 2$ 时, 易得 $\triangle PAB, \triangle PCB$ 都为正三角形, $AM + CM$ 取最小值时, 点 M 为 PB 的中点, $AM + CM$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$, D 错误. 故选 AC.

12. ACD 【解析】如图①, 在正方形 $ABCD$ 中, $AD \perp AE, CD \perp$

$CF, BE \perp BF$, 如图②折叠后, $PD \perp PE, PD \perp PF, PE \perp PF$, 因为 $PE \cap PF = P$, 且 $PE, PF \subset$ 平面 PEF , 所以 $PD \perp$ 平面 PEF , 又因为 $EF \subset$ 平面 PEF , 所以 $PD \perp EF$, 故 A 正确.

由选项 A 的分析可知 $PD \perp$ 平面 PEF , 所以 PD 为三棱锥 $D-PEF$ 的高, 因为正方形边长为 2, E 是 AB 的中点, F 是

BC 的中点, 所以 $PE = 1, PF = 1, PD = 2, S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} \times PE \times PF =$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}, \text{则 } V_{D-PEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle PEF} \cdot PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}, \text{所}$$

以 $V_{P-EFD} = V_{D-PEF} = \frac{1}{3}$ (提示: 等体积法), 故 B 错误.

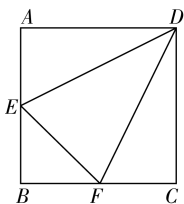
由于 $PE \perp PF, PE \perp PD, PF \perp PD$, 所以三棱锥 $P-EFD$ 的外



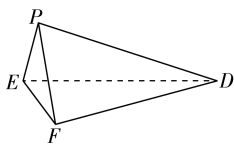
接球就是以 PE, PF, PD 为棱的长方体的外接球(提示:补形法的应用), 设外接球半径为 R , 则 $2R = \sqrt{PE^2 + PF^2 + PD^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, 则 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 因此外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6\pi$, 故 **C** 正确.

设点 P 到平面 EFD 的距离为 h , 由选项 B 的分析可知 $V_{P-EFD} = \frac{1}{3}$, $EF = \sqrt{PE^2 + PF^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $DE = \sqrt{PD^2 + PE^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $DF = \sqrt{PD^2 + PF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. 在 $\triangle EFD$ 中, 根据余弦定理得 $\cos \angle EDF = \frac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2 \cdot DE \cdot DF} = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$,

则 $\sin \angle EDF = \sqrt{1 - \cos^2 \angle EDF} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$, 所以 $S_{\triangle EFD} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DF \cdot \sin \angle EDF = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$, 因此 $V_{P-EFD} = \frac{1}{3} S_{\triangle EFD} \cdot h$, 即 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \cdot h$, 解得 $h = \frac{2}{3}$, 故 **D** 正确. 故选 ACD.



图①



图②

13. ABD 【解析】对于 A, 由翻折可知 $AO \perp BD$, $CO \perp BD$, $\therefore \angle AOC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角, $\therefore \angle AOC = 60^\circ$, 又 $AO = A'O = 1$, $CO = 2$, $\therefore$ 点 A 到平面 BCD 的距离 $h = AO \cdot \sin \angle AOC = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore V_{A-BCD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 是定值, 故 **A** 正确.

对于 B, $\because AO \perp BD$, $CO \perp BD$, $AO \cap CO = O$, $AO, CO \subset$ 平面 AOC , $\therefore BD \perp$ 平面 AOC , 又 $AC \subset$ 平面 AOC , $\therefore BD \perp AC$.

$\therefore$ 在 $\triangle AOC$ 中, $AC = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{3}$, $AO^2 + AC^2 = OC^2$, $\therefore AO \perp AC$, 又 $AO \cap BD = O$, $AO, BD \subset$ 平面 ABD , $\therefore AC \perp$ 平面 ABD , 故 **B** 正确.

对于 C, 由 B 选项分析可知 $AC \perp$ 平面 ABD , 又 $AB, AD \subset$ 平面 ABD , $\therefore AC \perp AB$, $AC \perp AD$. 由题意知 $BD \perp AO$, $BD \perp OC$.

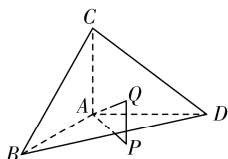
$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3, S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}.$$

当 $a = 1$ 时, $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $\therefore$ 当 $a = 1$ 时,

三棱锥 $A-BCD$ 的表面积 $S_{\text{表}} = \frac{9 + \sqrt{6} + \sqrt{15}}{2}$, 考虑对称性, 当 $a = 2$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的表面积也是该值, 故 **C** 错误.



对于 D, 由 B 分析可知, $AC \perp$ 平面 ABD , 将三棱锥 $A-BCD$ 改为 C 为顶点的画法, 如图所示.



设 P 是 $\triangle ABD$ 的外心, Q 是三棱锥 $A-BCD$ 外接球球心, 连接 $AP, AQ,$

PQ , 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的半径 $r = AQ = \sqrt{AP^2 + PQ^2} =$

$\sqrt{AP^2 + \frac{3}{4}}$, 又 $2AP = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$, $\sin \angle BAD \in (0, 1]$, $\therefore AP =$

$\frac{3}{2\sin \angle BAD} \geq \frac{3}{2}$, 当且仅当 $\angle BAD = 90^\circ$ 时取等号,

此时 $AB^2 + AD^2 = BD^2$, 即 $a^2 + 1 + 1 + (3-a)^2 = 3^2$, 解得 $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

或 $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\therefore$ 当 $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 外

接球的半径取得最小值, 最小值为 $\sqrt{3}$, 故 **D 正确**. 故选 ABD.

14. BCD 【解析】对于 A, 假设 $l \parallel$ 平面 $BCNM$, 因为平面 PBC 与平面 PMN 的交线为 l , 所以 $l \subset$ 平面 PBC , $l \subset$ 平面 PMN , 又平面 $PBC \cap$ 平面 $BCNM = BC$, 平面 $PMN \cap$ 平面 $BCNM = MN$, 所以 $l \parallel BC$, $l \parallel MN$, 根据基本事实 4 可知, $MN \parallel BC$, 显然与题中已知条件矛盾, 所以假设不成立, 故 **A 错误**.

对于 B, 连接 AP , 设 D 为 AC 中

点, 连接 BD , 易知 $BD \perp AC$, $MN \parallel$

BD , 故 $MN \perp AC$, 由翻折可知,

$MN \perp PN$, 又 $AC \cap PN = N$,

$AC, PN \subset$ 平面 PNC , 故 $MN \perp$ 平

面 PNC , 又 $MN \parallel BD$, 故 $BD \perp$ 平面 PNC , 故 PM 在平面 PNC

上的投影为 PN , BC 在平面 PNC 上的投影为 DC , 即 $\alpha =$

$\angle MPN$, $\beta = \angle BCD$. 由 $AB \perp BC$, $AB = BC$, 可知 $\triangle ABC$ 为等腰

直角三角形, 则 $\beta = \angle BCD = 45^\circ$, $\alpha = \angle MPN = \angle MAN = 45^\circ$,

故 $\alpha = \beta$, 故 **B 正确**.

对于 C, 由 B 选项的分析知 $MN \perp$ 平面 PNC , 又 $PC \subset$ 平面

PNC , 故 $MN \perp PC$, 则当 $PC \perp PN$ 时, 因为 $PN, MN \subset$ 平面

PNM , $PN \cap MN = N$, 所以 $PC \perp$ 平面 PNM , 又 $PC \subset$ 平面

PBC , 故平面 $PBC \perp$ 平面 PNM , 即需 $PC \perp PN$. 由题意可得

$AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $PN = NA = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4} \times 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $NC =$

$4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, 即当 $\cos \angle PNC = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$ 时, 有 $PC \perp PN$, 故

存在点 P , 使 $PC \perp PN$, 此时平面 $PBC \perp$ 平面 PNM , 故 **C 正**

确.

对于 D, 由 $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle MNC = 90^\circ$, 可知四边形 $BCNM$ 的

关键点

四个顶点共圆, 连接 MC , 则 MC 为该圆的直径, 故四棱锥

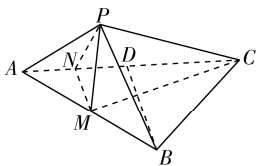
$P-BCNM$ 外接球球心必在过 MC 中点且垂直于平面 $BCNM$

的直线上.

则当球心在 MC 中点时, 四棱锥 $P-BCNM$ 外接球半径最小,

此时 $PC \perp PM$.

下面证明球心可以在 MC 中点:





由 C 选项分析可知, 当 $\cos \angle PNC = \frac{1}{3}$ 时, $PC \perp$ 平面 PNM ,

又 $PM \subset$ 平面 PNM , 故 $PC \perp PM$, 故球心可在 MC 中点.

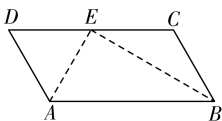
由 M 是 AB 的中点, 得 $BM = \frac{1}{2}AB = 2$, 则 $MC = \sqrt{2^2 + 4^2} =$

$2\sqrt{5}$, 则外接球半径 $r = \frac{MC}{2} = \sqrt{5}$, 外接球表面积为 $4\pi r^2 = 4\pi \times$

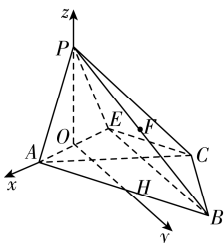
$(\sqrt{5})^2 = 20\pi$, 即四棱锥 $P-BCNM$ 外接球表面积的最小值为 20π , 故 D 正确. 故选 BCD.

15. B 【解析】在四边形 $ABCD$ 中, 连接 BE , 如图①, 由题可知 $\angle BCE = 120^\circ$, $BC = CE = 1$, 则 $\angle CEB = 30^\circ$. 由题可知 $\triangle DAE$ 是边长为 1 的等边三角形, 则 $\angle AED = 60^\circ$, 所以 $\angle AEB = 90^\circ$, 即 $AE \perp EB$. $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{3}$, 由 $PB = 2$, $PE = 1$, $BE = \sqrt{3}$, 得 $PE^2 + BE^2 = PB^2$, 则 $PE \perp EB$.

由 $AE \cap PE = E$, $AE, PE \subset$ 平面 PAE , 可得 $EB \perp$ 平面 PAE , 又因为 $EB \subset$ 平面 $ABCE$, 所以平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$.



图①



图②

如图②, 取 AE 的中点 O , AB 的中点 H , 连接 PO, OH , 则

$PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OH \parallel BE$, 可得 $OH \perp AE$, 因为 $\triangle PAE$ 为等边三角

形, 所以 $PO \perp AE$, 又平面 $PAE \cap$ 平面 $ABCE = AE$, $PO \subset$ 平面 PAE , 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCE$.

因为 $OH \subset$ 平面 $ABCE$, 所以 $PO \perp OH$, 故 OA, OH, OP 两两垂

直, 以 O 为原点, OA, OH, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建

立如图②所示的空间直角坐标系, 则 $P\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$E\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0\right)$, $F\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $C\left(-1,$

$\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, 可得 $\overrightarrow{PC} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{PE} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{PF} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

设平面 PCE 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = -x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PE} = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases}$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = 1, z = -1$, 可得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$.

则点 F 到平面 PCE 的距离为 $\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PF}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{15}}{10}$. 故选 B

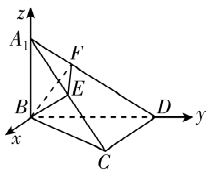
16. (1) 【证明】在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABD = 90^\circ$, 则 $CD \perp BD$, $A_1B \perp$

BD , 因为平面 $A_1BD \perp$ 平面 BCD , 平面 $A_1BD \cap$ 平面 $BCD =$



BD , 且 $CD \subset$ 平面 BCD , 所以 $CD \perp$ 平面 A_1BD , 而 $BF \subset$ 平面 A_1BD , 则 $CD \perp BF$, 又 $BF \perp A_1D$, $CD \cap A_1D = D$, $CD, A_1D \subset$ 平面 A_1CD , 所以 $BF \perp$ 平面 A_1CD .

(2) 【解】由 (1) 得 $A_1B \perp BD$, 又平面 $A_1BD \perp$ 平面 BCD , 平面 $A_1BD \cap$ 平面 $BCD = BD$, $A_1B \subset$ 平面 A_1BD , 所以 $A_1B \perp$ 平面 BCD .



故以 B 为坐标原点, BD, BA_1 所在直线

分别为 y, z 轴, 过点 B 作 CD 的平行线为 x 轴, 建立如图所示空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0), D(0, \sqrt{2}, 0), C(1, \sqrt{2}, 0), A_1(0, 0, 1), F(0, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$, 令 $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{CA_1} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则

$\overrightarrow{BF} = (0, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}), \overrightarrow{CA_1} = (-1, -\sqrt{2}, 1), \overrightarrow{BC} = (1, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{BE} =$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = (1 - \lambda, \sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, \lambda)$.

设平面 EFB 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{\sqrt{2}}{3}y + \frac{2}{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = (1 - \lambda)x + (\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda)y + \lambda z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1 - \lambda$, 得 $\mathbf{n} = (2 - 3\lambda, \sqrt{2}\lambda - \sqrt{2}, 1 - \lambda)$, 而平面 BCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{BA_1} = (0, 0, 1)$ (提示: 当有较明显的垂直关系时, 可直接写出平面的法向量),

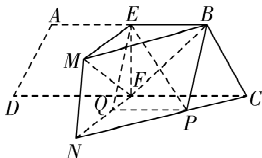
由平面 EFB 与平面 BCD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $|\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{BA_1} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BA_1}|} = \frac{1 - \lambda}{\sqrt{(2 - 3\lambda)^2 + (\sqrt{2}\lambda - \sqrt{2})^2 + (1 - \lambda)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 所以 $CE = |\overrightarrow{CE}| = \lambda |\overrightarrow{CA_1}| = \frac{4}{3}$.

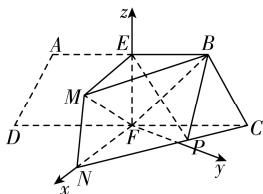
17. (1) 【证明】如图①, 在线段 NF 上取一点 Q , 使得 $NQ = \frac{2}{3}NF$, 连接 PQ, EQ , 因为 $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$, 所以 $PQ \parallel FC$, 且 $PQ = \frac{2}{3}FC$.

因为 $FC = \frac{1}{2}CD = 3, EB = \frac{1}{2}AB = 2$, 所以 $EB = \frac{2}{3}FC$, 又 $EB \parallel FC$, 所以 $EB \parallel PQ$, 且 $EB = PQ$, 所以四边形 $EBPQ$ 是平行四边形, 所以 $BP \parallel EQ$.

因为 $BP \not\subset$ 平面 $MEFN, EQ \subset$ 平面 $MEFN$, 所以 $BP \parallel$ 平面 $MEFN$.



图①



图②

(2) 【解】存在, $\theta = \frac{\pi}{2}$, 理由如下:

由题可知, $EF \perp FN, EF \perp FC$, 因为 $FN \cap FC = F, FN, FC \subset$ 平

面 NFC , 所以 $EF \perp$ 平面 NFC .

以 F 为坐标原点, FN, FE 所在直线分别为 x, z 轴, 建立如图②所示的空间直角坐标系.

由题可知, $EB = EM = 2, FC = FN = 3, EF = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$,
 $\angle NFC = \angle MEB = \theta$, 所以 $F(0, 0, 0), E(0, 0, 2), M(2, 0, 2),$
 $N(3, 0, 0), B(2\cos \theta, 2\sin \theta, 2), C(3\cos \theta, 3\sin \theta, 0)$.

设 $P(x, y, z)$, 因为 $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$, 所以 $(x-3, y, z) = \frac{2}{3}(3\cos \theta - 3, 3\sin \theta, 0) = (2\cos \theta - 2, 2\sin \theta, 0)$, 解得 $x = 2\cos \theta + 1, y = 2\sin \theta, z = 0$, 所以 $P(2\cos \theta + 1, 2\sin \theta, 0)$.

$\overrightarrow{FM} = (2, 0, 2), \overrightarrow{EB} = (2\cos \theta, 2\sin \theta, 0), \overrightarrow{EP} = (2\cos \theta + 1, 2\sin \theta, -2)$.

设平面 EBP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 2x_1 \cos \theta + 2y_1 \sin \theta = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EP} = (2\cos \theta + 1)x_1 + 2y_1 \sin \theta - 2z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}, z_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $\mathbf{n} = \left(1, -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \frac{1}{2} \right)$.

设 MF 与平面 EBP 所成角为 α , 则 $\sin \alpha = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{FM} \rangle| =$

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FM}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{FM}|} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4}} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{4}}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

解得 $\sin^2 \theta = 1$, 因为 $0 < \theta < \pi$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{2}$.

真题风向练

18. 命题点 ①几何法证明线面平行, 向量法求二面角的正弦值

(1) 【证明】**第一步: 作辅助线, 证明四边形 $A'D'CG$ 为平行四边形.**

如图, 过 C 作 $CG \parallel EF$ 交 EB 于 G , 连接 $A'G$.

因为 $EF \parallel AD, AB \parallel CD, \angle DAB = 90^\circ$, 所以四边形 $ADFE$ 为矩形, 四边形 $EFCG$ 为矩形, 所以 $EF \perp AD, EF \perp CG$, 所以 $CG \perp AD$, 所以 $CG \perp A'D'$, 所以四边形 $A'D'CG$ 为平行四边形.

第二步: 证明 $CD' \parallel$ 平面 $A'BE$.

所以 $CD' \parallel A'G$, 又 $A'G \subset$ 平面 $A'BE, CD' \not\subset$ 平面 $A'BE$, 所以 $CD' \parallel$ 平面 $A'BE$ 2 分

第三步: 证明 $CF \parallel$ 平面 $A'BE$.

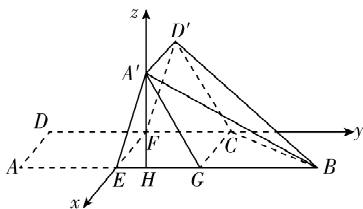
因为 $CF \parallel EB, EB \subset$ 平面 $A'BE, CF \not\subset$ 平面 $A'BE$, 所以 $CF \parallel$ 平面 $A'BE$ 4 分

第四步: 证明平面 $CD'F \parallel$ 平面 $A'BE$.

又 $CD', CF \subset$ 平面 $CD'F, CD' \cap CF = C$, 所以平面 $CD'F \parallel$ 平面 $A'BE$.

第五步: 利用面面平行的性质证结论.

因为 $A'B \subset$ 平面 $A'BE$, 所以 $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$ 6 分



(2)【解】**第一步：建立空间直角坐标系.**

因为 $A'E \perp EF$, $BE \perp EF$, 所以由二面角的定义可知, $\angle A'EB$ 即为平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成的二面角, 所以 $\angle A'EB = 60^\circ$, 同理 $\angle D'FC = 60^\circ$.

又 $D'F = DF = FC$, 所以 $\triangle D'FC$ 为等边三角形.

过 A' 作 $A'H \perp EB$ 交 EB 于 H .

因为 $EF \perp EB$, $EF \perp A'E$, $A'E \cap EB = E$, $A'E, EB \subset$ 平面 $A'EB$, 所以 $EF \perp$ 平面 $A'EB$, 又 $A'H \subset$ 平面 $A'EB$, 所以 $EF \perp A'H$.

又 $A'H \perp EB$, $EB \cap EF = E$, $EB, EF \subset$ 平面 $EFCB$, 所以 $A'H \perp$ 平面 $EFCB$.

因此以 F 为坐标原点, 直线 FE 、直线 FC 、过点 F 且平行于 $A'H$ 的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系. 8 分

第二步：写出相关点及向量的坐标.

不妨设 $AD = 1$, 则 $F(0, 0, 0)$, $E(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 1,$

$0)$, $D'\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 0)$, $\overrightarrow{CD'} =$

$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{FE} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{FD'} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 10 分

第三步：求平面 BCD' 的法向量.

设平面 BCD' 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

则
$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -x_1 - y_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CD'} = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0, \end{cases}$$
 令 $x_1 = 1$, 则 $\mathbf{m} =$

$\left(1, -1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 11 分

第四步：求平面 $EFD'A'$ 的法向量.

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

则
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FE} = x_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FD'} = \frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0, \end{cases}$$
 令 $y_2 = 1$, 则 $\mathbf{n} = \left(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

..... 12 分

第五步：得出平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-1 + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}} \times \sqrt{\frac{4}{3}}} = -\frac{\sqrt{7}}{7},$

所以 $\sin \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\sqrt{42}}{7}$, 即平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二

面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$ 15 分



一题多解 (1) 第一步: 用平面 $CD'F$ 内两个不共线的向量表示 $\overrightarrow{A'B}$.

由题可得, $AB=3AD$, $CD=2AD$, 又 F 为 CD 的中点,

所以 $FD=FC=\frac{1}{2}CD=AD$,

在四边形 $ADFE$ 中, $EF//AD$, $AE//FD$, 所以四边形 $ADFE$ 为平行四边形, 则 $AE=FD=AD$, 所以 $BE=2AD$ 3 分

所以 $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{A'E}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{D'F}+2\overrightarrow{FC}$, 即 $\overrightarrow{A'B}$ 与 $\overrightarrow{D'F}$, $\overrightarrow{FC}$ 共面.

..... 4 分

第二步: 证明结论.

又 $A'B \not\subset$ 平面 $CD'F$, $D'F, FC \subset$ 平面 $CD'F$, $D'F \cap FC = F$,

所以 $A'B//$ 平面 $CD'F$ 6 分



专题3 空间动态问题



题型上分练

1. B 【解析】对于 A, 在正方体中当点 P 与 D_1 重合时, 四边形 ABC_1P 为平行四边形, 则 $AP \parallel BC_1$, A 有可能成立;

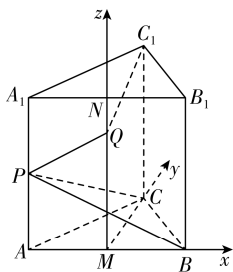
对于 B, 在正方体中, 若 $AP \parallel BC$, 那么 A, P, B, C 四点共面, 因为 P 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的一个动点, 所以 A, P, B, C 不可能在同一平面内, B 不可能成立;

对于 C, 在正方体中, 当点 P 与 A_1 重合时, $AP \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AP \perp BC$, C 有可能成立;

对于 D, 在正方体中, 当点 P 与 B_1 重合时, $BC \perp$ 平面 A_1B_1BA , 因为 $AP \subset$ 平面 A_1B_1BA , 所以 $AP \perp BC$, 又 $AP \perp A_1B$, $A_1B \cap BC = B$, $A_1B, BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $AP \perp$ 平面 A_1BC , 因为 $A_1C \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $AP \perp A_1C$, D 有可能成立. 故选 B.

2. B 【解析】对于 A, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \parallel BB_1$ 且 $AA_1 = BB_1$, $\therefore$ 四边形 AA_1B_1B 为平行四边形, $\therefore$ 点 M, N 分别为棱 AB, A_1B_1 的中点, $\therefore MN \parallel AA_1$. $\because MN \not\subset$ 平面 AA_1C_1C , $AA_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C , $\therefore MN \parallel$ 平面 AA_1C_1C , $\therefore C_1, P, C, Q$ 四点不共面, $\therefore$ 直线 C_1Q 与 CP 始终异面, 故 A 正确.

方法一(建系法): 连接 CM , $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, M 为 AB 的中点, $\therefore CM \perp AB$, 又 $\because AA_1 \perp$ 平面 ABC , $MN \parallel AA_1$, $\therefore MN \perp$ 平面 ABC . 如图①, 以 M 为坐标原点, $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MN}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 则 $M(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), C_1(0, \sqrt{3}, 2), P(-1, 0, 1)$, 设 $Q(0, 0, h) (0 \leq h \leq 2)$.



图①

对于 B, $\because \overrightarrow{C_1Q} = (0, -\sqrt{3}, h-2), \overrightarrow{CP} = (-1, -\sqrt{3}, 1)$, 若 $C_1Q \perp CP$, 则 $\overrightarrow{C_1Q} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$, $\therefore 3+h-2=0$, $\therefore h=-1$, $\because 0 \leq h \leq 2$, $\therefore$ 不存在点 Q 使得直线 C_1Q 与直线 CP 垂直, 故 B 错误.

对于 C, $\because \overrightarrow{C_1Q} = (0, -\sqrt{3}, h-2), \overrightarrow{BP} = (-2, 0, 1)$, 若 $C_1Q \perp BP$, 则 $\overrightarrow{C_1Q} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, $\therefore h-2=0$, $\therefore h=2$, 故当点 Q 在 N 的位置时, 直线 C_1Q 与直线 BP 垂直, 故 C 正确.

对于 D, $\because \overrightarrow{C_1Q} = (0, -\sqrt{3}, h-2), \overrightarrow{PQ} = (1, 0, h-1)$, 若 $C_1Q \perp PQ$, 则 $\overrightarrow{C_1Q} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$, $\therefore (h-2)(h-1) = 0$, $\therefore h=2$ 或 $h=1$, 故当点 Q 在 N 的位置或 Q 为 MN 中点时, 直线 C_1Q 与直线 PQ 垂直, 故 D 正确.

方法二(向量基底法): 对于 B, 设 $\overrightarrow{QN} = \lambda \overrightarrow{MN} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{QC_1} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NC_1} = \lambda \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = \lambda \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP} =$



$\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}$, 若直线 C_1Q 与直线 CP 垂直, 则 $\overrightarrow{QC_1} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$,

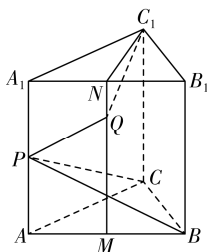
$$\therefore \left(\lambda \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} \right) = 0,$$

$$\therefore \frac{\lambda}{2}|\overrightarrow{AA_1}|^2 - \lambda \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} - |\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} +$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \therefore \frac{\lambda}{2} \times 4 - 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{3}{2},$$

$\because 0 \leq \lambda \leq 1, \therefore$ 不存在点 Q 使得直线 C_1Q 与直线 CP 垂直, 故 **B** 错误.

对于 C, 连接 C_1N , 如图②, $\because C_1A_1 = C_1B_1, N$ 为 A_1B_1 的中点, $\therefore C_1N \perp A_1B_1$, $\because AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1, C_1N \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\therefore AA_1 \perp C_1N$, $\because AA_1 \cap A_1B_1 = A_1, AA_1, A_1B_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $\therefore C_1N \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 又 $BP \subset$ 平面 $ABB_1A_1, \therefore C_1N \perp BP$, $\therefore$ 当点 Q 在 N 的位置时, 直线 C_1Q 与直线 BP 垂直, 故 **C** 正确.



图②

对于 D, 由 B 选项知, $\overrightarrow{QC_1} = \lambda \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NA_1} +$

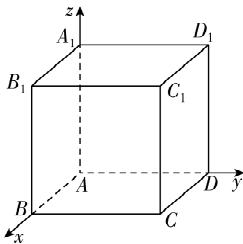
$$\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QC_1} \cdot \overrightarrow{QP} &= \left(\lambda \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left[\left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right] \\ &= \lambda \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) |\overrightarrow{AA_1}|^2 + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 + \left[-\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right] \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} \\ &\quad + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 4\lambda \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) + 1 + 0 + 0 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4\lambda \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = \frac{1}{2}$, 故当 Q 在点 N 的位置或 Q 为 MN 中点时, $C_1Q \perp PQ$, 故 **D** 正确. 故选 B.

3. ACD 【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以 A 为坐标原点, AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), A_1(0,0,1), B_1(1,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1)$.

$$\therefore \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AA_1}, \therefore P(x, y, z).$$





A: $\overrightarrow{AP} = (x, x, z)$, $\overrightarrow{CP} = (x-1, x-1, z)$, $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BB_1} =$

$$(0, 0, 1), \therefore \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + x = 0, \\ \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + 1 + x - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \overrightarrow{BD} \text{ 是平面 } ACP \text{ 的}$$

法向量, 又 $\because \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, $BB_1 \not\subset$ 平面 ACP , $\therefore BB_1 \parallel$ 平面 ACP , **A 正确**;

B: $\overrightarrow{AP} = (x, x, x)$, $x \neq 0$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$, 设异面直线 AP 与 BC 所成的角为 α , 则 $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \left| \frac{x}{\sqrt{3}x} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 显然 $\alpha \neq 45^\circ$, **B 错误**;

C: 设 $x = a$, 则 $P(a, 1-a, 0)$, 即 $\overrightarrow{D_1P} = (a, -a, -1)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (1, 1, 0)$, 则 $\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = a - a = 0$, $\therefore D_1P \perp A_1C_1$, **C 正确**;

D: $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\because x + y + z = 1$, $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + x^2 + z^2 + y^2 + z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, 即 $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$, 当且仅当 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时取等号, $\therefore |\overrightarrow{AP}| =$

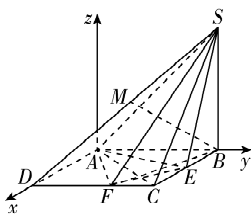
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{D 正确. 故选 ACD.}$$

4. ABC 【解析】设 $SB = AB = 2$, 以 A 为原点, AD 所在直线为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴, 过 A 且垂直底面的直线为 z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $D(2, 0, 0)$, $S(0, 2, 2)$.

因为 M 为 SD 中点, 所以 $M(1, 1, 1)$.

设 $BE = CF = t (0 \leq t \leq 2)$, 则 $E(t, 2, 0)$, $F(2, 2-t, 0)$.

选项 A: 当 E, F 分别为所在棱的中点时, $t = 1$, 则 $E(1, 2, 0)$, $F(2, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AE} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{SB} = (0, 0, -2)$, $\overrightarrow{BF} = (2, -1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$, 故 $AE \perp SB$, $AE \perp BF$, $SB \cap BF = B$, $SB, BF \subset$ 平面 SBF , 由线面垂直判定定理, 可得 $AE \perp$ 平面 SBF , **A 正确**.



选项 B: $\overrightarrow{BM} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AS} = (0, 2, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$, 所以

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AS} = 1 \times 0 + (-1) \times 2 + 1 \times 2 = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 = 0, \end{cases} \quad \text{故 } BM \perp AS, BM \perp AC,$$

$AS \cap AC = A$, $AS, AC \subset$ 平面 SAC , 故 $BM \perp$ 平面 SAC . 因为 $\overrightarrow{SA} = (0, -2, -2)$, $\overrightarrow{SE} = (t, 0, -2)$, 若 $BM \perp$ 平面 SAE , 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{SA} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{SE} = t - 2 = 0, \end{cases} \quad \text{即 } t = 2, \text{ 此时 } E \text{ 与 } C \text{ 重合, 即 } BM \perp \text{ 平面}$$

SAC . 因为 $\overrightarrow{SA} = (0, -2, -2)$, $\overrightarrow{AF} = (2, 2-t, 0)$, 若 $BM \perp$ 平面

$$SAF, \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{SA} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AF} = 2 - 2 + t = 0, \end{cases} \quad \text{即 } t = 0, \text{ 此时 } F \text{ 与 } C \text{ 重合, 即}$$



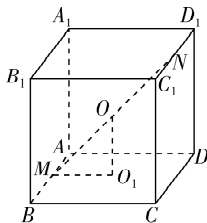
$BM \perp$ 平面 SAC . $\vec{SA} = (0, -2, -2)$, $\vec{AD} = (2, 0, 0)$, $\vec{BM} \cdot \vec{AD} = 2 \neq 0$, BM 与平面 SAD 不垂直. 因此, 有且仅有平面 SAC 与 BM 垂直, **B 正确**.

选项 C: $BC = 2$, 则 $BE = \frac{1}{2}$, 即 $t = \frac{1}{2}$, $E\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$, $F\left(2, \frac{3}{2}, 0\right)$. 四边形 $ABEF$ 的面积 $S = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FBE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 +$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{8}$ (提示: 割补法), $S_{\text{正方形}ABCD} = 4$, 则 $\frac{V_{S-ABEF}}{V_{S-ABCD}} = \frac{\frac{17}{8}}{4} = \frac{17}{32}$, 所以 $V_{S-ABEF} = \frac{17}{32} V_{S-ABCD}$, **C 正确**.

选项 D: $\vec{SD} = (2, -2, -2)$, $\vec{AE} = (t, 2, 0)$, $\vec{BF} = (2, -t, 0)$, 所以 $\cos 60^\circ = \frac{|\vec{SD} \cdot \vec{AE}|}{|\vec{SD}| \cdot |\vec{AE}|}$, 即 $\frac{1}{2} = \frac{|2t-4|}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{t^2+4}}$, 化简可得 $t^2 - 16t + 4 = 0$, 又 $0 \leq t \leq 2$, 所以可得 $t = 8 - 2\sqrt{15}$. 设 SD 与 BF 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{SD} \cdot \vec{BF}|}{|\vec{SD}| \cdot |\vec{BF}|} = \frac{|4+2t|}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{t^2+4}} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\theta \neq 30^\circ$, **D 错误**. 故选 ABC.

5. B 【解析】因为 $\vec{PM} \cdot \vec{PN} = 0$, 所以 P 点在以 MN 为直径的球面上. 如图, 易知 MN 的中点即为正方体中心 O , 球心 O 在正方体每个面上的射影为面的中心.



设 O 在底面 $ABCD$ 上的射影为 O_1 , 连接 O_1M , OO_1 , 因为正方体的棱长为 $2a$, 所以 $MN = 2\sqrt{2}a$, 易知 $OO_1 = a$, $O_1M = a$.

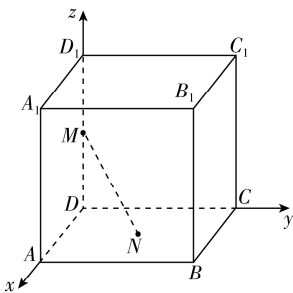
又动点 P 在正方体的表面上运动,

所以点 P 的轨迹是六个半径为 a 的圆, 轨迹长度为 $6 \times 2\pi a =$

关键点

$12\pi a$, 故选 B.

6. AD 【解析】以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B_1(2, 2, 2)$, $M(0, 0, 1)$, 设 $N(x, y, 0)$, 则 $\vec{MN} = (x, y, -1)$.



对于 A, 由题可知 $\vec{B_1N} = (x-2, y-2, -2)$, 因为 $MN \perp B_1N$, 所以 $\vec{MN} \cdot \vec{B_1N} = x(x-2) + y(y-2) + 2 = 0$, 化简得 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$, 解得 $x = 1$ 且 $y = 1$, 所以 Γ 是一个点 (另解: 当 $MN \perp$



B_1N 时, Γ 为以 B_1M 为直径的球与平面 $ABCD$ 的交线. 由正方体的棱长为 2, M 为 DD_1 的中点, 可得 $B_1D_1 = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, $B_1M = \sqrt{B_1D_1^2 + D_1M^2} = \sqrt{8+1} = 3$, B_1M 的中点到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{DM+BB_1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, 故以线段 B_1M 为直径的球与平面 $ABCD$ 相切, Γ 是一个点), **A 正确**.

对于 B, 易知 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $DN, BN \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $BB_1 \perp BN, DD_1 \perp DN$, 故动点 N 到直线 DD_1, BB_1 的距离之和即为动点 N 到点 D 与点 B 的距离之和. 又 $BD = 2\sqrt{2}$, 故当动点 N 到直线 DD_1, BB_1 的距离之和为 $2\sqrt{2}$ 时, Γ 是线段, 不是椭圆, **B 错误**.

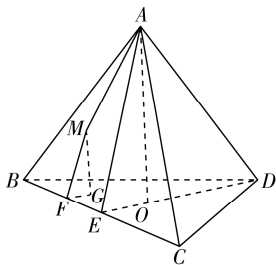
对于 C, 取平面 $ABCD$ 的法向量 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, 若 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60° , 则 $\sin 60^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{MN}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\mathbf{m}|} = \frac{|(x, y, -1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 化简得 $x^2+y^2 = \frac{1}{3}$ (另解: 由 $DM \perp$ 平面 $ABCD$, 可知 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角即为 $\angle MND$. 在 $\text{Rt} \triangle MDN$ 中, $MD = 1, \angle MDN = 90^\circ, \angle MND = 60^\circ$, 所以 $DN = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 为定值), 所以 Γ 是以 D 为圆心, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆, **C 错误**.

对于 D, 取平面 ADD_1A_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, 若 MN 与平面 ADD_1A_1 所成的角为 60° , 则 $\sin 60^\circ = |\cos \langle \overrightarrow{MN}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|(x, y, -1) \cdot (0, 1, 0)|}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 化简得 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$, 即 Γ 为双曲线, **D 正确**. 故选 AD.

7. D 【解析】如图, 设 O 是 $\triangle BCD$ 的中心, 连接 AO , 则 $AO \perp$ 平面 BCD , 设 E 是 BC 的中点, 连接 ED , 易知 E, O, D 三点共线, 且 $DE \perp BC$.

设正四面体的棱长为 a , 连接 AE , 则 $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $OE =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, 所以 $AO = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.



因为 $AE \perp BC, DE \perp BC$, 所以 $\angle AED$ 是二面角 $A-BC-D$ 的平

面角, 设 $\angle AED = \theta$, 则 $\sin \theta = \frac{AO}{AE} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

过 M 作 $MG \perp$ 平面 BCD , 垂足为 G , 过 M 作 $MF \perp BC$, 垂足为



F , 连接 FG , 因为 $BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $MG \perp BC$,
 又 $MF \cap MG = M$, $MF, MG \subset$ 平面 MGF , 所以 $BC \perp$ 平面 MGF ,
 因为 $FG \subset$ 平面 MGF , 所以 $BC \perp FG$, 所以 $\angle MFG = \angle AED = \theta$.
 依题意, M 到底面 BCD 的距离等于 MA 的 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 即 $MG =$
 $\frac{2\sqrt{2}}{3}MA$, 则 $MF \times \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}MA$, 即 $MF = MA$, 即 M 到定点 A 和
 到定直线 BC 的距离相等, 所以动点 M 的轨迹是抛物线的一部分. 故选 D.

8. ABD 【解析】由题可知, 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球 O 即为分

关键点

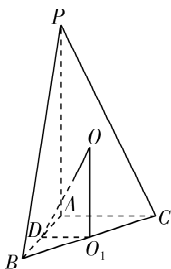
分别以 AB, AC, AP 为长、宽、高的长方体的外接球, 设外接球 O
 的半径为 R , 则 $2R = \sqrt{8^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{6}$, $\therefore R = 2\sqrt{6}$.

如图, 取 BC 的中点 O_1 , 连接 OO_1 , 则 O_1 为 $\triangle ABC$ 的外接圆
 圆心, 且 $OO_1 \perp$ 平面 ABC .

连接 O_1D , 当 OD 与过点 D 的截面垂直时, 截面的面积最小,

关键点

$\therefore OD = \sqrt{OO_1^2 + O_1D^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, 此时截面圆的半径 $r =$
 $\sqrt{R^2 - OD^2} = 2$, $\therefore$ 最小截面面积为 $\pi r^2 = 4\pi$, 故 A 正确.

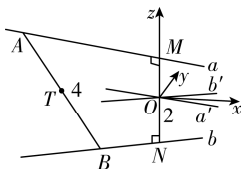


当截面过球心时, 截面圆的面积最大, 为 $\pi R^2 = 24\pi$, 故 B 正确.

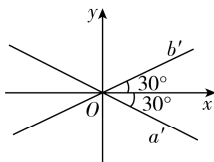
由题可知, $BP = PC = 4\sqrt{5}$, $BC = 4\sqrt{2}$, 故 $\cos \angle BPC =$
 $\frac{(4\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \times (4\sqrt{5})^2} = \frac{4}{5}$, 即 $\angle BPC = \alpha$, 易得 $\angle BPA =$
 $\angle CPA = \beta$.

又点 Q 的轨迹是以点 P 为圆心, 4 为半径的三段圆弧, 其中
 一段圆弧的圆心角为 α , 两段圆弧的圆心角为 β , $\therefore$ 点 Q 的轨
 迹长即为 $(\alpha + 2\beta) \times 4 = 4\alpha + 8\beta$, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.

9. B 【解析】设线段 MN 中点为 O , 过点 O 分别作直线 $a' \parallel a$,
 $b' \parallel b$, 以 O 为坐标原点, 直线 a', b' 所成的角的角平分线所在
 直线为 x 轴, 直线 MN 所在直线为 z 轴建立如图①所示的空间
 直角坐标系, 其中 xOy 平面如图②,



图①



图②

则 $M(0, 0, 1)$, $N(0, 0, -1)$, 设 $A(\sqrt{3}m, -m, 1)$, $B(\sqrt{3}t, t,$
 $-1)$, 所以 $|AB| = \sqrt{3(m-t)^2 + (-m-t)^2 + 4} = 4$, 即 $3(m-t)^2 +$
 $(m+t)^2 = 12$.

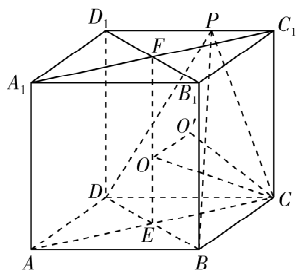
$$\text{设线段 } AB \text{ 的中点 } T \text{ 的坐标为 } (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}(m+t)}{2}, \\ y = \frac{t-m}{2}, \\ z = 0, \end{cases}$$

可得 $\begin{cases} m+t=\frac{2x}{\sqrt{3}}, \\ t-m=2y, \\ z=0, \end{cases}$ 所以 $3(m-t)^2+(m+t)^2=12y^2+\frac{4x^2}{3}=12$, 整理

得 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, 所以 T 的轨迹为椭圆, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故选 B.

10. C 【解析】如图, 连接 AC , 交 BD 于点 E , 易知 E 为 $\triangle BCD$ 的外心.

连接 A_1C_1, B_1D_1 , 交于点 F , 连接 EF , 易知 $EF \perp$ 平面 BCD ,
 $\therefore$ 三棱锥 $P-BCD$ 的外接球球心 O 在 EF 上.



设 $\triangle PCD$ 的外接圆圆心为 O' ,连接 OO' , $\therefore OO' \perp$ 平面 PCD ,且 $OO' = 1$.

连接 $O'C, OC$, 设 $\triangle PCD$ 的外接圆半径为 $r = O'C$, 三棱锥 $P-BCD$ 的外接球半径为 $R = OC$, $\therefore R^2 = 1 + r^2$.

$$\text{设 } PC_1 = x, x \in [0, 2], \therefore S_{\triangle PCD} = 2 = \frac{1}{2} PC \cdot PD \sin \angle CPD,$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \angle CPD} = \frac{PC \cdot PD}{4} = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt{(2-x)^2+4}}{4}.$$

$$\text{又 } r = \frac{CD}{2\sin \angle CPD} = \frac{1}{\sin \angle CPD} \text{ (提示: 正弦定理),}$$

$$\therefore r^2 = \frac{(x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4)}{16}.$$

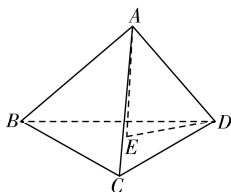
设 $f(x) = (x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f'(x) = 4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)$, 设 $g(x) = f'(x)$, $x \in [0, 2]$, 则 $g'(x) = 12(x^2 - 2x + 2) > 0$, $f'(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增.

又 $f'(1) = 0$, $\therefore f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, 2]$ 上单调递

增, 易知 $f(x) \in [25, 32]$, $\therefore r^2 \in \left[\frac{25}{16}, 2\right]$, $\therefore R = \sqrt{1+r^2} \in$

$\left[\frac{\sqrt{41}}{4}, \sqrt{3}\right]$, 故选 C.

11. C 【解析】如图,正四面体 $ABCD$ 底面 BCD 的中心记为点 E ,连接 AE, DE . 由正四面体的性质,可得 $AE \perp$ 平面 BCD .





因为正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2, 所以 $\triangle BCD$ 的高为 $\sqrt{3}$, 则

$$DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以正四面体 } ABCD \text{ 的高 } AE = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

设正四面体 $ABCD$ 内切球的半径为 R , 球心为 O .

由等体积法可得 $V_{\text{正四面体 } ABCD} = 4V_{\text{正三棱锥 } O-BCD}$, 即 $\frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times$

$$AE = 4 \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times R, \text{ 解得 } R = \frac{1}{4} AE = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 所以正四面体的}$$

$$\text{内切球的半径 } R = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

因为正方体的棱长为 a , 所以正方体的外接球的半径 $r =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a \leq R = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 因此 } a_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \text{ 故选 C.}$$

12. A 【解析】由题意, 正方体内切球的球心为正方体的中心,

记为点 O , 内切球半径 $r = \frac{1}{2}$.

$\because AD_1 \parallel BC_1, AD_1 \not\subset \text{平面 } A_1BC_1, BC_1 \subset \text{平面 } A_1BC_1, \therefore AD_1 \parallel \text{平面 } A_1BC_1$, 同理可得 $AC \parallel \text{平面 } A_1BC_1$.

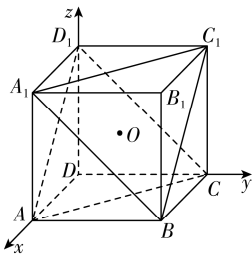
$\because AD_1, AC \subset \text{平面 } D_1AC, AD_1 \cap AC = A, \therefore \text{平面 } D_1AC \parallel \text{平面 } A_1BC_1$.

$\because D_1P \parallel \text{平面 } A_1BC_1, \therefore D_1P \subset \text{平面 } D_1AC$, 故点 P 的轨迹是 平面 D_1AC 与正方体内切球的交线, 此交线为圆, 记其圆心为 O_1 .

如图①, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D_1(0, 0,$

$$1), O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{AO} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



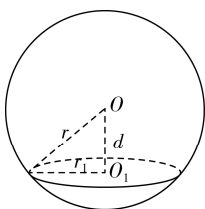
图①

设平面 D_1AC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = -x + y = 0, \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot \mathbf{n} = -x + z = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 则 } y = z = 1, \text{ 故 } \mathbf{n} = (1, 1, 1).$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 到平面 } D_1AC \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AO} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{如图②, 则圆 } O_1 \text{ 的半径 } r_1 = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

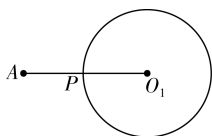


图②

$$\text{又 } AO = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AO_1 = \sqrt{AO^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

如图③, 则 AP 的最小值为 $AO_1 - r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.



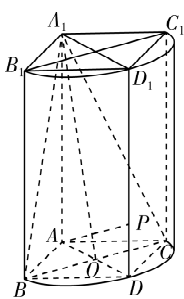
图③

13. AB 【解析】对于 AC: 如图①, 过点 B 作直线平行于 AC, 交圆柱曲面于点 D, 连接 CD, 因为几何图形是由直三棱柱与半个圆柱拼接而成的简单组合体, 所以易知 $AC = BD = 2$, 四边形 ABDC 为正方形, 连接 AD, BC 相交于点 O, 则 O 为 AD, BC 的中点, 当 P, D 重合时, $BP \parallel AC$, 故存在点 P, 使得 $BP \parallel AC$, A 正确.

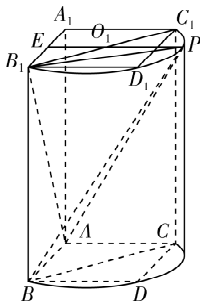
过 B_1 作直线平行于 A_1C_1 , 交圆柱曲面于点 D_1 , 连接 DD_1 , A_1D_1 , A_1B , A_1C , A_1O , 由题意得 $AO = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$, $A_1O = \sqrt{A_1A^2 + AO^2} = \sqrt{16 + 2} = 3\sqrt{2}$, 过点 A 作 $AP \perp A_1O$, 交 DD_1 于点 P, 因为 $A_1A \perp$ 平面 ABC, $BC \subset$ 平面 ABC, 所以 $A_1A \perp BC$, 又 $AD \perp BC$, $A_1A \cap AD = A$, $A_1A, AD \subset$ 平面 A_1ADD_1 , 所以 $BC \perp$ 平面 A_1ADD_1 , 又 $AP \subset$ 平面 A_1ADD_1 , 所以 $BC \perp AP$, 又 $A_1O \cap BC = O$, $A_1O, BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $PA \perp$ 平面 A_1BC . 由题易知 PA 与底面 ABC 所成角为 $\angle PAO$, 因为

关键点

$\angle PAO + \angle A_1AP = 90^\circ$, $\angle AA_1O + \angle A_1AP = 90^\circ$, 所以 $\angle PAO = \angle AA_1O$, 故 $\sin \angle PAO = \sin \angle AA_1O = \frac{AO}{A_1O} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$, C 错误.



图①



图②

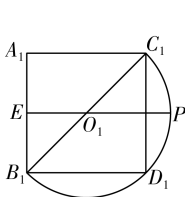
对于 B, 如图②, 连接 AB_1 , 取 B_1C_1 的中点 O_1 , 则 O_1 为半圆柱的上底面半圆的圆心, 取 A_1B_1 的中点 E, 连接 EO_1 并延长交圆

关键点

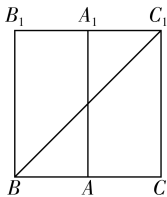
柱上底面半圆周于点 P, 此时点 P 到平面 ABB_1 的距离最



大, 连接 $PB_1, PB, PA, S_{\triangle ABB_1} = \frac{1}{2}BB_1 \cdot AB = 4$, 如图③, 在组合体上底面中, $PO_1 = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{2}$, $EO_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = 1$, 所以 $EP = \sqrt{2} + 1$, 所以三棱锥 $P-ABB_1$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABB_1} \cdot EP = \frac{4(1+\sqrt{2})}{3}$, **B 正确**.



图③



图④

对于 D, 将平面 ABB_1A_1 与平面 ACC_1A_1 沿着公共棱 A_1A 展开到同一平面内, 如图④所示, 连接 BC_1 , 其中 $BC = BA + AC = 2 + 2 = 4$, 由勾股定理得 $BC_1 = \sqrt{BC^2 + C_1C^2} = 4\sqrt{2}$, 由于 $\sqrt{16+2\pi^2} > 4\sqrt{2}$, 故一质点从点 B 沿着该组合体表面运动到 C_1 的最短距离不为 $\sqrt{16+2\pi^2}$, **D 错误**. 故选 AB.

14. $4+2\sqrt{3}$ 【解析】 设圆柱 OO_1 的底面圆半径为 r , 则需满足

$$2r = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 4, \text{ 可得 } r = 2.$$

易知三棱锥 $P-ABC$ 的外接球与圆柱 OO_1 的外接球相同, 其半径 R 满足 $4\pi R^2 = 52\pi$, 解得 $R = \sqrt{13}$.

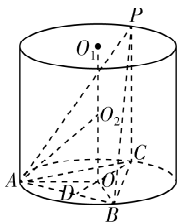
设外接球球心为 O_2 , $OO_1 = h$, 连接 O_2A , 所以 $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$, 解得 $h = 6$, 即圆柱的高为 6.

因为点 P 是上底面圆周上的一动点, 即点 P 到底面 ABC 的距离为 6.

取 AB 的中点为 D , 连接 OD, OA, OB, OC , 易知 $OD \perp AB$, 如图, 因为 $OA = OB = AB = 2$, 所以 $OD = \sqrt{3}$,

当点 C 到 AB 的距离最大时, $\triangle ABC$ 的面积最大, 此时三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大.

因为点 C 在圆柱下底面的圆周上, 所以点 C 到 AB 的距离的最大值为 $OC + OD = 2 + \sqrt{3}$, 因此 $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3} \times (2 + \sqrt{3}) \times 6 = 4 + 2\sqrt{3}$.

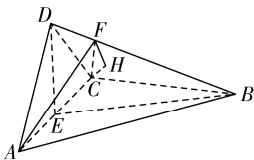


15. (1) 【证明】 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中, $AD = CD$, $\angle ADB = \angle CDB$, $DB = DB$, $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SAS), $\therefore BA = BC$.

$\because E$ 为 AC 中点, $\therefore AC \perp BE$ 且 $AC \perp DE$, 又 $BE \cap DE = E$, $BE, DE \subset$ 平面 BED , $\therefore AC \perp$ 平面 BED .



$\therefore AC \subset \text{平面 } ACD, \therefore \text{平面 } BED \perp \text{平面 } ACD.$



(2)【解】(几何法) 过 C 作 $CH \perp \text{平面 } ABD$ 于 H , 连接 HF .

由线面角的定义可知 $\angle CFH = \alpha, \sin \alpha = \frac{CH}{CF}.$

$\because C$ 是定点, 平面 ABD 是定平面, $\therefore CH$ 是定值, 因此 $\sin \alpha$ 最大, 也即 CF 最小, 即在 $CF \perp BD$ 时取到.

$\because AB = BC = BD = 2, \angle ACB = 60^\circ, \therefore AC = 2, BE = \sqrt{3}, S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}.$

又 $AD \perp CD, AD = CD, \therefore AD^2 + CD^2 = AC^2, \therefore AD = CD = \sqrt{2}, DE = 1.$

$\therefore S_{\triangle ABD} = \sqrt{p(p-AD)(p-BD)(p-AB)},$ 其中 $p = \frac{AB+BD+AD}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (提示: 已知三边求三角形面积, 利用海伦公式),

$\therefore S_{\triangle ABD} = \sqrt{p(p-2)^2(p-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

又 $DE^2 + BE^2 = 4 = BD^2, \therefore DE \perp BE, \therefore$ 易知 DE 为三棱锥 $D-ABC$ 的高. 由 $V_{\text{三棱锥 } D-ABC} = \frac{1}{3} \cdot DE \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot CH \cdot S_{\triangle ABD},$

得 $1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{7}}{2} \times CH, \therefore CH = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$

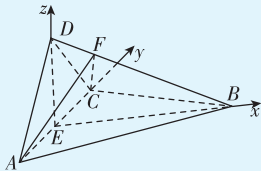
当 $CF \perp BD$ 时, $\frac{1}{2} \cdot BD \cdot CF = S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \therefore CF =$

$\frac{\sqrt{7}}{2}, \therefore \sin \alpha = \frac{CH}{CF} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$

一题多解 (2) (建系法) $\because AB = BD = 2, AB = BC, \angle ACB = 60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 为等边三角形且边长为 2, $\therefore BE = \sqrt{3}.$

$\because DA = DC, \angle ADC = 90^\circ, \therefore DE = 1, \therefore DE^2 + BE^2 = 4 = BD^2, \therefore DE \perp BE.$

又 $\because DE \perp AC, BE \cap AC = E, BE, AC \subset \text{平面 } ABC, \therefore DE \perp \text{平面 } ABC.$ 以 E 为原点, EB, EC, ED 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



$\therefore D(0, 0, 1), A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), \vec{DB} = (\sqrt{3}, 0, -1), \vec{AD} = (0, 1, 1), \vec{DF} = (\sqrt{3}\lambda, 0, -\lambda), \vec{CD} = (0, -1, 1), \therefore \vec{CF} = \vec{CD} + \vec{DF} = (\sqrt{3}\lambda, -1, 1-\lambda).$

设平面 ABD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$ 则

$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{DB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AD} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} \sqrt{3}x - z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1,$ 则 $y = -\sqrt{3}, z = \sqrt{3},$

$\therefore \mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}).$



$$\begin{aligned}\therefore \sin \alpha &= \frac{|\overrightarrow{CF} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{CF}| |\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3\lambda^2+1+(1-\lambda)^2} \cdot \sqrt{7}} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2\lambda^2-\lambda+1} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{7}} \leq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{7}} = \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{7}, \text{ 当且仅当 } \lambda = \frac{1}{4} \text{ 时取等号, } \therefore \sin \alpha \text{ 的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{7}.\end{aligned}$$

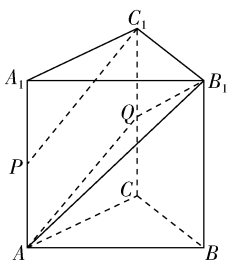
16. 【解】(1) 如图①, 连接 PC_1, AB_1 , 取 CC_1 的中点 Q , 连接 AQ, QB_1 .

易知 $AQ \parallel PC_1$, 则 $\angle QAB_1$ 为异面直线 PC_1 与 AB_1 所成的角.

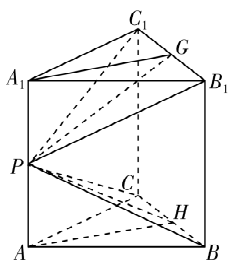
$$\text{又 } AQ = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, QB_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, AB_1 =$$

$$\sqrt{2}, \text{ 由余弦定理得 } \cos \angle QAB_1 = \frac{AQ^2 + AB_1^2 - QB_1^2}{2AB_1 \cdot AQ} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

所以异面直线 PC_1 与 AB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



图①



图②

(2) 如图②, 连接 PB_1, PC_1, PB, PC , 分别取 B_1C_1, BC 的中点 G, H , 连接 A_1G, PH, PG, AH .

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 易知 $A_1G \perp B_1C_1, A_1A \perp B_1C_1$, 又 $A_1G \cap A_1A = A_1, A_1G, A_1A \subset \text{平面 } A_1GP$, 所以 $B_1C_1 \perp \text{平面 } A_1GP$, 又 $PG \subset \text{平面 } A_1GP$, 所以 $B_1C_1 \perp PG$, 则 $\angle A_1GP$ 为二面角 $A_1-B_1C_1-P$ 的平面角 α , 同理 $\angle AHP$ 为二面角 $A-BC-P$ 的平面角 β .

$$\text{设 } A_1P = t, \text{ 则 } AP = a - t, \text{ 所以 } \tan \angle A_1GP = \tan \alpha = \frac{A_1P}{A_1G} = \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\tan \angle AHP = \tan \beta = \frac{AP}{AH} = \frac{a-t}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\text{则 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{a-t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1 - \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{a-t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}a}{4\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + 3 - a^2}.$$

当 $t = \frac{a}{2}$, 即 P 为 AA_1 的中点时, $\tan(\alpha + \beta)$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{3}a}{3-a^2}$.

17. (1) 【证明】因为 $PA \perp \text{平面 } ABCD, AD \subset \text{平面 } ABCD$, 所以



$PA \perp AD$.

因为 $AB \perp BC, AD \parallel BC$, 所以 $AD \perp AB$.

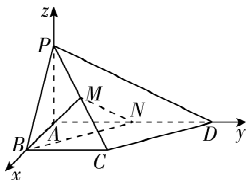
又因为 $PA, AB \subset$ 平面 $PAB, PA \cap AB = A$, 所以 $AD \perp$ 平面 PAB .

因为 $AD \parallel BC, BC \subset$ 平面 $PBC, AD \not\subset$ 平面 PBC , 所以 $AD \parallel$ 平面 PBC .

因为平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l, AD \subset$ 平面 PAD , 所以 $AD \parallel l$ (提示: 线面平行的性质定理).

又因为 $AD \perp$ 平面 PAB , 所以 $l \perp$ 平面 PAB .

(2) 【解】以 A 为原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,4,0), P(0,0,2), N(0,2,0), \overrightarrow{PB} = (2,0,-2)$.

设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MC} (\lambda > 0)$, 则 $M\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{2}{1+\lambda}\right), \overrightarrow{NB} = (2, -2, 0), \overrightarrow{BM} = \left(\frac{-2}{1+\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{2}{1+\lambda}\right)$.

设平面 BMN 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{NB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ \frac{-2x}{1+\lambda} + \frac{2\lambda y}{1+\lambda} + \frac{2z}{1+\lambda} = 0, \end{cases} \text{ 取 } x = 1, \text{ 则 } \mathbf{m} = (1, 1, 1-\lambda),$$

$$|\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{2\lambda}{2\sqrt{2} \times \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 3}} =$$

$\frac{\lambda}{\sqrt{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 3}}$, 则 PB 与平面 BMN 的夹角的正弦值为

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 3}}.$$

设 $f(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 3}}$, 则 $[f(\lambda)]^2 = \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 - 2\lambda + 3)} =$

$$\frac{1}{2\left(\frac{3}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + 1\right)} = \frac{1}{6\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{3\lambda} + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{6\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}},$$

当 $\lambda = 3$ 时, $[f(\lambda)]^2$ 取得最大值 $\frac{3}{4}$, 所以 $f(\lambda)$ 的最大值为

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以当 M 点满足 $PM = 3MC$ 时, PB 与平面 BMN 所成的

角最大, 最大角为 $\frac{\pi}{3}$.

18. (1) 【证明】因为 $\angle NBC = 90^\circ, AD \parallel BC$, 所以 $AD \perp PA, AD \perp AB$,

又因为 $PA \cap AB = A, PA, AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp$ 平面 PAB , 又 $BC \subset$ 平面 PBC , 所以平面



$PBC \perp$ 平面 PAB .

(2)【解】(i) 由(1)知 $\angle PAB$ 即为二面角 $P-AD-B$ 的平面角, 故 $\angle PAB = 120^\circ$. 因为 $NA = CD = 2AB = 2$, 所以 $NC = 6$, $NB = 3$, 从而 $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle DCB = 30^\circ$.

过点 A 作 $AF \perp PB$, 交 PB 于点 F (图略), 又因为 $AF \subset$ 平面 PAB , 平面 $PBC \perp$ 平面 PAB , 平面 $PBC \cap$ 平面 $PAB = PB$, 所以 $AF \perp$ 平面 PBC , 则 PA 与平面 PBC 所成角即为 $\angle APF$.

在 $\triangle PAB$ 中, 由余弦定理可得 $PB = \sqrt{PA^2 + AB^2 - 2PA \cdot AB \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{7}$,

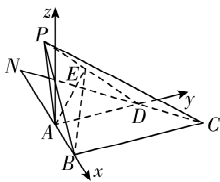
由等面积法得 $AF = \frac{\frac{1}{2}PA \cdot AB \cdot \sin 120^\circ}{\frac{1}{2}PB} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $\sin \angle APF = \frac{AF}{AP} = \frac{\sqrt{21}}{14}$,

所以 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(ii) 存在. 理由如下:

如图, 以 A 为原点, AB, AD 所在直线分别为 x 轴, y 轴, 过 A 且垂直于底面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0)$, $P(-1, 0, \sqrt{3})$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $C(1, 3\sqrt{3}, 0)$,



0 , $\vec{AB} = (1, 0, 0)$, $\vec{DC} = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\vec{DP} = (-1, -2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

设 $\vec{DE} = \lambda \vec{DP}$, $\lambda \in [0, 1]$, 可得 $E(-\lambda, 2\sqrt{3}(1-\lambda), \sqrt{3}\lambda)$, $\vec{AE} = (-\lambda, 2\sqrt{3}(1-\lambda), \sqrt{3}\lambda)$.

设平面 ABE 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{AB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{AE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 0, \\ -\lambda x + 2\sqrt{3}(1-\lambda)y + \sqrt{3}\lambda z = 0, \end{cases}$

令 $y = \lambda$, 可得 $\mathbf{m} = (0, \lambda, 2(\lambda-1))$.

设平面 PDC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{DP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{DC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -a - 2\sqrt{3}b + \sqrt{3}c = 0, \\ a + \sqrt{3}b = 0, \end{cases}$

令 $a = \sqrt{3}$, 可得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1, -1)$.

设平面 ABE 与平面 PDC 的夹角为 θ , 由 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} =$

$\frac{|2-3\lambda|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5\lambda^2-8\lambda+4}} = \frac{1}{5}$, 可解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{4}{5}$, 所以存在点 E ,

当 $DE = \frac{1}{2}DP$ 或 $DE = \frac{4}{5}DP$ 时满足题意.

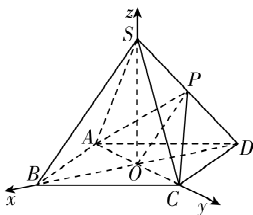
19. (1)【证明】连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 SO .

由 $SA = SC$, 得 $SO \perp AC$, 又在正方形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, $SO \cap BD = O$, $SO, BD \subset$ 平面 SBD , 所以 $AC \perp$ 平面 SBD ,

又因为 $SD \subset$ 平面 SBD , 所以 $AC \perp SD$.

(2)【解】连接 PO , 因为 $SB \parallel$ 平面 PAC , $SB \subset$ 平面 SBD , 平面 $SBD \cap$ 平面 $PAC = PO$, 所以 $SB \parallel PO$.

在 $\triangle SBD$ 中, 因为 O 为 BD 的中点, 所以点 P 为 SD 的中点.



易知直线 SO, AC, BD 两两垂直, 如图, 以点 O 为坐标原点, OB, OC, OS 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系.

因为正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 所以 $A(0, -\sqrt{2}, 0), C(0, \sqrt{2}, 0), B(\sqrt{2}, 0, 0)$. 因为 $SA=SC=AC=2\sqrt{2}$, 所以 $SO=\sqrt{6}$, 所以 $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), S(0, 0, \sqrt{6})$, 所以 $\overrightarrow{AC}=(0, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{AP}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

设平面 PAC 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(x, y, z)$, 则可得

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} 2\sqrt{2}y = 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{6}}{2}z = 0, \end{cases}$$

令 $x=3\sqrt{2}$, 可得 $\mathbf{m}=(3\sqrt{2}, 0, \sqrt{6})$.

因为 $SB \parallel$ 平面 PAC , 所以直线 SB 到平面 PAC 的距离等于点

B 到平面 PAC 的距离, 即 $\frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以直线 SB 到平面 PAC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(3)【解】不存在. 理由如下:

由(2)得直线 SB 到平面 PAC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,

又因为 $SB \parallel$ 平面 PAC , 设点 Q 为 SB 的中点, 则点 Q 到平面 PAC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

假设在平面 PAC 上存在点 E , 使得 $\triangle ESB$ 是以 SB 为底边,

$\frac{2\pi}{3}$ 为顶角的等腰三角形, 则有 $EQ = \frac{1}{2}SB \cdot \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 因

为 $EQ = \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以不存在满足条件的点 E .

真题风向练

20. BC **命题点** 点到直线的距离、二面角、线面垂直的综合应用

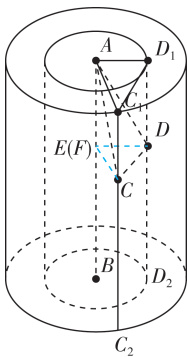
【解析】方法一(几何法): 由已知, 点 C 可以在以 AB 为轴, 底面半径为 2 的圆柱侧面上, 点 D 可以在以 AB 为轴, 底面半径为 1 的圆柱侧面上, 令 C 在线段 C_1C_2 上, D 在线段 D_1D_2 上, 如图所示, 则 C, D 在平面 AC_1D_1 上的射影分别为 C_1, D_1 , 由题可知 $\angle C_1AD_1 = 60^\circ$, 当 C, D 在平面 AC_1D_1 下方, 且 $CC_1=DD_1$ 时, 根据几何特征可得 $\angle CAD < 60^\circ$, 故 **A** 错误. 固定点 C 在 C_1 处, 点 D 在 D_1 处, 在 $\triangle AC_1D_1$ 中, $AC_1=2$,

$AD_1=1, \angle C_1AD_1=60^\circ$, 所以 $\cos \angle C_1AD_1 = \frac{2^2+1^2-C_1D_1^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{1}{2}$, 解



得 $C_1D_1 = \sqrt{3}$, 当 C, D 任意移动时, $CD \geq C_1D_1 = \sqrt{3}$ (另解: C, D 间的最短距离为 C_1C_2 与 D_1D_2 之间的距离, 即 $\sqrt{3}$, 故 $CD \geq \sqrt{3}$), 故 **B** 正确.

当 $AB \perp CD$ 时, 过点 C 作 AB 的垂线, 垂足为 E , 过点 D 作 AB 的垂线, 垂足为 F , 因为 $CE \cap CD = C, DF \cap CD = D, CE, CD \subset$ 平面 $CED, DF, CD \subset$ 平面 CDF , 所以 $AB \perp$ 平面 $CED, AB \perp$ 平面 CDF , 所以平面 CED 与平面 CDF 重合, 故 E, F 重合, 因为 $CE = 2, DE = 1, \angle CED = 60^\circ$, 所以 $CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2CE \cdot DE \cos \angle CED = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ = 3$, 所以 $CE^2 = DE^2 + CD^2$, 所以 $CD \perp DE$, 又 $AB \perp CD, AB \cap DE = E, AB, DE \subset$ 平面 ABD , 所以 $CD \perp$ 平面 ABD , 故 **C** 正确.



当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, 点 C 与 C_1 重合, 点 D 与 D_1 重合, 此时 $\angle CAD = 60^\circ, AC$ 与 AD 不垂直, 故 **D** 错误. 故选 **BC**.

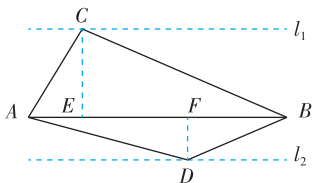
方法二(几何法): 过点 C, D 作 AB 的平行线, 分别为 l_1, l_2 , 由题意知 l_1 到 AB 的距离为 2, l_2 到 AB 的距离为 1. 过点 C, D 作 AB 的垂线, 分别交 AB 于点 E, F , 如图①.

当 E, F 重合, 且不与 A, B 重合时, 连接 CD , 如图②.

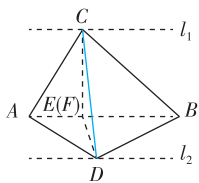
根据题意, 可知 $\angle CED = 60^\circ$.

因为 $AB \perp CE, AB \perp ED, CE \cap ED = E, CE, ED \subset$ 平面 CED , 所以 $AB \perp$ 平面 CED , 当 A 与 E 的距离无限远时, $\angle CAD$ 可以小于 60° , 故 **A** 错误.

当 E, F 重合时, 因为 $AB \perp$ 平面 CED, l_1, l_2 均与 AB 平行, 所以 $l_1 \perp$ 平面 $CED, l_2 \perp$ 平面 CED , 又 $CD \subset$ 平面 CED , 所以 $l_1 \perp CD, l_2 \perp CD$, 故线段 CD 的长即为直线 l_1, l_2 间的距离, 因为 $CE = 2, DE = 1, \angle CED = 60^\circ$, 所以 $\cos \angle CED = \frac{2^2 + 1^2 - CD^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{1}{2}$, 解得 $CD = \sqrt{3}$.



图①



图②

当 E, F 不重合时, $CD > \sqrt{3}$, 故 $CD \geq \sqrt{3}$, 故 **B** 正确.

当 $AB \perp CD$ 时, 因为 $CE \perp AB, DF \perp AB, CD \cap CE = C, CD \cap DF = D, CD, CE \subset$ 平面 $CDE, CD, DF \subset$ 平面 CDF ,

则 $AB \perp$ 平面 $CDE, AB \perp$ 平面 CDF , 故 E, F 一定重合, 由 **B** 选项分析可知 $CD^2 + DE^2 = CE^2$, 所以 $CD \perp DE$,

又 $AB \cap DE = E, AB, DE \subset$ 平面 ABD , 所以 $CD \perp$ 平面 ABD , 故 **C** 正确.

当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, 由于 $AC, AD \subset$ 平面 ACD , 所以 $AB \perp AC, AB \perp AD$,

则 $\angle CAD$ 即为二面角 $C-AB-D$ 的平面角, 即 $\angle CAD = 60^\circ$, AC 与 AD 不垂直, 故 **D** 错误. 故选 **BC**.

方法三(建系法): 以 A 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴, 建



立空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0)$, 设 $B(c,0,0)$, 且 $c>0$ (提示: 令 $c>0$ 方便计算, 不影响距离和二面角).

设点 C 坐标为 (x_c, y_c, z_c) , 点 D 坐标为 (x_d, y_d, z_d) , 由点 C 到直线 AB 的距离为 2, 可得 $y_c^2 + z_c^2 = 4$, 由点 D 到直线 AB 的距离为 1, 可得 $y_d^2 + z_d^2 = 1$.

易知 $C'(0, y_c, z_c)$, $D'(0, y_d, z_d)$ 为 C, D 在 yAz 平面上的射影,

则 $\overrightarrow{AC'} = (0, y_c, z_c)$, $\overrightarrow{AD'} = (0, y_d, z_d)$, 根据二面角 $C-AB-D$ 为 60° , 可得 $\langle \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD'} \rangle = 60^\circ$, 则 $\cos 60^\circ = \frac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AD'}}{|\overrightarrow{AC'}| |\overrightarrow{AD'}|} =$

$$\frac{y_c y_d + z_c z_d}{2 \times 1}, \text{ 即 } y_c y_d + z_c z_d = 1.$$

对于 A, $\overrightarrow{AC} = (x_c, y_c, z_c)$, $\overrightarrow{AD} = (x_d, y_d, z_d)$, 则 $\cos \angle CAD = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{x_c x_d + 1}{\sqrt{x_c^2 + 4} \cdot \sqrt{x_d^2 + 1}}.$

令 $a = x_c, b = x_d$, 要判断是否恒有 $\cos \angle CAD = \frac{ab+1}{\sqrt{a^2+4} \cdot \sqrt{b^2+1}} \leq$

$\frac{1}{2}$, 当 $ab+1 \leq 0$ 时, $\cos \angle CAD \leq \frac{1}{2}$ 恒成立, 所以只需要讨论

当 $ab+1 > 0$ 时的情况即可. 即判断当 $ab+1 > 0$ 时, 是否恒有

$$\cos^2 \angle CAD = \frac{(ab+1)^2}{(a^2+4)(b^2+1)} \leq \frac{1}{4}.$$

由 $(a^2+4)(b^2+1) - (ab+2)^2 = (a-2b)^2 \geq 0$, 可得 $(a^2+4)(b^2+1) \geq (ab+2)^2$, 故

$$\frac{(ab+1)^2}{(a^2+4)(b^2+1)} \leq \frac{(ab+1)^2}{(ab+2)^2}.$$

令 $t = ab > -1$, 则 $\cos^2 \angle CAD \leq \left(\frac{t+1}{t+2} \right)^2.$

设 $f(t) = \frac{t+1}{t+2} = 1 - \frac{1}{t+2}$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t) \rightarrow 1$, 故 $\cos \angle CAD$ 可

以无限接近 1, 从而 $\angle CAD$ 可趋于 0° , 因此 $\angle CAD \geq 60^\circ$ 不恒

成立 (另解: 举反例, 令 $x_c = x_d = 1$, 则 $\cos \angle CAD =$

$$\frac{1+1}{\sqrt{1+4} \times \sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{10}} > \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ, \text{ 此时 } \angle CAD <$$

60°), 故 A 错误.

对于 B, $\overrightarrow{CD} = (x_d - x_c, y_d - y_c, z_d - z_c)$, 则 $|\overrightarrow{CD}|^2 = (x_d - x_c)^2 + (y_d^2 + z_d^2) + (y_c^2 + z_c^2) - 2(y_c y_d + z_c z_d),$

将 $y_d^2 + z_d^2 = 1, y_c^2 + z_c^2 = 4, y_c y_d + z_c z_d = 1$ 代入可得 $|\overrightarrow{CD}|^2 = (x_d - x_c)^2 + 1 + 4 - 2 \times 1 = (x_d - x_c)^2 + 3 \geq 3$, 当且仅当 $x_d = x_c$ 时等号成立, 因此 $|\overrightarrow{CD}| \geq \sqrt{3}$, 故 B 正确.

对于 C, 当 $AB \perp CD$ 时, 易知 $x_d = x_c$, 由 B 选项分析可知

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3}.$$

$\overrightarrow{CD} = (0, y_d - y_c, z_d - z_c)$, $\overrightarrow{AD} = (x_d, y_d, z_d)$, 则 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \cdot$

$$x_d + (y_d - y_c)y_d + (z_d - z_c)z_d = (y_d^2 + z_d^2) - (y_c y_d + z_c z_d) = 1 - 1 = 0,$$

故 $CD \perp AD$, 又 $AB \perp CD, AD \cap AB = A, AD, AB \subset \text{平面 } ABD$, 所



以 $CD \perp$ 平面 ABD , 故 **C** 正确.

对于 **D**, 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, 点 C, D 分别与其在 yAz 平面上的射影重合, 此时 $\overrightarrow{AC} = (0, y_C, z_C), \overrightarrow{AD} = (0, y_D, z_D)$,
 $\cos \angle CAD = \frac{y_C y_D + z_C z_D}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle CAD = 60^\circ$, AC 与 AD 不垂直, 故 **D** 错误. 故选 **BC**.

21. 命题点 面面垂直、外接球问题、二面角

(1) 如图①, 在 $\triangle ACD$ 中, 由 $AC = CD = 1, \angle ADC = 30^\circ$, 得 $\angle CAD = \angle ADC = 30^\circ$, 所以 $AD = 2AC \cos \angle DAC = 2 \times 1 \times \cos 30^\circ = \sqrt{3}$, 且 $\angle BAC = \angle DAB - \angle CAD = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, 即 $AB \perp AC$.

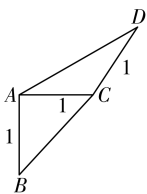
(i) 【证明】因为 $AB \perp AC, PC \perp AB, PC \cap AC = C, PC, AC \subset$ 平面 PAC , 所以 $AB \perp$ 平面 PAC , 又 $AB \subset$ 平面 ABC , 所以平面 $PAC \perp$ 平面 ABC 3 分

(ii) 【解】以 A 为坐标原点, AB, AC 所在的直线分别为 x 轴, y 轴, 过点 A 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴, 建立如图②所示的空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), P\left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

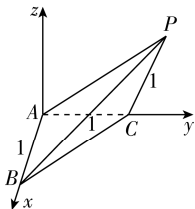
设球心 $O(a, b, c)$, 球的半径为 R , 则 $AO = BO = CO = PO = R$, 所以 $a^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-1)^2 + c^2 = a^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2$,

解得 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}, R = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

..... 8 分



图①



图②

(2) 【解】因为 P 是动点, 设 P 在 AC 上的射影为 Q , 则 $PQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 P 的轨迹是以 Q 为圆心、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径且与 y 轴垂直的圆.

设 $P\left(p, \frac{3}{2}, q\right)$, 则 $p^2 + q^2 = \frac{3}{4}, \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0), \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{CP} = \left(p, \frac{1}{2}, q\right)$ 10 分

设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = y_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CP} = px_1 + \frac{1}{2}y_1 + qz_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1 = q$, 则 $\mathbf{m} = (q, 0, -p)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -x_2 + y_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CP} = px_2 + \frac{1}{2}y_2 + qz_2 = 0, \end{cases}$$



令 $x_2 = q$, 则 $n = \left(q, q, -p - \frac{1}{2} \right)$.

$$\text{所以 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \frac{p^2 + q^2 + \frac{1}{2}p}{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{2q^2 + \left(p + \frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}p + \frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4} \times \left(\frac{7}{4} - p^2 + p\right)}}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

令 $t = \frac{1}{2}p + \frac{3}{4}$, $\frac{3 - \sqrt{3}}{4} \leq t \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$, 则 $p = 2t - \frac{3}{2}$, 所以 $\cos \langle m,$

$$n \rangle = \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4} \times (-4t^2 + 8t - 2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} \times \left(-4 + \frac{8}{t} - \frac{2}{t^2}\right)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4} \times \left[-2\left(\frac{1}{t} - 2\right)^2 + 4\right]}},$$

当 $t = \frac{1}{2}$, 即 $p = -\frac{1}{2}$, $q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\cos \langle m, n \rangle$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故二面角 $A-CP-B$ 的余弦值的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

真题综合测试

题组 1

1. B 命题点 ⊙ 圆柱、圆锥的侧面积公式, 圆锥的体积公式

【解析】设圆柱、圆锥的底面半径为 r , 则圆锥的母线长为

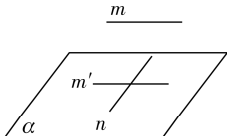
$\sqrt{r^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{r^2 + 3}$. 又圆柱与圆锥的侧面积相等, 所以

$2\pi r \cdot \sqrt{3} = \pi r \sqrt{r^2 + 3}$, 解得 $r = 3$, 所以圆锥的体积 $V = \frac{1}{3}\pi \times$

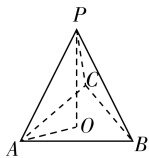
$3^2 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi$, 故选 B.

2. C 命题点 ⊙ 空间线、面位置关系的判断

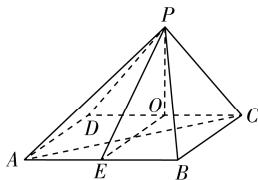
【解析】

选项	分析	正误
A	m 与 n 也可能垂直, 如图, $m // m'$, $m' \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, $m' \perp n$, 可知 $m \perp n$ 	×
B	垂直于同一条直线的两平面平行	×
C	$\because m // \alpha, \therefore$ 存在直线 m' 使得 $m' \subset \alpha$, 且 $m // m'$, 又 $m \perp \beta, \therefore m' \perp \beta, \therefore \alpha \perp \beta$	✓
D	若 $\alpha \cap \beta = n$, 则当 m 与 n 重合时, $m \subset \beta$	×

故选 C.

**3. B 命题点** ⊙正四面体的结构特征、圆的面积**【解析】** 设 O 为正三角形 ABC 的中心, 连接**题眼** PO, AO , 如图. 在正三角形 ABC 中, $AO = \frac{2}{3} \times$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 2\sqrt{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle PAO$ 中, $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} =$ $\sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}$. 当 $PQ = 5$ 时, 根据勾股定理 $OQ =$ $\sqrt{PQ^2 - PO^2} = 1 < \sqrt{3}$, 得 Q 点的轨迹是以 O 为圆心, 1 为半径的圆, 则集合 T 表示的区域的面积为 π , 故选 B.**4. C 命题点** ⊙棱台的体积计算**【解析】** 由题意知棱台的两底面面积分别为 $1.4 \times 10^8 \text{ m}^2$ 和 $1.8 \times 10^8 \text{ m}^2$ (提示: $1 \text{ km}^2 = 10^6 \text{ m}^2$), 高为 $157.5 - 148.5 =$ $9(\text{m})$, 所以棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (1.4 \times 10^8 + 1.8 \times 10^8 +$ $\sqrt{1.4 \times 10^8 \times 1.8 \times 10^8}) \times 9 = 3 \times 10^8 \times (1.4 + 1.8 + 0.6 \times \sqrt{7}) \approx$ $1.437 \times 10^9 \approx 1.4 \times 10^9 (\text{m}^3)$ (提示: 台体的体积 $V =$ $\frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$, S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h

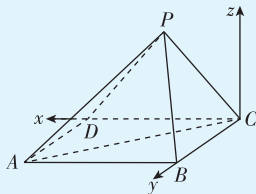
表示台体的高), 故选 C.

5. C 命题点 ⊙余弦定理与三角形面积公式**【解析】** 如图, 取 CD 的中点为 O , AB 的中点为 E , 连接 PO , OE, PE , 因为 $PC = PD$, 所以 $PO \perp CD$.因为四边形 $ABCD$ 为正方形, CD 的中点为 O , AB 的中点为 E , 所以 $OE \perp CD$, $AB \parallel CD$. 又 $PO \cap OE = O$, 所以 $CD \perp$ 平面 POE .因为 $PE \subset$ 平面 POE , 所以 $CD \perp PE$, 所以 $AB \perp PE$, 所以 $PB =$ PA . 在 $\triangle PAC$ 中, $PC = 3$, $\angle PCA = 45^\circ$, $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, 由余弦定理得, $PA^2 = PC^2 + AC^2 - 2PC \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = 9 + 32 - 2 \times$ $3 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 17$, 则 $PA = PB = \sqrt{17}$.在 $\triangle PBC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle PCB = \frac{PC^2 + BC^2 - PB^2}{2PC \cdot BC} =$ $\frac{9 + 16 - 17}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \angle PCB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle PCB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} PC \cdot BC \cdot \sin \angle PCB = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$, 故选 C.



一题多解

在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 $AC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$. 在 $\triangle PCA$ 中, 由余弦定理得 $PA^2 = PC^2 + AC^2 - 2PC \cdot AC \cdot \cos \angle PCA = 3^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 17$, 所以 $PA = \sqrt{17}$. 分别以直线 CD, CB 为 x 轴, y 轴建立空间直角坐标系 (如图).



则 $C(0,0,0), D(4,0,0), A(4,4,0)$. 设点 $P(x,y,z)$, 由 $PC=3, PD=3, PA=\sqrt{17}$,

$$\text{得} \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3, \\ \sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2} = 3, \\ \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2+z^2} = \sqrt{17}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=2, \end{cases}$$

所以 $P(2,1,2)$. 又 $B(0,4,0)$, 所以 $PB = \sqrt{17}$.

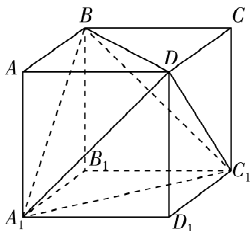
在 $\triangle PCB$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle PCB = \frac{PC^2 + CB^2 - PB^2}{2PC \cdot CB} = \frac{1}{3}$,

所以 $\sin \angle PCB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} PC \cdot CB \cdot \sin \angle PCB = 4\sqrt{2}$.

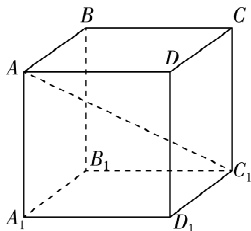
6. ABD 命题点 空间几何体的综合问题

【解析】对于 A 选项, 正方体内切球的直径为 1 m, 故 A 符合题意;

对于 B 选项, 如图①, 正方体内部最大的正四面体棱长为 $BA_1 = \sqrt{2} \text{ m}$, $\sqrt{2} \text{ m} > 1.4 \text{ m}$, 故 B 符合题意;



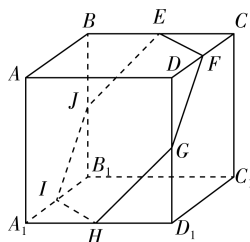
图①



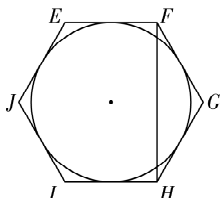
图②

对于 C 选项, 圆柱底面直径为 0.01 m, 可忽略不计, 高为 1.8 m, 圆柱可看作长度为 1.8 m 的线段. 如图②, 正方体的体对角线为 $AC_1 = \sqrt{3} \text{ m} < 1.8 \text{ m}$, 故 C 不符合题意;

对于 D 选项, 圆柱高为 0.01 m, 可忽略不计, 底面直径为 1.2 m, 圆柱可看作直径为 1.2 m 的圆. 如图③④, E, F, G, H, I, J 为各棱的中点, 六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形, 其边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$, 其内切圆直径 $FH = \sqrt{3} FG = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m}$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} > (1.2)^2 = 1.44$, 故 D 符合题意.



图③



图④



(2)【解】第一步:证明 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

由三棱柱是直三棱柱,得 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,又 $BC, AC \subset$ 平面 ABC ,所以 $BC \perp CC_1, AC \perp CC_1$.

又 $AC \perp BC, AC \cap CC_1 = C, AC, CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 8 分

第二步:寻找直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角.

因为 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,所以 $\angle BC_1C$ 即为 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角.

由(1)知 $DE \parallel BC_1$,所以 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45° ,即 $\angle BC_1C = 45^\circ$,所以 $AC = BC = CC_1 = 2$ 10 分

第三步:求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离,可通过线面平行转化为点到平面的距离.

因为 $AC \perp BC, AC \perp CC_1, BC \cap CC_1 = C, BC, CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

如图,取 CC_1 的中点 H ,连接 EH ,则 $EH \parallel AC$,所以 $EH \perp$ 平面 BCC_1B_1 .所以 EH 的长即为直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离,

因为 $AC = 2$,所以 $EH = \frac{1}{2}AC = 1$ 13 分

一题多解 (1) 第一步:证明 $EF \parallel$ 平面 $BCC_1B_1, DF \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

如图,取 AC 的中点 F ,连接 EF, DF ,

因为 D, E 分别为 AB, AC_1 的中点,所以 $EF \parallel CC_1$ 2 分

又因为 $EF \not\subset$ 平面 $BCC_1B_1, CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,所以 $EF \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ,

同理 $DF \parallel$ 平面 BCC_1B_1 4 分

第二步:证明平面 DEF 与平面 BCC_1B_1 平行.

又 $DF \cap EF = F, DF, EF \subset$ 平面 DEF ,所以平面 $DEF \parallel$ 平面 BCC_1B_1 5 分

第三步:根据面面平行的性质证明 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

又 $DE \subset$ 平面 DEF ,所以 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 6 分

(2) 第一步:建立空间直角坐标系,写出相关点的坐标.

由题意知 $AC \perp BC, CC_1 \perp$ 平面 ABC .以 C 为坐标原点, $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,设 $AC = a (a > 0)$,则 $C(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, a, 0), D\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right), C_1(0, 0, 2), E\left(\frac{a}{2}, 0, 1\right)$.

..... 8 分

第二步:利用直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45° 求出 a 的值.

因为 $\overrightarrow{DE} = \left(0, -\frac{a}{2}, 1\right)$,平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{BC} = (0, -a, 0)$,

$$\text{所以 } \sin 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DE}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + 1} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

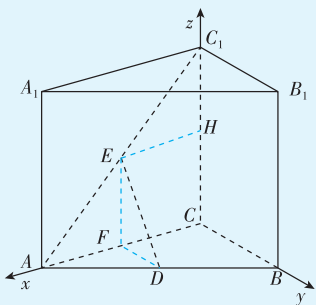
解得 $a = 2$ (负值舍去). 10 分



第三步:求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离,可通过线面平行转化为点到平面的距离.

因为 $\overrightarrow{C_1E} = \left(\frac{a}{2}, 0, -1\right) = (1, 0, -1)$, 平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$, 所以 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离,即点 E 到平面 BCC_1B_1 的距离,即为 $d = \frac{|\overrightarrow{C_1E} \cdot \overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{2}{2} = 1$.

..... 13 分



10. **命题点** ①利用线面垂直的性质证明线线垂直、向量法求线面角的正弦值

(1)【证明】第一步:证明 $AE \perp$ 平面 BCD .

$\because AE \perp CE, AE \perp DE, CE \cap DE = E, CE \subset$ 平面 $BCD, DE \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore AE \perp$ 平面 BCD 2 分

第二步:利用线面垂直的性质证明 $AE \perp CD$.

又 $\because CD \subset$ 平面 $BCD, \therefore AE \perp CD$, 3 分

第三步:证明 $CD \perp$ 平面 ABD .

$\because CD \perp AD, AE \cap AD = A, AE \subset$ 平面 $ABD, AD \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore CD \perp$ 平面 ABD , 5 分

第四步:利用线面垂直的性质证明 $CD \perp AB$.

$\because AB \subset$ 平面 $ABD, \therefore CD \perp AB$ 6 分

(2)【解】第一步:建立空间直角坐标系.

$\because CD \perp$ 平面 $ABD, BD \subset$ 平面 $ABD, \therefore CD \perp BD$.

由题得 $BE = \frac{1}{3}BD$, 在线段 BC 上取一点 F 使得 $BF = \frac{1}{3}BC$,

连接 EF , 则 $EF \parallel CD$,

$\therefore EF \perp BD$, 又 $EF \subset$ 平面 BCD ,

$AE \perp$ 平面 $BCD, \therefore EF \perp AE$, 又

$AE \perp ED$, 故以 E 为坐标原点,

EF, ED, EA 所在直线分别为 x ,

y, z 轴建立如图所示的空间直

角坐标系. 9 分

第二步:写出相关点及向量的坐标.

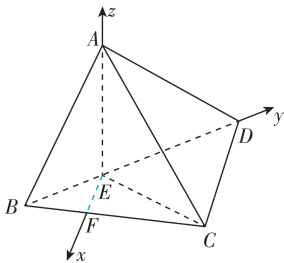
则 $A(0, 0, \sqrt{2}), D(0, 2, 0), B(0, -1, 0), C(2\sqrt{3}, 2, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{AD} = (0, 2, -\sqrt{2}), \overrightarrow{AB} = (0, -1, -\sqrt{2}), \overrightarrow{BC} = (2\sqrt{3}, 3, 0)$.

..... 11 分

第三步:求平面 ABC 的法向量.

设平面 ABC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,





$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -y - \sqrt{2}z = 0, \\ 2\sqrt{3}x + 3y = 0, \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 得 $y = -2, z = \sqrt{2}$, $\therefore \vec{n} = (\sqrt{3}, -2, \sqrt{2})$ 13 分

第四步: 求直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值.

设直线 AD 与平面 ABC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{AD}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AD}| |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times 3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 14 分

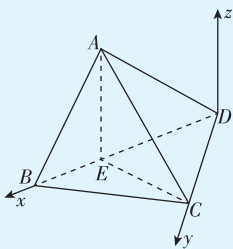
$\therefore$ 直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 15 分

一题多解 (2) 第一步: 建立空间直角坐标系.

$\because CD \perp$ 平面 $ABD, BD \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore CD \perp BD$.

以 D 为坐标原点, DB, DC 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 D 且平行于 AE 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



..... 9 分

第二步: 写出相关点及向量的坐标.

则 $A(2, 0, \sqrt{2}), B(3, 0, 0), C(0, 2\sqrt{3}, 0), D(0, 0, 0)$,

$\therefore \vec{AD} = (-2, 0, -\sqrt{2}), \vec{AB} = (1, 0, -\sqrt{2}), \vec{AC} = (-2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ 11 分

第三步: 求平面 ABC 的法向量.

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{AC} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x - \sqrt{2}z = 0, \\ -2x + 2\sqrt{3}y - \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 2$, 得 $y = \sqrt{3}, z = \sqrt{2}$, $\therefore \vec{m} = (2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$, 13 分

第四步: 求直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值.

设直线 AD 与平面 ABC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{AD}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{m}|}{|\vec{AD}| |\vec{m}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times 3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 14 分

$\therefore$ 直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 15 分

11. 命题点 ① 线面平行、二面角的正弦值

(1) 【证明】由 $BC = 2, AD = 4$, 点 M 为 AD 的中点得 $BC = DM$. 又 $BC \parallel MD$, 所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形, 则 $BM \parallel CD$.

..... 2 分

又 $CD \subset$ 平面 $CDE, BM \not\subset$ 平面 CDE , 所以 $BM \parallel$ 平面 CDE .

..... 4 分

(2) 【解】由 (1) 知 $BM = CD$, 又 $CD = AB$, 所以 $BM = AB = 2$,

同理易知 $AF = FM = ED = \sqrt{10}$.

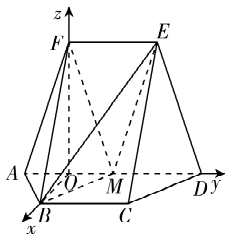
如图, 取 AM 的中点 O , 连接 OB, OF , 则 $OF \perp AM, OB \perp AM$, $OF = 3, OB = \sqrt{3}$,

又 $BF = 2\sqrt{3}$, 所以 $BF^2 = OF^2 + OB^2$, 则 $OB \perp OF$,

所以可以 O 为坐标原点, OB, OD, OF 所在直线分别为 x, y, z



轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $F(0,0,3), B(\sqrt{3}, 0,0), M(0,1,0), E(0,2,3)$, 所以 $\overrightarrow{FB}=(\sqrt{3}, 0, -3), \overrightarrow{BM}=(-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{ME}=(0, 1, 3)$ 7 分
 设平面 FBM 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$,



$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{FB} \cdot \mathbf{m} = \sqrt{3}x_1 - 3z_1 = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{m} = -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$$

取 $z_1=1$, 可得 $x_1=\sqrt{3}, y_1=3$, 则 $\mathbf{m}=(\sqrt{3}, 3, 1)$.

同理可取平面 BME 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(\sqrt{3}, 3, -1)$, 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{11}{13}$, 所以 $\sin \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$, 即二面角 $F-BM-E$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{13}$ 12 分

12. 命题点 ① 线线垂直的证明、二面角的应用及三棱锥的体积公式

(1) 【证明】因为 $AB=AD, O$ 为 BD 的中点, 所以 $AO \perp BD$.

..... 1 分

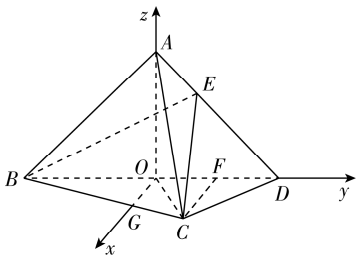
又平面 $ABD \perp$ 平面 $BCD, AO \subset$ 平面 ABD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD=BD$, 所以 $AO \perp$ 平面 BCD 3 分

又 $CD \subset$ 平面 BCD , 所以 $AO \perp CD$ 4 分

(2) 【解】如图, 取 OD 的中点 F , 连接 CF , 则 $CF \perp BD$.

过点 O 作 $OG \parallel FC$ 交 BC 于点 G , 则 $OG \perp BD$.

所以 OG, OD, OA 两两垂直.



以点 O 为坐标原点, 分别以 OG, OD, OA 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图所示 (注意: 建系方法不唯一, $\angle BCD=90^\circ$, 也可以 C 为原点建系),

则 $O(0,0,0), B(0,-1,0), D(0,1,0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

设 $A(0,0,a), a>0$, 又 $DE=2EA$, 则 $E\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2a}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{BE}=\left(0, \frac{4}{3}, \frac{2a}{3}\right), \overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ 6 分

设平面 BCE 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{4}{3}y + \frac{2a}{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0. \end{cases}$$

令 $x=\sqrt{3}$, 则 $y=-1, z=\frac{2}{a}$, 所以 $\mathbf{n}=\left(\sqrt{3}, -1, \frac{2}{a}\right)$.



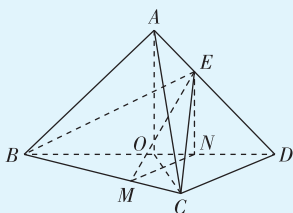
易知平面 BCD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, 8 分
因为二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45° ,

$$\text{所以 } \cos 45^\circ = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\frac{2}{a}}{1 \times \sqrt{3+1+\frac{4}{a^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又 $a > 0$, 得 $a = 1$, 即 $OA = 1$ (提示: 借助二面角的余弦值求线段长度),

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥}A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot OA = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

一题多解 (2) 过点 E 作 $EN \parallel AO$ 交 BD 于点 N ,
过点 N 作 $NM \parallel CD$ 交 BC 于点 M , 连接 EM .



因为 $EN \parallel AO$, 且由 (1) 知 $AO \perp$ 平面 CBD ,
所以 $EN \perp$ 平面 CBD ,
所以 $EN \perp BC$ 6 分
在 $\triangle BCD$ 中, 因为 $OB = OD = OC = 1$,
所以 $\angle BCD = 90^\circ$, 即 $DC \perp BC$.
又 $NM \parallel CD$, 所以 $NM \perp BC$.
因为 $EN \cap NM = N$, $EN, NM \subset$ 平面 EMN , 所以 $BC \perp$ 平面 EMN , 所以 $BC \perp EM$.
所以二面角 $E-BC-D$ 的平面角是 $\angle EMN$, 即 $\angle EMN = 45^\circ$,
..... 8 分
则 $\triangle EMN$ 是等腰直角三角形.

$$\text{因为 } DE = 2AE, \text{ 所以 } ND = 2ON, AO = \frac{3}{2}EN,$$

$$\text{所以 } MN = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} = EN, \text{ 所以 } AO = 1,$$

$$\text{所以 } V_{\text{三棱锥}A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot AO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

13. 命题点 ①线面平行的判定、求平面与平面夹角的余弦值

(1) 【证明】第一步: 作辅助线, 证明四边形 DEB_1F 是平行四边形.

如图①, 取 BC 的中点 F , 连接 DF, B_1F , 因为 D, F 分别为 AC, BC 的中点,

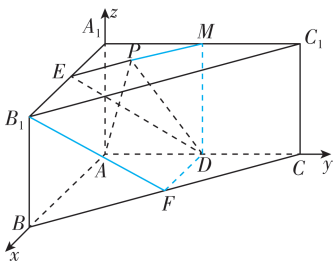
$$\text{所以 } DF \parallel AB, DF = \frac{1}{2}AB = 1. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } E \text{ 为 } A_1B_1 \text{ 的中点, 且 } A_1B_1 \parallel AB, \text{ 所以 } B_1E \parallel AB, B_1E = \frac{1}{2}AB = 1, \text{ 所以 } DF \parallel B_1E,$$

所以四边形 DEB_1F 是平行四边形, 4 分

第二步:利用线面平行的判定定理证明.

所以 $DE \parallel B_1F$. 又 $B_1F \subset \text{平面 } BB_1C_1C, DE \not\subset \text{平面 } BB_1C_1C$,
所以 $DE \parallel \text{平面 } BB_1C_1C$ 6 分



图①

一题多解 第一步:作辅助线,证明 $D_1E \parallel B_1B, DD_1 \parallel BC$.

如图②,取 AB 的中点 D_1 ,连接 D_1E, D_1D , 因为 D_1, D 分别为 AB, AC 的中点, 所以 $D_1D \parallel BC$. 因为 E, D_1 分别为 A_1B_1, AB 的中点, 所以 $D_1E \parallel B_1B$ 2 分

第二步:利用线面平行的判定定理证明 $D_1D \parallel$ 平面 $BB_1C_1C, D_1E \parallel$ 平面 BB_1C_1C .

因为 $D_1D \parallel BC, D_1D \not\subset \text{平面 } BB_1C_1C, BC \subset \text{平面 } BB_1C_1C$,
所以 $D_1D \parallel \text{平面 } BB_1C_1C$.

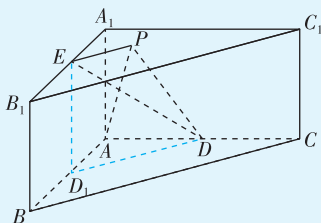
同理可得 $D_1E \parallel$ 平面 BB_1C_1C 4 分

第三步:利用面面平行的判定定理证明平面 $EDD_1 \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,从而证明 $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C .

又因为 $D_1D \cap D_1E = D_1$, $D_1D, D_1E \subset$ 平面 EDD_1 ,

所以平面 $EDD_1 \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,

因为 $DE \subset$ 平面 EDD_1 , 所以 $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C 6 分



冬②

(2)【解】第一步:建立空间直角坐标系.

由题意得, AB, AC, AA_1 两两垂直, 以 A 为坐标原点, 以 AB, AC, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系 (如图①). 7 分

第二步:写出相关点的坐标.

取 A_1C_1 的中点 M , 连接 EM ,

则 $EM \parallel B_1C_1$, 即点 P 在线段 EM 上, 则可设 $P(1-x, x, \sqrt{2})$,
易知 $A(0, 0, 0), D(0, 1, 0), E(1, 0, \sqrt{2})$ 8 分

若选条件①: 第三步: 由 $PA=PD$ 结合点 P, A, D 的坐标, 确定点 P 的坐标, 并写出相关向量的坐标.

由 $PA = PD$, 得 $\sqrt{(1-x)^2 + x^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{2})^2}$,

解得 $x = \frac{1}{2}$, 则 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$,



所以 $\overrightarrow{PD} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{PA} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{DE} = (1, -1, \sqrt{2})$ 9 分

第四步: 分别求出平面 PAD 和平面 PDE 的法向量.

设平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 = -2\sqrt{2}z_1, \end{cases}$$

令 $z_1 = 1$, 得 $x_1 = -2\sqrt{2}$, 则 $\mathbf{n}_1 = (-2\sqrt{2}, 0, 1)$ 10 分

设平面 PDE 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0, \\ x_2 - y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} z_2 = 0, \\ x_2 = y_2, \end{cases}$$

令 $x_2 = 1$, 得 $y_2 = 1$, 则 $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 0)$ 11 分

第五步: 求出平面 PAD 与平面 PDE 夹角的余弦值.

$$\text{所以} \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-2\sqrt{2}}{3 \times \sqrt{2}} = -\frac{2}{3}, \text{ 13 分}$$

故平面 PAD 与平面 PDE 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$ 14 分

若选条件②: 第三步: 由 $PA \perp BC$ 确定点 P 的坐标.

易知 $\overrightarrow{PA} = (x-1, -x, -\sqrt{2})$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, 则 $\overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0)$,

因为 $PA \perp BC$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$,

$$\text{即} -2x - 2x + 2 = 0, \text{解得} x = \frac{1}{2}, \text{则} P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right). \text{ 9 分}$$

下同选条件①. 14 分

若选条件③: 连接 DM , 则平面 PDE 即为平面 DEM ,

因为 $DM \parallel BB_1$, $DM \subset$ 平面 DEM , $BB_1 \not\subset$ 平面 DEM ,

所以 $BB_1 \parallel$ 平面 DEM , 即 $BB_1 \parallel$ 平面 PDE 一定成立, 此时点 P 的位置不唯一, 不符合题意(选条件③不计分).

题组 2

1. D 命题点 ① 异面直线所成角及余弦定理

【解析】不妨设正方体的棱长为 1, 连接 C_1P , BC_1 (图略). 易知 $BC_1 \parallel AD_1$, 所以 $\angle PBC_1$ (或其补角) 是异面直线 PB 与 AD_1 所

成的角. 在 $\triangle PBC_1$ 中, $PB = \sqrt{BB_1^2 + PB_1^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$PC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC_1 = \sqrt{2}$, 由余弦定理可得 $\cos \angle PBC_1 =$

$$\frac{PB^2 + BC_1^2 - PC_1^2}{2PB \cdot BC_1} = \frac{\frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 因为异面直线所成角不为钝}$$

角(提示: 异面直线所成角的范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$), 所以直线 PB

与 AD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 D.



一题多解

以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 (图略). 不妨设正方体的棱长为 1, 则 $A(1, 0, 0), D_1(0, 0, 1), B(1, 1, 0), P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \overrightarrow{PB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 1)$. 设异面直线 PB 与 AD_1 所成的角为 $\theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 则 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AD_1} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AD_1}|}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{AD_1}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以直线 PB 与 AD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 D.

2. B 命题点 正三棱台的体积、线面角的正切值

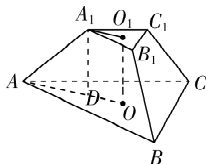
【解析】设正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h . $\because AB=6, A_1B_1=2$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin \frac{\pi}{3} = 9\sqrt{3}, S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

$\therefore$ 正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V = \frac{1}{3} (S_{\triangle ABC} +$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}) h = \frac{1}{3} \times (9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}}) h =$$

$$\frac{13\sqrt{3}}{3} h = \frac{52}{3}, \therefore h = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



如图, 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心分别为 O, O_1 , 连接 A_1O_1, O_1O, AO , 作 $A_1D \perp$ 平面 ABC 交平面 ABC 于点 D , 由几何体 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱台可知, 点 D 在 AO 上, 且四边形 A_1O_1OD 为矩形, 其中 $\angle A_1AD$ 即为直线 A_1A 与平面 ABC 所成的角. 由 $AB=6, A_1B_1=2$, 可得 $OA=2\sqrt{3}, O_1A_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (提示: 边

长为 a 的正三角形的中心到各顶点的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$), $\therefore AD =$

$$OA - OD = OA - O_1A_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \therefore \tan \angle A_1AD = \frac{A_1D}{AD} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = 1. \text{ 故选}$$

B.

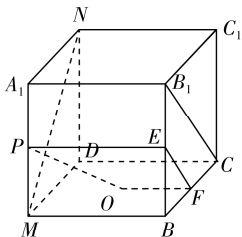
3. BC 命题点 直线与直线的位置关系

【解析】对于 A, 取 MN 的中点为 O_1 , 连接 OO_1 , 易知 $OO_1 \perp MN$, OO_1 不与 OP 平行, 且 MN, OP 在同一平面内, $\therefore MN$ 与 OP 不垂直, 故 A 错误;

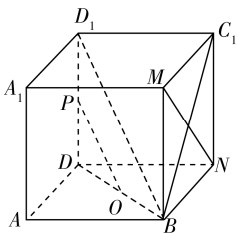
对于 B, 如图①, 取 BB_1 的中点 E, BC 的中点 F , 连接 PE, OF, EF, B_1C , 则 P, O, F, E 四点共面. $\because E, F$ 分别为 BB_1, BC 的中点, $\therefore EF \parallel B_1C$. 易知 $B_1C \perp MN$, $\therefore MN \perp EF$. 又易知 $OF \perp$ 平面 BB_1C_1C , $\therefore OF \perp MN$. 又 $EF \cap OF = F, EF, OF \subset$ 平面 $PEFO$, $\therefore MN \perp$ 平面 $PEFO$, 又 $PO \subset$ 平面 $PEFO$, $\therefore MN \perp PO$, 故 B 正



确;



图①



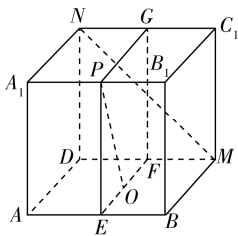
图②

对于 C, 如图②, 连接 BD, BC_1, BD_1 . $\because O$ 为下底面的中心,
 $\therefore$ 点 O 在 BD 上且为 BD 中点, $\therefore OP \parallel BD_1$.

由正方体的性质可得 $MN \perp BC_1, D_1C_1 \perp MN$.

又 $BC_1 \cap D_1C_1 = C_1, BC_1, D_1C_1 \subset$ 平面 $BC_1D_1, \therefore MN \perp$ 平面 $BC_1D_1, \therefore MN \perp BD_1, \therefore OP \perp MN$, 故 C 正确;

对于 D, 如图③, 取 AB, DM, NC_1 的中点分别为 E, F, G , 连接 PE, PG, EF, GF , 则点 O 在 EF 上, P, E, F, G 四点共面. 由正方体的性质可知 $PG \perp$ 平面 MC_1ND , 则 $PG \perp MN$, 假设 $MN \perp OP$, 又 $PG \cap OP = P, PG, OP \subset$ 平面 $PEFG, \therefore MN \perp$ 平面 $PEFG, \therefore MN \perp GF$. 易知 MN 与 GF 不垂直, 则假设不成立, 故 D 错误. 故选 BC.



图③

4. C 命题点 ④ 四棱锥的外接球

【解析】设外接球的半径为 R , 因为外接球的体积为 36π , 即

$$36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ 所以 } R = 3.$$

如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 过点 P 作 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 O 为底面 $ABCD$ 对角线的交点.

$$\text{设 } AB = 2a, \text{ 则 } AO = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \sqrt{2}a.$$

取 PO 上点 O' 使得 $PO' = O'A$, 则 O' 为该四棱锥外接球的球心.

题眼

$$\text{设该四棱锥的高 } PO = h, \text{ 体积为 } V, \text{ 则 } V = \frac{1}{3} \cdot 4a^2h = \frac{4}{3}a^2h.$$

$$\text{又因为 } (h-3)^2 + 2a^2 = 9, \text{ 所以 } 2a^2 = 6h - h^2.$$

$$\text{因为 } l \in [3, 3\sqrt{3}], \text{ 所以 } l^2 = 2a^2 + h^2 = 6h \in [9, 27], \text{ 即 } h \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

$$\text{则 } V = \frac{4}{3}a^2h = \frac{4}{3}\left(3h - \frac{h^2}{2}\right)h = 4h^2 - \frac{2}{3}h^3 \quad \left(\text{另解: 也可利用基本}\right)$$

$$\text{不等式求解最大值, } V = \frac{4}{3}a^2h = 72 \times \frac{l^2}{36} \times \frac{l^2}{36} \times \left(2 - \frac{l^2}{18}\right) \leq 72 \times$$

$$\left[\frac{\frac{l^2}{36} + \frac{l^2}{36} + \left(2 - \frac{l^2}{18}\right)}{3}\right]^3 = \frac{64}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{l^2}{36} = 2 - \frac{l^2}{18}, \text{ 即 } l = 2\sqrt{6} \text{ 时}$$

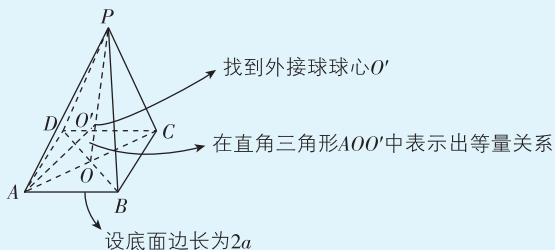


取等号), 所以 $V' = -2h^2 + 8h$, 令 $V' = 0$, 则 $h = 0$ 或 $h = 4$, 所以

$V = 4h^2 - \frac{2}{3}h^3$ 在 $\left[\frac{3}{2}, 4\right)$ 上单调递增, 在 $\left[4, \frac{9}{2}\right]$ 上单调递减, 故当 $h = 4$ 时, V 取最大值 $\frac{64}{3}$; 当 $h = \frac{9}{2}$ 时, $V = \frac{81}{4}$; 当 $h = \frac{3}{2}$ 时, $V = \frac{27}{4}$. 则 V 的最小值为 $\frac{27}{4}$.

故该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$. 故选 C.

答图注解



5. CD 命题点 ③ 三棱锥的体积、线面垂直的判定和性质

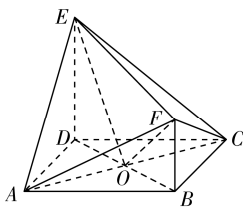
【解析】如图, 连接 BD 交 AC 于 O , 连接 OE, OF . 设 $AB = ED = 2FB = 2$, 则 $AB = BC = CD = AD = 2$. 由 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FB \parallel ED$,

得 $FB \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $V_1 = V_{E-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot ED = \frac{1}{3} \cdot$

$\frac{1}{2} AD \cdot CD \cdot ED = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$, $V_2 = V_{F-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot$

$FB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot FB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$ (关键: 求棱

锥体积的关键是确定高, 常常结合直线与平面的位置关系确定).



$ED \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $ED \perp AC$.

又 $AC \perp BD$, 且 $ED \cap BD = D$, $ED, BD \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$.

又 $OF \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp OF$.

易知 $BD = 2\sqrt{2}$, $OB = OD = \sqrt{2}$, $OF = \sqrt{OB^2 + FB^2} = \sqrt{3}$, $OE = \sqrt{OD^2 + ED^2} = \sqrt{6}$, $EF = \sqrt{BD^2 + (ED - FB)^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2 - 1)^2} = 3$, 所以 $EF^2 = OE^2 + OF^2$, 所以 $OF \perp OE$, 而 $OE \cap AC = O$, $OE, AC \subset$ 平面 ACE , 所以 $OF \perp$ 平面 ACE .

又 $AC = AE = CE = 2\sqrt{2}$, 所以 $V_3 = V_{F-ACE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot OF = \frac{1}{3} \cdot$

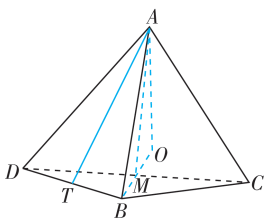
$\frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 \cdot OF = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3} = 2$, 所以有 $V_3 \neq 2V_2$, $V_3 \neq$

V_1 , $V_3 = V_1 + V_2$, $2V_3 = 3V_1$, 所以选项 A, B 不正确, 选项 C, D 正确. 故选 CD.



6. $2\sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{3}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 命题点 三棱锥表面积、体积的计算

【解析】已知在 $\triangle BCD$ 中, $BD = 2$, $BC = 2$, $DC = 2\sqrt{3}$, 取 DC 的中点 M , 连接 BM, AM . 因为 $BD = BC$, 所以 $BM \perp DC$, $DM = CM = \sqrt{3}$, 所以 $BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$, 所以 $\triangle BCD$ 的面积 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times DC \times$



$BM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$. 因为 $AD = AC = 2\sqrt{2}$, M 为 CD 的中点, 所以 $AM \perp CD$, 所以 $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{5}$, 所以 $\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot CD = \sqrt{15}$. 取 BD 的中点 T , 连接 AT , 则 $AT \perp BD$, 所以 $AT = \sqrt{AD^2 - DT^2} = \sqrt{7}$. 所以 $\triangle ABD$ 的面积 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot BD = \sqrt{7}$, 易知 $\triangle ABD \cong \triangle ABC$, 所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} = \sqrt{7}$, 故三棱锥 $A-BCD$ 的表面积为 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = 2\sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{3}$.

因为侧棱 $AD = AB = AC = 2\sqrt{2}$, 所以顶点 A 在底面 BCD 上的投影 O 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心.

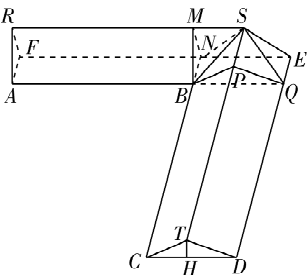
设 $\triangle BCD$ 的外接圆的半径为 R , 由三角形面积拓展公式 $S = \frac{abc}{4R}$ (a, b, c 为三角形的三边长) 可得 $R = \frac{BD \cdot BC \cdot DC}{4S_{\triangle BCD}} =$

$\frac{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 2$ (另解: 由前面的计算可知 $\angle BCD = 30^\circ$, 所以由正弦定理可得 $R = \frac{BD}{2\sin \angle BCD} = 2$).

易知顶点 A 在底面 BCD 的投影 O 必在直线 BM 上, 在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$, $BO = R = 2$, 则三棱锥的高 $h = AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$, 所以三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot h = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. 60 命题点 空间几何体的体积

【解析】如图, 延长 AB 交 DE 于点 Q , 作 $BP \parallel CT$, 交 ST 于点 P , 连接 PQ, SQ , 延长 CB 交 EF 于点 N , 连接 SN , 作 $MN \parallel RF$ 交 RS 于点 M , 连接 BM . 由题中已知的线面关系可知几何体 $ARF-BMN$ 与几何体 $CDT-BQP$ 均为直三棱柱, 且 $V_{ARF-BMN} = V_{CDT-BQP}$, 几何体 $S-BQEN$ 为正四棱锥, 几何体 $S-MNB$ 为三棱锥, 且 $SM \perp$ 平面 BMN , 几何体 $S-BPQ$ 为三棱锥, 且 $SP \perp$ 平面 BPQ .



在 $\triangle CDT$ 中, 过点 T 作 $TH \perp CD$ 于点 H , 由 $CT = DT = \frac{5}{2}$, $CD = 4$, 可得 $TH = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$, $\therefore S_{\triangle CDT} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$.

$\therefore BC = 8, \therefore V_{CDT-BQP} = 3 \times 8 = 24$.

$\therefore$ 平面 $TCD \perp$ 平面 ABC , $TH \perp CD$, $TH \subset$ 平面 TCD , 平面 $TCD \cap$ 平面 $ABC = CD, \therefore TH \perp$ 平面 ABC , 结合题中已知的线

面位置关系可得 TH 为多面体的高.

又几何体 $S-BQEN$ 的底面边长 $BQ=4$, 则 $V_{S-BQEN} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 4^2 = 8$. 又 $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle ARF} = S_{\triangle CDT} = S_{\triangle BPQ} = 3$, $SM = SP = CH = 2$,
 $\therefore V_{S-MNB} = V_{S-BPQ} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$.

$\therefore$ 该多面体的体积 $V = V_{ARF-BMN} + V_{CDT-BQP} + V_{S-BQEN} + V_{S-MNB} + V_{S-BPQ} = 2V_{CDT-BQP} + V_{S-BQEN} + 2V_{S-MNB} = 2 \times 24 + 8 + 2 \times 2 = 60$.

8. 命题点 ① 线面平行的判定、求平面与平面夹角的余弦值

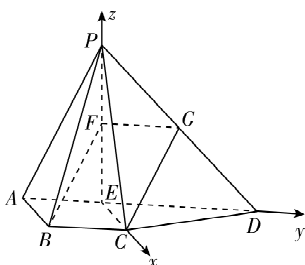
(1) 【证明】取 PD 的中点 G , 连接 FG, CG , $\therefore F, G$ 分别为 PE, PD 的中点, $\therefore FG \parallel \frac{1}{2}ED$, 2 分

又 $ED=2, BC=1, AD \parallel BC$, $\therefore BC \parallel \frac{1}{2}ED$,

$\therefore FG \parallel BC$, $\therefore$ 四边形 $FGCB$ 为平行四边形, $\therefore BF \parallel CG$.

..... 4 分

又 $BF \not\subset$ 平面 $PCD, CG \subset$ 平面 PCD , $\therefore BF \parallel$ 平面 PCD 6 分



(2) 【解】连接 EC , $\therefore AD=3, DE=2, \therefore AE=1=BC=AB$,
 $\therefore AB \perp$ 平面 $PAD, AE \subset$ 平面 $PAD, \therefore AB \perp AE, \therefore AB \perp BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是正方形, $\therefore AB \parallel EC, \therefore EC \perp$ 平面 PAD , 又
 $PE \subset$ 平面 $PAD, \therefore EC \perp PE$, 又 $PE \perp AD$, 故可建立空间直角坐标系 $E-xyz$, 如图所示, 则 $A(0, -1, 0), B(1, -1, 0), C(1, 0, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 2)$, $\therefore \vec{PA} = (0, -1, -2), \vec{PB} = (1, -1, -2), \vec{PC} = (1, 0, -2), \vec{PD} = (0, 2, -2)$ 8 分

设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \vec{PA} \cdot \mathbf{n} = -y_1 - 2z_1 = 0, \\ \vec{PB} \cdot \mathbf{n} = x_1 - y_1 - 2z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $y_1 = 2$, 则 $x_1 = 0, z_1 = -1$,

$\therefore \mathbf{n} = (0, 2, -1)$ 10 分

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \vec{PC} \cdot \mathbf{m} = x_2 - 2z_2 = 0, \\ \vec{PD} \cdot \mathbf{m} = 2y_2 - 2z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $x_2 = 2$, 则 $y_2 = 1, z_2 = 1$,

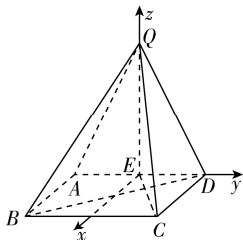
$\therefore \mathbf{m} = (2, 1, 1)$, 12 分

$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{30}}{30}$,

$\therefore$ 平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{30}$ 14 分

9. 命题点 ② 空间中平面与平面垂直的判定、二面角余弦值的求解

(1) 【证明】如图, 取 AD 中点 E , 连接 EQ, EC .





因为 $QA=QD=\sqrt{5}$, 所以 $QE \perp AD$.

在正方形 $ABCD$ 中, $AD=2$, 则 $QE=2$, 且 $EC=\sqrt{5}$, 此时 $EQ^2 + EC^2 = 9 = QC^2$, 则 $QE \perp EC$ 3 分

又 $EC \cap AD = E$, $EC, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $QE \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $QE \subset$ 平面 QAD , 所以平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$ 5 分

(2)【解】由(1)知 $QE \perp$ 平面 $ABCD$, 因此以点 E 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$, 则 $B(2, -1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $Q(0, 0, 2)$,

$\overrightarrow{BD}=(-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{DQ}=(0, -1, 2)$ 6 分

设平面 BDQ 的法向量为 $\mathbf{n}_1=(x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y = x, \\ y = 2z, \end{cases}$$

取 $z=1$, 得 $x=y=2$, 则 $\mathbf{n}_1=(2, 2, 1)$ 8 分

易知平面 AQD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2=(1, 0, 0)$,

$$\text{则} \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{3}, \quad \text{..... 10 分}$$

由图可知二面角 $B-QD-A$ 为锐角, 11 分

因此二面角 $B-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$ 12 分

一题多解 (1)【证明】在 $\triangle QCD$ 中, $QD^2 + CD^2 = 9 = QC^2$, 所以 $CD \perp QD$ 2 分

因为底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $CD \perp AD$.

又 $AD \cap QD = D$, $AD, QD \subset$ 平面 QAD , 所以 $CD \perp$ 平面 QAD .

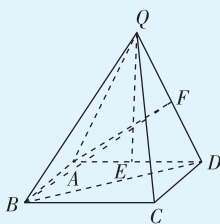
因为 $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$ 5 分

(2)【解】如图, 取 AD 的中点 E , 连接 QE . 过点 A 作 $AF \perp QD$

交 QD 于点 F , 连接 BF . 在等腰三角形 AQD 中, 因为 $QA=\sqrt{5}$,

$AD=2$, 所以 $QE=2$. 利用等面积法可得 $AF = \frac{QE \cdot AD}{QD} = \frac{2 \times 2}{\sqrt{5}} =$

$$\frac{4\sqrt{5}}{5},$$



$$\text{则 } QF = \sqrt{QA^2 - AF^2} = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}. \quad \text{..... 8 分}$$

结合(1)易得 $AB \perp$ 平面 QAD , 则 $AB \perp AQ$, $AB \perp AF$, 因此

$BQ=3$. 在 $\triangle BQD$ 中利用余弦定理可得 $\cos \angle BQD =$

$$\frac{BQ^2 + QD^2 - BD^2}{2BQ \cdot QD} = \frac{9 + 5 - 8}{2 \times 3 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 又 } \frac{QF}{BQ} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \cos \angle BQD = \frac{QF}{BQ},$$

则 $\angle QFB = \frac{\pi}{2}$, 即 $BF \perp QD$. 因此 $\angle AFB$ 为二面角 $B-QD-A$ 的

平面角. 10 分

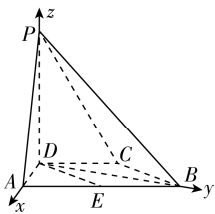
$$BF = \sqrt{BQ^2 - QF^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \text{ 在 Rt } \triangle AFB \text{ 中, } \cos \angle AFB = \frac{AF}{BF} =$$

$$\frac{2}{3}, \text{ 因此二面角 } B-QD-A \text{ 的余弦值为 } \frac{2}{3}. \quad \text{..... 12 分}$$



10. 命题点 ①异面直线垂直的证明和直线与平面所成角的正弦值的求解

(1)【证明】因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $PD \perp BD$. 取 AB 的中点 E , 连接 DE .



因为 $CD \parallel AB$, $CD = EB$, 所以四边形 $BCDE$ 为平行四边形, 所以 $ED = BC = 1$, 所以 $DE = \frac{1}{2}AB = 1$, 所以 $\triangle ABD$ 是直角三角

形, 且 $BD \perp AD$ 3 分

因为 $PD \cap AD = D$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAD , 又 $PA \subset$ 平面 PAD , 所以 $BD \perp PA$ 5 分

一题多解 (1) 由题设得 $\angle DAB = 60^\circ$. 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $BD = \sqrt{3}$, 又因为 $AB = 2$, $AD = 1$, 从而 $AB^2 = AD^2 + BD^2$, 故 $BD \perp AD$ 3 分

因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $BD \perp PD$. 又 $AD \cap PD = D$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAD . 因为 $PA \subset$ 平面 PAD , 所以 $BD \perp PA$ 5 分

(2)【解】方法一: 由 (1) 可知, PD, AD, BD 两两垂直, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{3}$,

分别以 DA, DB, DP 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图, 则 $D(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$,

所以 $\vec{PD} = (0, 0, -\sqrt{3}), \vec{PA} = (1, 0, -\sqrt{3}), \vec{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0)$.

..... 7 分

设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{PA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x - \sqrt{3}z = 0, \\ -x + \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

不妨设 $z = 1$, 则 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, 1)$.

设 PD 与平面 PAB 所成的角为 θ ,

$$\text{所以} \sin \theta = |\cos \langle \vec{PD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\vec{PD} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{PD}| |\mathbf{n}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

方法二: 由题设及第 (1) 问得三棱锥 $P-ABD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2}. \text{ 6 分}$$

又 $AB = 2, PA = \sqrt{DA^2 + DP^2} = 2, PB = \sqrt{DB^2 + DP^2} = \sqrt{6}$, 所以

$$\cos \angle PAB = \frac{AB^2 + PA^2 - PB^2}{2 \times AB \times PA} = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } \sin \angle PAB = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

..... 8 分

设点 D 到平面 PAB 的距离为 d , 则 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \times$



$$d = \frac{\sqrt{15}}{6}d. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \frac{\sqrt{15}}{6}d = \frac{1}{2}, \text{ 得 } d = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{因此 } PD \text{ 与平面 } PAB \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{d}{PD} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

11. 命题点 空间中直线与平面的位置关系、二面角、空间向量的应用

(1)【证明】取 AB 的中点 D , 连接 DP, DO, DE .

因为 $PA = PB$, 所以 $PD \perp AB$.

因为 PO 为三棱锥 $P-ABC$ 的高, 所以 $PO \perp$ 平面 ABC .

因为 $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $PO \perp AB$.

又因为 $PO, PD \subset$ 平面 POD , 且 $PO \cap PD = P$,

所以 $AB \perp$ 平面 POD . $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为 $OD \subset$ 平面 POD , 所以 $AB \perp OD$.

又因为 $AB \perp AC$, 所以 $OD \parallel AC$.

因为 $OD \not\subset$ 平面 $PAC, AC \subset$ 平面 PAC , 所以 $OD \parallel$ 平面 PAC .

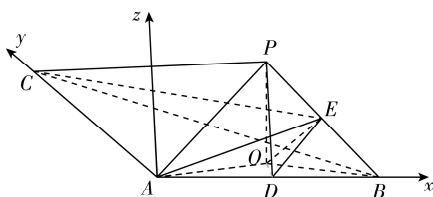
因为 D, E 分别为 BA, BP 的中点, 所以 $DE \parallel PA$.

因为 $DE \not\subset$ 平面 $PAC, PA \subset$ 平面 PAC , 所以 $DE \parallel$ 平面 PAC .

又 $OD, DE \subset$ 平面 $ODE, OD \cap DE = D$,

所以平面 $ODE \parallel$ 平面 PAC . $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $OE \subset$ 平面 ODE , 所以 $OE \parallel$ 平面 PAC . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



(2)【解】连接 OA . 因为 $PO \perp$ 平面 $ABC, OA, OB \subset$ 平面 ABC , 所以 $PO \perp OA, PO \perp OB$. 又 $PA = PB$,

$$\text{所以 } OA = OB = \sqrt{PA^2 - PO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

则在 $\triangle AOB$ 中, $\angle OAB = \angle ABO = 30^\circ$,

$$\text{所以 } OD = OA \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$

$$AB = 2AD = 2OA \cos 30^\circ = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

又因为 $\angle ABC = \angle ABO + \angle CBO = 60^\circ$,

所以在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = AB \tan 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 12$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

以 A 为坐标原点, AB, AC 所在直线分别为 x, y 轴, 以过点 A 垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系, 如图,

则 $A(0, 0, 0), B(4\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 12, 0), P(2\sqrt{3}, 2, 3),$

$E\left(3\sqrt{3}, 1, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{AE} = \left(3\sqrt{3}, 1, \frac{3}{2}\right), \overrightarrow{AB} = (4\sqrt{3}, 0, 0),$

$\overrightarrow{AC} = (0, 12, 0)$.

设平面 AEC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3\sqrt{3}x_1 + y_1 + \frac{3}{2}z_1 = 0, \\ 12y_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } z_1 = 2\sqrt{3}, \text{ 则 } \mathbf{n} = (-1, 0, 2\sqrt{3}).$$



设平面 AEB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 3\sqrt{3}x_2 + y_2 + \frac{3}{2}z_2 = 0, \\ 4\sqrt{3}x_2 = 0, \end{cases}$$

令 $z_2 = 2$, 则 $\mathbf{m} = (0, -3, 2)$ 10 分

设二面角 $C-AE-B$ 的平面角为 θ ,

$$\text{所以 } |\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{3}}{13},$$

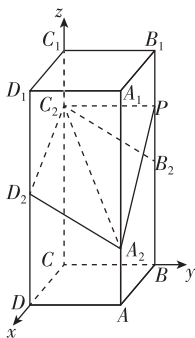
$$\text{则 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{13} \right)^2} = \frac{11}{13}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

12. 命题点 ⊙ 空间平行关系的证明和利用空间向量解决与二面角有关的问题

(1) 【证明】方法一: 依题意得 $\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{DD_2} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{A_2D_2}$, 3 分

因为 A_2, D_2, B_2, C_2 四点不共线, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ 5 分

方法二: 如图, 以 CD, CB, CC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系.

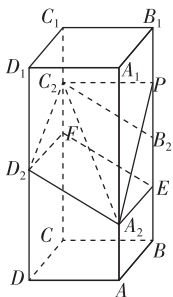


因为 $AB = 2, AA_1 = 4, AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$,

所以 $A_2(2, 2, 1), B_2(0, 2, 2), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2)$, 3 分

所以 $\overrightarrow{A_2D_2} = \overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1)$, 又 A_2, D_2, B_2, C_2 四点不共线, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ 5 分

方法三: 如图, 过点 A_2 作 $A_2E \perp BB_1$ 于点 E , 过点 D_2 作 $D_2F \perp CC_1$ 于点 F , 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AA_1 = 4$, 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, 且 $AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$, 所以 $A_2E \parallel D_2F, B_2E \parallel C_2F$, 所以四边形 A_2EFD_2, B_2C_2FE 均为平行四边形, 3 分
所以 $A_2D_2 \parallel EF, B_2C_2 \parallel EF$, 所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ 5 分



(2) 【解】设 $P(0, 2, a) (0 \leq a \leq 4)$, 由(1)中建系可知 $A_2(2, 2, 1), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1), \overrightarrow{A_2P} = (-2, 0, a -$



1). 设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{A_2D_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0, \\ -2y_1 + z_1 = 0, \end{cases} \text{取 } y_1 = 1, \text{可得 } x_1 = 1,$$

$z_1 = 2$, 所以 $\mathbf{m} = (1, 1, 2)$ 8 分

设平面 PA_2C_2 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{A_2P} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0, \\ -2x_2 + (a-1)z_2 = 0, \end{cases} \text{取 } z_2 = 1, \text{可得 } x_2 =$$

$$\frac{a-1}{2}, y_2 = \frac{3-a}{2}, \text{所以 } \mathbf{n} = \left(\frac{a-1}{2}, \frac{3-a}{2}, 1 \right). \text{ 10 分}$$

因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° ,

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\left| \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3-a}{2} \right)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{解得 } a = 1 \text{ 或}$$

$a = 3$, 所以点 P 为 B_2B 的中点或 B_2B_1 的中点, 即 $B_2P = 1$.

..... 12 分

题组 3

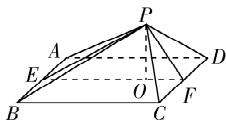
1. **D** **命题点** ④四棱锥的结构特征, 线面、面面的位置关系, 棱锥的高

【解析】四棱锥的底面是边长为 4 的正方形, 且 $PA = PB = 4$,

$PC = PD = 2\sqrt{2}$, 如图, 设 AB, CD 的中

点分别为 E, F , 连接 EF, PE, PF , 则

$PE \perp AB, PF \perp CD$. $\therefore EF \perp CD, PF \perp$



$CD, EF \cap PF = F, EF \subset \text{平面 } PEF, PF \subset \text{平面 } PEF, \therefore CD \perp \text{平面 } PEF$.

又 $CD \subset \text{平面 } ABCD, \therefore \text{平面 } PEF \perp \text{平面 } ABCD$, 且平面

$PEF \cap \text{平面 } ABCD = EF$. 过点 P 作 $PO \perp EF$ 于点 O , 则

$PO \subset \text{平面 } PEF$, 则 $PO \perp \text{平面 } ABCD$. 在 $\triangle PEF$ 中, 由题可求

得 $PE = 2\sqrt{3}, PF = 2, EF = 4, \therefore PE^2 + PF^2 = EF^2, \therefore \angle EPF =$

90° , 根据面积相等可得 $PO \cdot EF = PE \cdot PF$, 即 $4PO = 2\sqrt{3} \times 2$,

得 $PO = \sqrt{3}$. 故选 D.

2. **A** **命题点** ④空间中线面之间的位置关系

【解析】对于①, 因为 $\alpha \cap \beta = m, m \parallel n$, 所以当 $n \subset \alpha$ 时, $n \parallel \beta$;

当 $n \subset \beta$ 时, $n \parallel \alpha$; 当 $n \not\subset \alpha$ 且 $n \not\subset \beta$ 时, $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, 故①正

确.

对于②, 因为 $\alpha \cap \beta = m, m \perp n$, 所以 n 与 α, β 的位置关系为在

平面内、与平面平行或相交, 故②错误.

对于③, 因为 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta, \alpha \cap \beta = m$, 所以 $m \parallel n$, 故③正确.

对于④, 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 记平面 ADD_1A_1

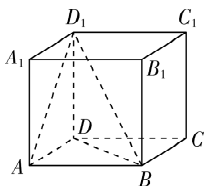
为 α , 平面 $ABCD$ 为 β , 则直线 AD 为 m , 记直线 BD_1 为 n , 由正

方体的性质可知 BD_1 与平面 ADD_1A_1 所成角为 $\angle AD_1B$, 则

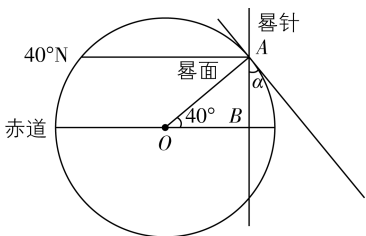
$$\sin \angle AD_1B = \frac{AB}{BD_1}, \text{ } BD_1 \text{ 与平面 } ABCD \text{ 所成角为 } \angle DBD_1, \text{ 则}$$

$$\sin \angle DBD_1 = \frac{DD_1}{BD_1} = \sin \angle AD_1B, \text{ 此时 } BD_1 \text{ 与 } AD \text{ 不垂直, 即 } m$$

与 n 不垂直, 故④错误. 故选 A.

**3. B 命题点** ⊙ 传统文化在立体几何中的应用

【解析】画出赤道和纬度的截面图, OA 与地球赤道所在平面所成角为 $\angle AOB$. 因为点 A 处的纬度为北纬 40° , 所以 $\angle AOB = 40^\circ$. 过点 A 且与 OA 垂直的平面在截面图中为过点 A 的切线, 则晷针与点 A 处的水平面所成的角, 即晷针与点 A 处的切线所成的角 α (提示: 正确理解题意作出截面图, 找到晷针与点 A 处的水平面所成角和点 A 处的纬度的关系), 可知 $\alpha = 40^\circ$, 故选 B.

**4. AC 命题点** ⊙ 圆锥的体积、侧面积计算

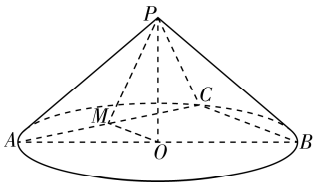
【解析】对于 A, 依题意, 圆锥母线长 $l = PA = PB = 2$, $PO = PA \cdot \cos 60^\circ = 1$, $AO = BO = PA \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, 所以底面圆的半径 $r = \sqrt{3}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 1 = \pi$, 故 A 正确;

对于 B, 该圆锥的侧面积为 $\pi rl = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}\pi$, 故 B 错误;

对于 C, 如图, 取 AC 的中点 M , 连接 PM, OM , 则 $OM \perp AC$, 又因为 $PA = PC$, 所以 $PM \perp AC$, 故 $\angle PMO$ 为二面角 $P-AC-O$ 的平面角, 即 $\angle PMO = 45^\circ$, 所以 $\tan 45^\circ = \frac{PO}{OM} = 1$, 即 $OM = 1$, 所

以 $AC = 2\sqrt{AO^2 - OM^2} = 2 \times \sqrt{3 - 1} = 2\sqrt{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 C 可知, $AC = 2\sqrt{2}$, $PM \perp AC$, $PM = \sqrt{PA^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle PAC$ 的面积为 $\frac{1}{2}PM \cdot AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2$, 故 D 错误. 故选 AC.

**5. ABD 命题点** ⊙ 线线角和线面角的求解

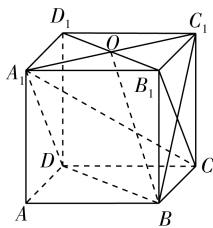
【解析】如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 因为 $BC_1 \perp B_1C$, $BC_1 \perp A_1B_1$, $B_1C \cap A_1B_1 = B_1$, 所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD , 所以 $BC_1 \perp DA_1$, $BC_1 \perp CA_1$, 故选项 A, B 均正确;

设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$, 因为 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D , 所以直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $\angle C_1BO$, 在 $\text{Rt} \triangle C_1BO$ 中,



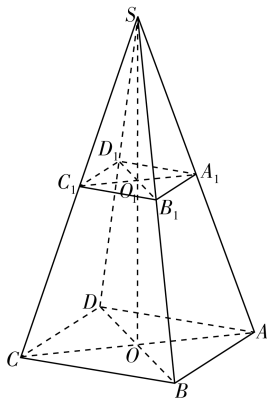
$\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$, 故 $\angle C_1BO = 30^\circ$, 故选项 C 错误;

直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle C_1BC = 45^\circ$, 故选项 D 正确. 故选 ABD.



6.28 命题点 ⊙ 锥体、台体的体积公式

【解析】设原正四棱锥为 $S-ABCD$, 截去的正四棱锥为 $S-A_1B_1C_1D_1$, O_1, O 分别为正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 上、下底面的中心, 如图.



因为 $AB=4, A_1B_1=2$, 所以 $OA=2\sqrt{2}, O_1A_1=\sqrt{2}$.

由截面平行于底面得 $\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 又 $SO_1=3$, 所以

$SO=6, OO_1=3$, 所以正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 上、下底面的

边长分别为 2 和 4, 高为 3, 所以 $V_{\text{台}} = \frac{1}{3} \times (4+16+\sqrt{16 \times 4}) \times$

$3 = 28$ (另解: $V_{\text{台}} = V_{\text{四棱锥 } S-ABCD} - V_{\text{四棱锥 } S-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 - \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 28$).

7. $\frac{5}{2}$ 命题点 ⊙ 圆柱、球的切接问题

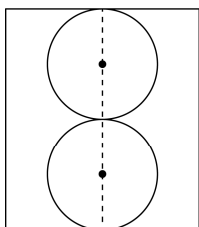
【解析】设铁球的半径为 R ($0 < R < 4$), 情形一: 两个铁球的球心都在圆柱的轴上, 且两球分别与圆柱的上、下底面相切, 其

轴截面如图①, 则 $4R=9$, 则 $R=\frac{9}{4}$; 情形二: 两球均分别与圆

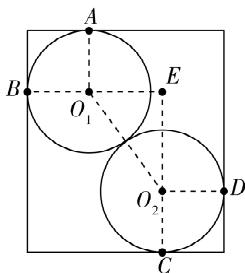
柱的一个底面和侧面相切, 其轴截面如图②, 则

$$\begin{cases} O_1E+2R=8, \\ O_2E+2R=9, \\ O_1E^2+O_2E^2=O_1O_2^2=4R^2, \end{cases} \quad \text{解得 } R=\frac{5}{2} \text{ 或 } R=\frac{29}{2} \text{ (舍去).}$$

由于 $\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$, 故 R 的最大值为 $\frac{5}{2}$.



图①



图②

8. $\frac{2}{3}$ 1 **命题点** ⊙圆锥的表面积与体积、球的表面积与体积、截面问题

【解析】设圆锥 MM' 的底面半径为 r , 球 O 的半径为 R , 因为圆锥 MM' 的轴截面为正三角形, 所以圆锥 MM' 的高 $h = \sqrt{3}r$, 母线 $l = 2r$, 由题可知 $h = 2R$, 所以球 O 的半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}r$. 所以圆锥

MM' 的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$, 球 O 的体积 $V_2 =$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3, \text{ 所以 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3} = \frac{2}{3}.$$

圆锥 MM' 的表面积 $S_1 = \pi rl + \pi r^2 = 3\pi r^2$, 球 O 的表面积 $S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = 3\pi r^2$, 所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi r^2}{3\pi r^2} = 1$.

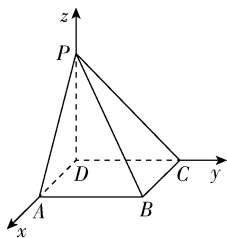
9. **命题点** ⊙线面垂直的判定和线面角正弦值的最值的求解

(1) **【证明】**因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AD$ 1 分
又底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AD \perp DC$. 又 $PD \cap DC = D$, $PD, DC \subset$ 平面 PDC , 因此 $AD \perp$ 平面 PDC .

因为 $AD \parallel BC$, $AD \not\subset$ 平面 PBC , 所以 $AD \parallel$ 平面 PBC 3 分
由已知得 $l \parallel AD$.

因此 $l \perp$ 平面 PDC 4 分

(2) **【解】**以 D 为坐标原点, $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



则 $D(0,0,0), C(0,1,0), B(1,1,0), P(0,0,1), \vec{DC} = (0,1,0), \vec{PB} = (1,1,-1)$.

由(1)可设 $Q(a,0,1)$, 则 $\vec{DQ} = (a,0,1)$ 5 分

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 是平面 QCD 的法向量, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{DQ} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{DC} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} ax+z=0, \\ y=0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{n} = (-1, 0, a). \text{ 7 分}$$

所以 $\cos \langle \mathbf{n}, \vec{PB} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{PB}}{|\mathbf{n}| |\vec{PB}|} = \frac{-1-a}{\sqrt{3} \sqrt{1+a^2}}. \text{ 9 分}$



设 PB 与平面 QCD 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \frac{2a}{a^2+1}}$. 因为 $\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \frac{2a}{a^2+1}} \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$, 当且仅当 $a=1$ 时等号成

立, 所以 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

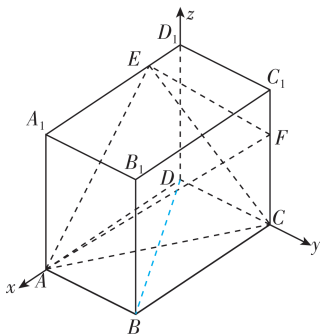
..... 12 分

关键点拨 (1) 中由 $AD \parallel$ 平面 PBC , 平面 $PAD \cap$ 平面 $PBC = l$, 可知 $AD \parallel l$; (2) 建立空间直角坐标系, 得线面角的正弦值, 并利用基本不等式求最值.

10. 命题点 ①利用空间向量证明线面垂直、求两平面夹角的余弦值、求几何体体积

(1) **【证明】** 第一步: 建立空间直角坐标系并写出相关点及相关向量的坐标.

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 连接 BD , 如图.



由已知, 可得 $D(0,0,0), B(4,2,0), C(0,2,0), E(1,0,3), F(0,2,2)$, 则 $\overrightarrow{DB} = (4,2,0), \overrightarrow{CE} = (1,-2,3), \overrightarrow{CF} = (0,0,2)$.

..... 2 分

第二步: 求平面 CEF 的法向量.

设平面 CEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} x_1 - 2y_1 + 3z_1 = 0, \\ 2z_1 = 0, \end{cases}$ 取

$y_1 = 1$, 则平面 CEF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, 1, 0)$.

第三步: 由直线的方向向量与平面法向量关系得结论.

所以 $\overrightarrow{DB} = 2\mathbf{n}$, 即 $\overrightarrow{DB} \parallel \mathbf{n}$, 所以 $BD \perp$ 平面 CEF 5 分

(2) **【解】** 第一步: 求平面 AEF 的法向量.

由(1)中的坐标系可得 $A(4,0,0), \overrightarrow{AE} = (-3,0,3), \overrightarrow{AF} = (-4,2,2)$. 设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$\begin{cases} -3x_2 + 3z_2 = 0, \\ -4x_2 + 2y_2 + 2z_2 = 0, \end{cases}$ 取 $x_2 = 1$, 得平面 AEF 的一个法向量为

$\mathbf{m} = (1, 1, 1)$ 8 分

第二步: 求出平面 AEF 与平面 CEF 的夹角的余弦值.

又平面 CEF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, 1, 0)$,

则 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{2+1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 则平面 AEF 与平面 CEF 的夹

角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 10 分

(3) **【解】** 第一步: 求出点 A 到平面 CEF 的距离.



由(1)(2)可得点 A 到平面 CEF 的距离 $d = \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ 11 分

第二步:利用余弦定理及三角形面积公式得 $\triangle ECF$ 的面积.

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,由已知可得 $CF=2, EF=\sqrt{6}$,

$CE=\sqrt{14}$. 在 $\triangle CEF$ 中, $\cos \angle ECF = \frac{14+4-6}{2 \times \sqrt{14} \times 2} = \frac{3}{\sqrt{14}}$, 则

$\sin \angle ECF = \sqrt{\frac{5}{14}}$, $S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CF \cdot \sin \angle ECF = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times 2 \times \sqrt{\frac{5}{14}} = \sqrt{5}$ 14 分

第三步:求三棱锥 $A-CEF$ 的体积.

则三棱锥 $A-CEF$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ECF} \cdot d = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 2$ 15 分

11. 命题点 ①线面平行、面面垂直的证明,求二面角

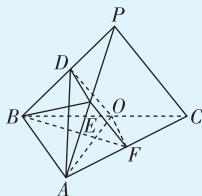
(1)【证明】由题意得 $AO = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$, $\sin \angle OBF =$

$\sin \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\angle ACB = \angle OBF$, 连接

FO , 则由 O 为 BC 的中点得 $FO \perp BC$. 又 $AB \perp BC$, 所以 $FO \parallel AB$, 故 F 为 AC 的中点. 2 分

又因为 D, E 分别为 BP, AP 的中点, 所以 $EF \parallel PC \parallel DO$, 而 $EF \not\subset$ 平面 ADO , 所以 $EF \parallel$ 平面 ADO 4 分

一题多解 (1)连接 DE, OF , 如图所示.



设 $\vec{AF} = \lambda \vec{AC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AF} = \vec{BA} + \lambda \vec{AC} = \vec{BA} + \lambda(\vec{AB} + \vec{BC}) = (1-\lambda)\vec{BA} + \lambda\vec{BC}$, $\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BO} = -\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC}$.

因为 $BF \perp AO$,

所以 $\vec{BF} \cdot \vec{AO} = [(1-\lambda)\vec{BA} + \lambda\vec{BC}] \cdot \left(-\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right) =$

$(\lambda-1)|\vec{BA}|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\vec{BC}|^2 = 4(\lambda-1) + 4\lambda = 0$,

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 即 $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, 故 F 为 AC 的中点. 2 分

又 O 为 BC 的中点, 所以 $OF \parallel AB$, $OF = \frac{1}{2}AB$.

因为 D, E 分别为 PB, PA 的中点,

所以 $DE \parallel AB$, $DE = \frac{1}{2}AB$,

所以 $DE \parallel OF$, $DE = OF$, 所以四边形 $DEFO$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel DO$.

因为 $EF \not\subset$ 平面 ADO , $DO \subset$ 平面 ADO ,

所以 $EF \parallel$ 平面 ADO 4 分



(2)【证明】由(1)知 $BF = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$, $AO = \sqrt{6}$,

$$DO = EF = \frac{\sqrt{6}}{2}, AD = \sqrt{5}DO = \frac{\sqrt{30}}{2}, BD = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

所以 $AO^2 + DO^2 = AD^2$, 所以 $AO \perp DO$.

因为 $EF \parallel DO$, 所以 $AO \perp EF$.

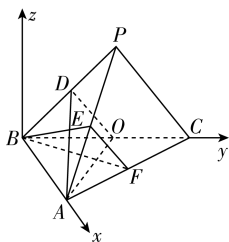
又 $AO \perp BF$, $BF \cap EF = F$,

$BF, EF \subset$ 平面 BEF , 所以 $AO \perp$ 平面 BEF .

又因为 $AO \subset$ 平面 ADO , 所以平面 $ADO \perp$ 平面 BEF .

..... 6 分

(3)【解】以 B 为原点, BA 所在直线为 x 轴, BC 所在直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $O(0, \sqrt{2}, 0)$, $C(0, 2\sqrt{2}, 0)$.



因为 $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADP$, 即 $\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 - 2^2}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{30}}{2}} =$

$-\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 - PA^2}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{30}}{2}}$, 解得 $PA = \sqrt{14}$ 7 分

设 $P(x, y, z)$, 由 $PB = PC = \sqrt{6}$, $PA = \sqrt{14}$,

$$\text{得} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 + z^2 = 6, \\ (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 14, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = -1, \\ y = \sqrt{2}, \\ z = \sqrt{3} \text{ (舍负)}, \end{cases}$$

故 $P(-1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 8 分

取平面 AOC 的法向量为 $\mathbf{m}_1 = (0, 0, 1)$.

设平面 AOD 的法向量为 $\mathbf{m}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

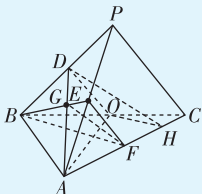
$$\text{由 } \overrightarrow{AO} = (-2, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{OD} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{得} \begin{cases} -2x_2 + \sqrt{2}y_2 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0, \end{cases} \text{令 } x_2 = 1, \text{ 则 } \mathbf{m}_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

..... 10 分

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1| |\mathbf{m}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+2+3}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以二面角 $D-AO-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 12 分

**一题多解** (3) 如图所示, 过点 O 作 $OH \parallel BF$ 交 AC 于点 H , 连接 DH . 由 $AO \perp BF$ 知 $AO \perp OH$, 且 $FH = \frac{1}{3}AH$,又由(2)知 $AO \perp OD$, 故 $\angle DOH$ 为二面角 $D-AO-C$ 的平面角. 7分设 $AD \cap BE = G$, 连接 GF .因为 D, E 分别为 PB, PA 的中点, 故点 G 为 $\triangle PAB$ 的重心,所以 $DG = \frac{1}{3}AD$, 又 $FH = \frac{1}{3}AH$, 所以 $DH \parallel GF$, $DH = \frac{3}{2}GF$.在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABP$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABD =$

$$\frac{4 + \frac{3}{2} - \frac{15}{2}}{2 \times 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{4 + 6 - PA^2}{2 \times 2 \times \sqrt{6}}, \text{ 解得 } PA = \sqrt{14}, \text{ 同理可得 } BE = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

..... 9分

故 $BE^2 + EF^2 = BF^2 = 3$, 所以 $BE \perp EF$, 故 $GF^2 = \left(\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 +$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{3}, \text{ 所以 } GF = \frac{\sqrt{15}}{3},$$

所以 $DH = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ 10分在 $\triangle DOH$ 中, $OH = \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OD = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $DH = \frac{\sqrt{15}}{2}$,

$$\text{所以 } \cos \angle DOH = \frac{\frac{6}{4} + \frac{3}{4} - \frac{15}{4}}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

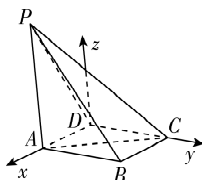
故 $\sin \angle DOH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DOH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即二面角 $D-AO-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12分**12. 命题点** ①线面平行的证明、二面角相关问题的求解(1) 【证明】由 $BC = 1, AB = \sqrt{3}, AC = 2$ 可得,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \therefore AB \perp BC.$$

又 $PA \perp$ 底面 $ABCD, BC \subset$ 底面 $ABCD, \therefore BC \perp PA$ 1分又 $AB \cap PA = A, AB, PA \subset$ 平面 PAB (提示: 要着力寻找平面内的两条相交直线), $\therefore BC \perp$ 平面 PAB 2分 $\therefore PA \perp$ 底面 $ABCD, AD \subset$ 底面 $ABCD, \therefore AD \perp PA$.又 $AD \perp PB$, 且 $PB \cap PA = P, PB, PA \subset$ 平面 PAB , $\therefore AD \perp$ 平面 $PAB, \therefore AD \parallel BC$ (提示: 垂直于同一个平面的两直线平行). 4分又 $BC \subset$ 平面 $PBC, AD \not\subset$ 平面 $PBC, \therefore AD \parallel$ 平面 PBC .

..... 5分

(2) 【解】方法一: 以 D 为坐标原点, DA, DC 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 D 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0)$,



设 $A(x, 0, 0)$ ($0 < x < 2$), 则 $P(x, 0, 2)$, $C(0, \sqrt{4-x^2}, 0)$.

则 $\vec{AC} = (-x, \sqrt{4-x^2}, 0)$, $\vec{AP} = (0, 0, 2)$, $\vec{DC} = (0, \sqrt{4-x^2}, 0)$, $\vec{DP} = (x, 0, 2)$ 8 分

设平面 ACP 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AC} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AP} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 \cdot (-x) + y_1 \cdot \sqrt{4-x^2} = 0, \\ 2z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $y_1 = x$,

则 $x_1 = \sqrt{4-x^2}$, $\therefore \mathbf{n}_1 = (\sqrt{4-x^2}, x, 0)$ 10 分

设平面 CPD 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{DC} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \vec{DP} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_2 \cdot \sqrt{4-x^2} = 0, \\ x_2 x + 2z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $z_2 = x$, 则 $x_2 = -2$,

$\therefore \mathbf{n}_2 = (-2, 0, x)$ 12 分

设二面角 $A-CP-D$ 的平面角为 θ ,

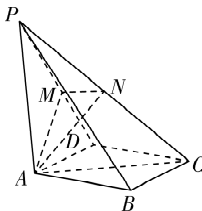
则 $|\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2+4}}$, 则 $\sin^2 \theta = 1 -$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{4-x^2}{x^2+4} = \left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)^2$, 14 分

解得 $x = \sqrt{3}$ (负值舍去).

即 AD 的长为 $\sqrt{3}$ 15 分

方法二: 如图, 作 $AM \perp PD$ 于点 M , $MN \perp PC$ 于点 N , 连接 AN 6 分



因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp DC$.

又 $AD \perp DC$, $PA \cap AD = A$, $PA, AD \subset$ 平面 PAD , 所以 $DC \perp$ 平面 PAD 7 分

因为 $AM \subset$ 平面 PAD , 所以 $DC \perp AM$.

又 $AM \perp PD$, $DC \cap PD = D$, $DC, PD \subset$ 平面 PCD , 所以 $AM \perp$ 平面 PCD .

又 $PC \subset$ 平面 PCD , 所以 $AM \perp PC$.

又 $MN \perp PC$, $MN \cap AM = M$, $MN, AM \subset$ 平面 AMN , 所以 $PC \perp$ 平面 AMN .

又 $AN \subset$ 平面 AMN , 所以 $PC \perp AN$.

所以 $\angle MNA$ 为二面角 $A-CP-D$ 的平面角, 所以 $\sin \angle MNA =$

$\frac{\sqrt{42}}{7}$ 10 分

因为 $PA = AC = 2$, 所以 N 为 PC 的中点且 $AN = \sqrt{2}$.

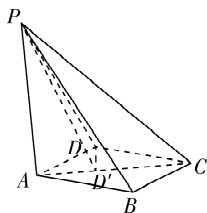
在 $\text{Rt} \triangle AMN$ 中, $AM = AN \cdot \sin \angle MNA = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{42}}{7} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

在 $\text{Rt}\triangle APM$ 中, $\sin \angle APM = \frac{AM}{AP} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{7}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $\cos \angle APM = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 所以 $\tan \angle APM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 13 分

所以 $AD = PA \cdot \tan \angle APM = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 15 分

方法三:如图,作 $DD' \perp AC$ 于点 D' ,连接 PD' ,因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $DC, DD' \subset$ 底面 $ABCD$,所以 $PA \perp DC, PA \perp DD'$.



又 $PA \cap AC = A$ 且 $PA, AC \subset$ 平面 PAC ,所以 $DD' \perp$ 平面 PAC ,所以 $\triangle PCD$ 在平面 PAC 上的投影为 $\triangle PCD'$.

设 $\triangle PCD$ 的面积为 S_1 , $\triangle PCD'$ 的面积为 S_2 ,由二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$ 可得, $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{7}$ 10 分

设 $\angle DAC = \theta \left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right)$, 则有 $AD = 2\cos \theta, CD = 2\sin \theta, CD' = 2\sin^2 \theta$.

又 $AD \perp DC, AD \cap PA = A, AD, PA \subset$ 平面 PAD ,所以 $DC \perp$ 平面 PAD .

因为 $PD \subset$ 平面 PAD ,所以 $DC \perp PD$.

因此 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4+4\cos^2 \theta} \cdot 2\sin \theta$, 又 $S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sin^2 \theta$, 代

入 $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{7}$, 解得 $\sin \theta = \frac{1}{2}$, 则 $\angle DAC = \frac{\pi}{6}$, 故 $AD = 2\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ 15 分



思维素养专练

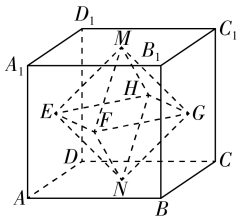
1. B 【解析】设这个圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 则底面面积为 πr^2 , 底面周长为 $2\pi r$, 由弧长公式得 $\pi l = 2\pi r$, 所以 $l = 2r$, 则该圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\pi l^2 = \frac{1}{2}\pi (2r)^2 = 2\pi r^2$, 故其表面积为 $\pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 = 3\pi \text{ m}^2$, 所以 $r = 1 \text{ m}$, 则底面直径为 2 m .

2. A 【解析】如图, 该八面体由正四棱锥 $M-EFGH$ 和正四棱锥 $N-EFGH$ 组成.

结合正方体的特征, 易知四边形 $EFGH$ 为正方形, 且 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以四边形 $EFGH$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

易知正四棱锥 $M-EFGH$ 和正四棱锥 $N-EFGH$ 的高均为 $\frac{1}{2}$,

所以八面体的体积 $V = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (提示: 将八面体切割为两个正四棱锥求体积).



3. D 【解析】无论容器如何放置, 容器内水的体积不变, 依此列方程求解. 当侧面 AA_1B_1B 水平放置时, 水的体积即为四棱柱 $ABEF-A_1B_1E_1F_1$ 的体积, 且该四棱柱的上、下底面均为等腰梯形, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则 $S_{\text{梯形}ABEF} = \frac{3}{4}S$, 水的体积

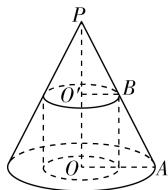
$$V_{\text{水}} = \frac{3}{4}S \cdot AA_1 = \frac{3}{4}S \times 12 = 9S.$$

当底面 ABC 水平放置时, 设水面高为 h , 则有 $V_{\text{水}} = Sh = 9S$ (提示: 等体积法), 即 $h = 9$, 所以当底面 ABC 水平放置时, 容器中水面的高为 9.

4. B 【解析】如图, 过 OP 的中点 O' 作平行于底面的截面, 截面圆半径为 $O'B$,

OA 是圆锥底面半径, B 在母线 PA 上, 因为 O' 为 PO 中点, 所以 $O'B = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}$, $OO' = \frac{1}{2}PO = 1$,

所以剩余的几何体的体积为 $\frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 2 - \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{5\pi}{12}$ (提示: 几何体体积不易求时, 可间接求解).



5. C 【解析】记该牙雕套球的球心为 O , 圆 O_1 与圆 O_2 所在平面的夹角即为 $\angle O_1OO_2$ (或其补角), $OO_1 = OO_2 = \sqrt{6^2 - 2^2} =$



$$4\sqrt{2}. \text{ 所以 } \cos \angle O_1 O O_2 = \frac{OO_1^2 + OO_2^2 - O_1 O_2^2}{2OO_1 \cdot OO_2} = \frac{7}{16},$$

$$\text{所以 } \sin \angle O_1 O O_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \angle O_1 O O_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{16}\right)^2} = \frac{3\sqrt{23}}{16},$$

故选 C.

6. A 【解析】设水面半径为 R , 易得 $\frac{R-50}{100-50} = \frac{50-20}{50}$, 解得 $R = 80(\text{mm})$.

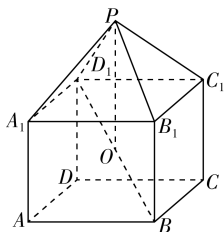
$$\text{则桶内水的体积 } V = \frac{1}{3} \times 20 \times (\pi \times 80^2 + \sqrt{\pi \times 80^2 \times \pi \times 100^2} + \pi \times 100^2) = \frac{20}{3} \pi \times 24\,400 (\text{mm}^3).$$

又接雨面积为桶的开口面积 $S = \pi \times 50^2 = 2\,500\pi (\text{mm}^2)$ (易错: 接雨面积为圆台形铁桶的上底面面积), 根据降雨量定义

$$\text{得水层深度 } d = \frac{V}{S} = \frac{\frac{20}{3} \pi \times 24\,400}{2\,500\pi} \approx 65.1 (\text{mm}).$$

故当日降雨量的等级是暴雨.

7. B 【解析】因为正四棱柱和正四棱锥的底面边长均为 4, 且体积之比为 3 : 1, 所以正四棱柱和正四棱锥的高相等, 设它们的高为 h , 球 O 的半径为 R , 连接 OB, OD_1, OP , 如图, $OB = OD_1 = OP = R$, 则 $R = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + 32} = h + \frac{1}{2}h = \frac{3}{2}h$, 解得 $h = 2$, 所以 $R = 3$.



8. B 【解析】设阳马 $P-ABCD$ 外接球的半径为 R , 由题意有

$$V_{P-AED} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AED} \cdot AP = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 \times AP = 2, \text{ 解得 } AP =$$

$2\sqrt{3}$, 又 $PA \perp$ 平面 $ABCE$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCE$, 且四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $PA \perp AD, PA \perp AB, AD \perp AB$,

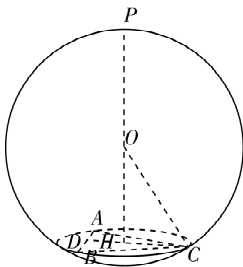
所以 $(2R)^2 = PA^2 + AD^2 + AB^2 = (2\sqrt{3})^2 \times 3$, 解得 $R = 3$ (提示: 可将阳马补形为正方体理解), 所以阳马 $P-ABCD$ 外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 36\pi$.

9. $9+3\sqrt{6}$ 【解析】如图, O 为球心, H 为 $\triangle ABC$ 的中心, D 为 AB 中点, 球 O 的半径 $R = 9$ 厘米, 连接 OC, CD , 则 H 在 CD 上, 连接并延长 HO , 交球面于点 P , 此时点 P 到平面 ABC 的距离最大.

由题意知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB = OC = R$, 则 $CH = \frac{2}{3}CD =$

$$\frac{2}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} (\text{厘米}), \text{ 在 Rt } \triangle OCH \text{ 中, } OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = 3\sqrt{6} (\text{厘米}),$$

即球心 O 到平面 ABC 的距离 $d = 3\sqrt{6}$ 厘米, 故点 P 到平面 ABC 的距离的最大值为 $d + R = 9 + 3\sqrt{6}$ (厘米).

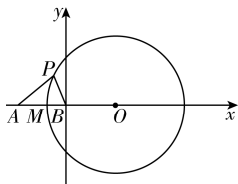


- 10. C** 【解析】根据一笔画的要求,先找到顶点都是偶点(从这一点引出的线段条数为偶数)的图形,一定可以一笔画,再验证有奇点(从这一点引出的线段条数为奇数)的图形是否符合一笔画的条件.

从一顶点出发的边数为偶数的顶点叫偶点,凡是由偶点组成的图形一定可以一笔画,故 **C 正确**.

从一顶点出发的边数为奇数的顶点叫奇点,凡是含有奇点的图形,必须满足有且只有两个奇点,其余点均为偶点才可以一笔画,而 ABD 选项的几何体中,每个顶点都是奇点,所以不能一笔画. 故选 C.

- 11. C** 【解析】在平面中,如图所示,以 B 为原点, AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,设阿氏圆圆心为 $O(a, 0)$, 半径为 $r(r > 0)$.



因为 $|PA| = \sqrt{2}|PB|$, 所以 $\frac{|PA|}{|PB|} = \sqrt{2}$, 所以 $r = \left| \frac{\sqrt{2}}{1 - (\sqrt{2})^2} \right|$.

$$|AB| = \sqrt{2}.$$

设圆 O 交 x 轴于点 O 左侧的点 M , 因为 $|BM| = \sqrt{2} - |BO| = \sqrt{2} - a$, 所以 $|AM| = \sqrt{2}|BM| = 2 - \sqrt{2}a$, 所以 $2 - \sqrt{2}a + \sqrt{2} - a = 1$, 解得 $a = 1$, 所以圆心 $O(1, 0)$ (提示: 根据阿氏圆性质求出阿氏圆圆心 O 的坐标),

所以 P 在空间内的轨迹是以 O 为球心, $\sqrt{2}$ 为半径的球.

因为 $OB \perp$ 平面 B_1BCC_1 , 平面 B_1BCC_1 截球所得小圆是以 B 为圆心, 1 为半径的圆,

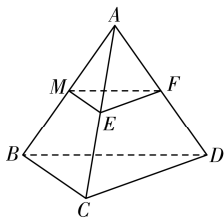
所以点 P 在侧面 B_1BCC_1 上的轨迹长度为 $2\pi \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$.

- 12. 7** $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2} \right\}$ 【解析】情形一: 如图①所示, 分别取 AB ,

AC, AD 的中点 M, E, F , 连接 ME, EF, MF , 由中位线性质可知 $ME = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 此时平面 MEF 为 Ω 的一个 1 阶等距平面,

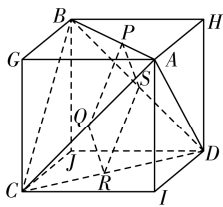
m 为正四面体高的一半, 即 $m = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

又正四面体有 4 个面, 所以这样的 1 阶等距平面 α 有 4 种情况.



图①

情形二:如图②所示,分别取 AB, AC, CD, DB 的中点 P, Q, R, S ,将此正四面体放置到棱长为 1 的正方体中,则平面 $PQRS$ 为 Ω 的一个 1 阶等距平面,且 m 为正方体棱长的一半, $m = \frac{1}{2}$. 正四面体的六条棱中有 3 组对棱互为异面直线,这样的 1 阶等距平面 α 平行于其中一组异面直线即可,故共有 3 种情况.



图②

综上,当 m 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,符合条件的 α 有 4 个;当 m 的值为 $\frac{1}{2}$ 时,符合条件的 α 有 3 个,所以符合条件的 α 共有 7 个,

m 的所有可能取值构成的集合是 $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2} \right\}$.

13. (1) 【证明】因为 $PA = AB$, 且 E 为线段 PB 中点, 所以 $AE \perp PB$.

又因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BC$.

而 $BC \perp AB$, 且 $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB , 因此 $BC \perp$ 平面 PAB , 又 $AE \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp AE$.

因为 $PB \cap BC = B$, $PB, BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AE \perp$ 平面 PBC .

又 $AE \subset$ 平面 AEF , 所以平面 $AEF \perp$ 平面 PBC .

(2) 【解】如图, 以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.

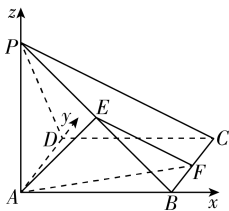
不妨设 $AB = 1, BF = a, a \in [0, 1]$, 则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), P(0, 0, 1), F(1, a, 0)$, 则 $\overrightarrow{AF} = (1, a, 0), \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0), \overrightarrow{PB} = (1, 0, -1)$.

设平面 PBC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y = 0, \\ x - z = 0, \end{cases} \text{令 } x = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (1, 0, 1),$$

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AF} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{AF}|} = \frac{1}{\sqrt{2(a^2 + 1)}} \in$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

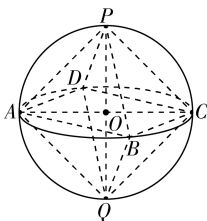


快解 (2) 由(1)可知直线 AF 与平面 PBC 所成角为

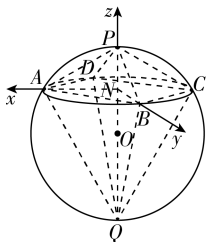
$\angle AFE$, 因此 $\sin \theta = \sin \angle AFE = \frac{AE}{AF}$, 不妨设 $AB = PA = a$, 则

$$AE = \frac{\sqrt{2}}{2}a, AF \in [a, \sqrt{2}a], \text{ 所以 } \sin \theta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

14. (1)【证明】如图①,连接 AC , 则 AC 必过点 O , 在四边形 $PAQC$ 中, 由于对角线 AC, PQ 互相平分, 得四边形 $PAQC$ 为平行四边形, 故 $PA \parallel QC$, 因为 $PA \not\subset$ 平面 QBC , $QC \subset$ 平面 QBC , 所以 $PA \parallel$ 平面 QBC .



图①



图②

(2)【解】如图②,记正方形 $ABCD$ 的中心为 N ,连接 NA , NB ,则点 N 在 PQ 上,且 NA, NB, NP 两两垂直,以点 N 为坐标原点, NA 所在直线为 x 轴, NB 所在直线为 y 轴, NP 所在直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,不妨设点 O 不在 N 的上方,设 $ON=t, t \in [0, 1)$, 则 $NA=NB=\sqrt{1-t^2}, BC=\sqrt{2-2t^2}, PN=1-t, QN=1+t$,

于是 $A(\sqrt{1-t^2}, 0, 0), B(0, \sqrt{1-t^2}, 0), P(0, 0, 1-t), Q(0, 0, -(1+t))$.

设平面 PAB 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{AP} = (-\sqrt{1-t^2}, 0, 1-t)$, $\overrightarrow{BP} = (0, -\sqrt{1-t^2}, 1-t)$,

由 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BP} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -\sqrt{1-t^2}x_1 + (1-t)z_1 = 0, \\ -\sqrt{1-t^2}y_1 + (1-t)z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $z_1 = \sqrt{1+t}$, 则

$$x_1 = y_1 = \sqrt{1-t},$$

所以平面 PAB 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (\sqrt{1-t}, \sqrt{1-t}, \sqrt{1+t})$.

设平面 QAB 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{AQ} = (-\sqrt{1-t^2}, 0, -(1+t))$, $\overrightarrow{BQ} = (0, -\sqrt{1-t^2}, -(1+t))$,

由 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AQ} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BQ} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -\sqrt{1-t^2}x_2 - (1+t)z_2 = 0, \\ -\sqrt{1-t^2}y_2 - (1+t)z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $z_2 = \sqrt{1-t}$, 则

$$x_2 = y_2 = -\sqrt{1+t},$$

所以平面 QAB 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (-\sqrt{1+t}, -\sqrt{1+t}, \sqrt{1-t})$.

设二面角 $P-AB-Q$ 的平面角为 θ , 由 $\tan \theta = -3$,



$$\text{可得 } |\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\text{则 } \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{3-t} \cdot \sqrt{3+t}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{9-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \text{ 解得 } t = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } BC = \frac{4}{3}, \text{ 则八面体的体积 } V = \frac{1}{3} \times PQ \times S_{\text{正方形}ABCD} = \frac{1}{3} \times$$

$$2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}, \text{ 即球 } O \text{ 的内接八面体的体积为 } \frac{32}{27}.$$

快解 (2) 如图③, 记正方形 $ABCD$ 的中心为 N , 则点 N 在 PQ 上, 取 AB 中点 M , 连接 PM, QM, NA, NB, MN , 由于 $PA=PB$, 则 $PM \perp AB$, 同理可证 $QM \perp AB$, 则 $\angle PMQ$ 为二面角 $P-AB-Q$ 的平面角, 又 $NA=NB$, 则 $NM \perp AB$, 则 $\angle PMN$ 为二面角 $P-AB-N$ 的平面角, $\angle QMN$ 为二面角 $Q-AB-N$ 的平面角. 不妨设点 O 不在 N 的上方, $ON=x (0 \leq x < 1)$, 则

$$NA=NB=\sqrt{1-x^2}, AB=\sqrt{2-2x^2}, MN=\frac{\sqrt{2-2x^2}}{2}, PN=1-x,$$

$$QN=1+x, \text{ 于是 } \tan \angle PMN = \frac{PN}{MN} = \frac{2(1-x)}{\sqrt{2-2x^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

$$\tan \angle QMN = \frac{QN}{MN} = \frac{2(1+x)}{\sqrt{2-2x^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \text{ 于是 } \tan \angle PMQ =$$

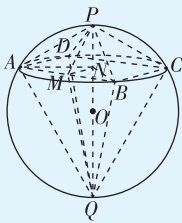
$$\tan(\angle PMN + \angle QMN) = \frac{\tan \angle PMN + \tan \angle QMN}{1 - \tan \angle PMN \cdot \tan \angle QMN}, \text{ 即}$$

$$\tan \angle PMQ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1-2} = -\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) = -3, \text{ 由于 } 0 < \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \leq 1, \text{ 则 } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } x =$$

$$\frac{1}{3}, \text{ 则 } AB = \frac{4}{3}, \text{ 所以八面体的体积 } V = \frac{1}{3} \times PQ \times S_{\text{正方形}ABCD} =$$

$$\frac{1}{3} \times 2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}, \text{ 即球 } O \text{ 的内接八面体的体积为 } \frac{32}{27}.$$



图③