



思维素养专练

1. B 【解析】因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $ab = a + b + 15 \geq 2\sqrt{ab} + 15$, 即 $ab - 2\sqrt{ab} - 15 \geq 0$, 解得 $\sqrt{ab} \geq 5$ ($\sqrt{ab} \leq -3$ 舍去), 所以 $ab \geq 25$, 当且仅当 $a = b = 5$ 时取等号 (易错: 不要忘记检验等号成立的条件), 所以 ab 的最小值是 25.

2. C 【解析】二次项系数含参, 需要对二次项系数的符号进行分类讨论.

当 $m = -1$ 时, 不等式为 $x - 2 > 0$, 此时解集不为 $\emptyset$, 不符合题意;

当 $m < -1$ 时, 若解集为 $\emptyset$, 则 $\Delta = m^2 - 4(m+1)(m-1) \leq 0$, 解得 $m \leq -\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

当 $m > -1$ 时, 不等式的解集一定不为 $\emptyset$, 不符合题意.

综上, $m \leq -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即 m 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. 故选 C.

3. ABD 【解析】根据题意, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n - a_{n-1} = n, a_{n-1} - a_{n-2} = n-1, \dots, a_2 - a_1 = 2$, 累加得 $a_n - a_1 = 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(2+n)(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2}$, $\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 易知 $a_1 = 1$ 也满足上

式 (易错: 累加法注意检验首项), $\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$,

$\therefore a_5 = \frac{5 \times 6}{2} = 15$, 故 A 正确;

$a_{n+1} - a_n = n+1$, $\therefore \{a_{n+1} - a_n\}$ 是等差数列, 故 B 正确;

$a_{2025} = \frac{2025 \times 2026}{2} = 2025 \times 1013$ 为奇数, 故 C 错误;

$\therefore a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, $\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots +$

$\frac{1}{a_n} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1}$, $\therefore n \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore 1 \leq 2 - \frac{2}{n+1} < 2$, 即 $1 \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$, 故 D 正确.

4. BC 【解析】若 $a = 1, b = 2$, 则满足 $ab > 0$, 但不满足 $a + b < ab$, 故 A 错误;

因为 $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$ (提示: 作差法比较大小), 所以 $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, 故 B 正确;

因为 $ab > 0, a > b$, 所以 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 C 正确;

因为 $0 < a < b, m > 0$, 所以 $\frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} = \frac{(a-b)m}{b(b+m)} < 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ (提示: 糖水不等式), 故 D 错误.

5. B 【解析】设牛、羊、猪分别有 x, y, z 头, 则根据题意有

$$\begin{cases} 3x > y + z, \\ y \geq x + 1, \\ z \geq x + 2, \\ x, y, z \in \mathbf{N}^*, \end{cases} \quad \text{则 } x > 3, \therefore x_{\min} = 4, \quad \text{则 } \begin{cases} 12 > y + z, \\ y \geq 5, \\ z \geq 6, \\ y, z \in \mathbf{N}^*, \end{cases} \quad \text{则 } (x + y + z)_{\min} =$$



$$4+5+6=15.$$

- 6. B** 【解析】设 $AD=x$ m, $DQ=y$ m, 则 $x^2+4xy=200$, 所以 $y=\frac{200-x^2}{4x}$, 所以 $S=4\ 200x^2+210\cdot 4xy+80\cdot 2y^2=38\ 000+\frac{4\ 000x^2}{x^2}+\frac{400\ 000}{x^2}$, 因为 $x>0, y>0$, 所以 $\frac{200-x^2}{4x}>0$ 且 $x>0$, 解得 $0<x<10\sqrt{2}$ (提示: 需要结合题意确定 x 的范围), 所以 $S=38\ 000+4\ 000x^2+\frac{400\ 000}{x^2}$, $0<x<10\sqrt{2}$, 故 $S=38\ 000+4\ 000x^2+\frac{400\ 000}{x^2}\geq 38\ 000+2\sqrt{4\ 000x^2\cdot \frac{400\ 000}{x^2}}=118\ 000$, 当且仅当 $4\ 000x^2=\frac{400\ 000}{x^2}$, 即 $x=\sqrt{10}$ 时, 等号成立 (提示: 需要验证取等条件), 所以当 $AD=\sqrt{10}$ m 时, 总造价 S 最小, 最小值为 118 000 元. 故选 B.

- 7. 144 1 073** 【解析】设前 4 项构成的等比数列的公比为 q , 则 $a_4=a_1q^3$, 即 $135=5q^3$, 解得 $q=3$. 设后 7 项构成的等差数列的公差为 d , 则 $a_9=a_4+5d$, 即 $150=135+5d$, 解得 $d=3$. $a_7=a_4+3d=135+3\times 3=144$. 数列 $\{a_n\}$ 所有项的和 $S=\frac{5\times(1-3^3)}{1-3}+7\times 135+\frac{7\times 6}{2}\times 3=65+945+63=1\ 073$.

- 8. 【解】**(1) 若选①, 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q>0$, 则 $2+2q+2q^2=14$, 解得 $q=2$, 又 $a_1=2$, 所以 $a_n=2^n$. 由 $(b_{n+1}-b_n)a_n=a_{n+1}$ 得 $b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ (提示: 等差数列的定义), 而 $b_1=2$, 则数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $b_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

若选②, 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q>0$, 由 a_1+1, a_2, a_3-3 成等差数列得 $2a_2=a_1+1+a_3-3$, 即 $2a_2=a_3$, 解得 $q=2$, 因此 $a_n=2^n$.

由 $(b_{n+1}-b_n)a_n=a_{n+1}$ 得 $b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$, 而 $b_1=2$, 则数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $b_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

若选③, 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q>0$, 则 $\begin{cases} S_3=a_1(1+q+q^2)=14, \\ S_6-S_3=a_1q^3(1+q+q^2)=112, \end{cases}$ 解得 $q=2, a_1=2$, 因此 $a_n=2^n$.

由 $(b_{n+1}-b_n)a_n=a_{n+1}$ 得 $b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$, 而 $b_1=2$, 则数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $b_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

(2) 由 (1) 知 $c_n=\begin{cases} 2n, n \text{ 为奇数}, \\ 2^n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ (提示: 数列的通项分奇偶项表示, 可优先考虑分组求和), 所以 $T_{10}=(c_1+c_3+c_5+c_7+c_9)+(c_2+c_4+c_6+c_8+c_{10})=(2+6+10+14+18)+(2^2+2^4+2^6+2^8+2^{10})=\frac{5\times(2+18)}{2}+\frac{4(1-4^5)}{1-4}=1\ 414$.



9. C 【解析】 $x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 9$, 所以 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (易错: 注意集合 A 中的元素是自然数). $\frac{3-x}{3+x} > 0 \Rightarrow (3-x)(3+x) > 0 \Rightarrow -3 < x < 3$, 所以 $B = \{x | -3 < x < 3\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

10. A 【解析】因为 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} =$

$$1, f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{4051} = f(e^{-2.025}) + f(e^{-2.024}) + \cdots + f(1) + \cdots + f(e^{2.024}) + f(e^{2.025}) = 2025 \times 1 + \frac{1}{2} = \frac{4051}{2}.$$

11. C 【解析】因为 $\xi \sim N(3, \sigma^2)$, 所以正态曲线关于直线 $x = 3$ 对称, 又 $P(\xi \leq a) = P(\xi \geq 5)$, 所以 $\frac{a+5}{2} = 3$, 解得 $a = 1$. $\frac{1}{x} +$

$$\frac{9}{1-x} = \left(\frac{1}{x} + \frac{9}{1-x}\right)[x + (1-x)] = 10 + \frac{1-x}{x} + \frac{9x}{1-x}, \text{ 因为 } 0 < x < 1, \text{ 所}$$

$$\text{以 } 10 + \frac{9x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{9x}{1-x} \times \frac{1-x}{x}} = 16, \text{ 当且仅当 } \frac{9x}{1-x} =$$

$$\frac{1-x}{x}, \text{ 即 } x = \frac{1}{4} \text{ 时取等号. 故选 C.}$$

12. B 【解析】所求为边的关系式的最值, 可将平面向量的等

$$\text{量关系转化为边的关系. 由 } \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ 得 } \overrightarrow{AD}^2 =$$

$$\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2, \therefore 4 = \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ 即}$$

$$4 = \frac{4}{9}c^2 + \frac{1}{9}b^2 + \frac{4}{9}bccos 60^\circ, \text{ 整理得 } b^2 + 4c^2 + 2bc = 36, \therefore (b +$$

$$2c)^2 - 36 = 2bc, \text{ 又 } 2bc \leq \left(\frac{b+2c}{2}\right)^2, \therefore (b+2c)^2 - 36 \leq \frac{(b+2c)^2}{4},$$

$$\text{即 } (b+2c)^2 \leq 48, \therefore b+2c \leq 4\sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } b=2c, \text{ 即 } b=2\sqrt{3},$$

$$c=\sqrt{3} \text{ 时, 等号成立, } \therefore b+2c \text{ 的最大值为 } 4\sqrt{3}. \text{ 故选 B.}$$

13. B 【解析】因为 α, β, γ 成等差数列, 所以 $2\beta = \alpha + \gamma$,

$$\text{则 } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

$$\text{设 } x = \alpha + \gamma,$$

$$\text{因为 } 2\sin \alpha - \sin \gamma = 2\cos \beta, 2\cos \alpha + \cos \gamma = 3\sin \beta, \text{ 所以 } (2\sin \alpha -$$

$$\sin \gamma)^2 + (2\cos \alpha + \cos \gamma)^2 = (2\cos \beta)^2 + (3\sin \beta)^2, \text{ 整理得 } 5 +$$

$$4\cos(\alpha + \gamma) = 4 + 5\sin^2 \beta, \text{ 即 } 5 + 4\cos x = 4 + 5 \times \frac{1 - \cos 2\beta}{2} =$$

$$\frac{13 - 5\cos x}{2}, \text{ 所以 } \cos x = \frac{3}{13}, \text{ 即 } \cos(\alpha + \gamma) = \frac{3}{13}.$$

14. 【解】(1) 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, 所以 $f'(x) = x^2$, 设切点坐标为

$$\left(x_0, \frac{1}{3}x_0^3\right), \text{ 则切线斜率 } k = f'(x_0) = x_0^2, \text{ 故切线方程为 } y -$$

$$\frac{1}{3}x_0^3 = x_0^2(x - x_0), \text{ 即 } y = x_0^2 \cdot x - \frac{2}{3}x_0^3, \text{ 将 } \left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ 代入可得}$$



$$\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}x_0^3, \text{解得 } x_0 = -1, \text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = x + \frac{2}{3}.$$

(2) 第一步: 求 x_n 与 y_n 的关系.

由(1)可知 $f'(x) = x^2$, 则 $y_n = x_n^2$,

第二步: 结合两圆外切得递推关系式.

由题意可知 $\odot P_n$ 的圆心为 $P_n(x_n, x_n^2)$, 半径 $r_n = x_n^2$,

因为 $\odot P_n$ 与 $\odot P_{n+1}$ 外切, 所以 $|P_n P_{n+1}| = r_n + r_{n+1}$,

可得 $\sqrt{(x_n - x_{n+1})^2 + (x_n^2 - x_{n+1}^2)^2} = x_n^2 + x_{n+1}^2$, 且 $0 < x_{n+1} < x_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

第三步: 变形可得数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是等差数列.

整理可得 $x_n - x_{n+1} = 2x_n x_{n+1}$, 即 $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = 2$, 又 $\frac{1}{x_1} = 1$, 所以数

列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列.

第四步: 根据等差数列的通项公式求 x_n .

则 $\frac{1}{x_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, 即 $x_n = \frac{1}{2n-1}$,

第五步: 裂项求和.

$$\begin{aligned} \text{则 } x_n \cdot x_{n+1} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \text{所以 } S_n = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

关键点拨 数列经常与导数、圆锥曲线等知识融合, 解题的关键是根据题设信息求数列的通项公式, 通常先根据题设信息得出递推关系式, 进而求通项公式.

15. D 【解析】根据“优值”的定义求出 a_n , 根据等差数列的前 n 项和公式求出 S_n , 代入求解即可.

$$\begin{aligned} \text{由 } H_n &= \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_n}{n} = 2^n, \text{得 } a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_n = \\ &= n \cdot 2^n \text{ ①, 则当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-2}a_{n-1} = (n-1) \cdot 2^{n-1} \\ &\text{②,} \end{aligned}$$

$$\text{①}-\text{②得 } 2^{n-1}a_n = n \cdot 2^n - (n-1) \cdot 2^{n-1} = (n+1) \cdot 2^{n-1},$$

即 $a_n = n+1$; 当 $n=1$ 时, $H_1 = a_1 = 2^1 = 2$, 满足上式.

$$\text{故 } a_n = n+1 (n \in \mathbf{N}^*), S_n = \frac{n(n+3)}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{S_{2026}}{2026} = \frac{2029}{2}.$$

16. (1) 【证明】由题意得 $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$, 即 $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$, 则数列 $\{a_n + 1\}$ 是“平方递推数列”.

对 $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$ 两边同时取常用对数得 $\lg(a_{n+1} + 1) = 2\lg(a_n + 1)$,

又 $\lg(a_1 + 1) = 1$, 所以数列 $\{\lg(a_n + 1)\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列.



(2)【解】由(1)知 $\lg(a_n+1)=2^{n-1}$,

$$\lg T_n = \lg[(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)] = \lg(a_1+1) + \lg(a_2+1) + \cdots + \lg(a_n+1) = \frac{1 \cdot (1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1.$$

$$(3)【解】b_n = \frac{\lg T_n}{\lg(a_n+1)} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } S_n = 2n - \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

又 $S_n > 4\,048$, 所以 $2n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}} > 4\,048$, 即 $n + \frac{1}{2^n} > 2\,025$, 又 $0 <$

$\frac{1}{2^n} < 1$, 所以 $n_{\min} = 2\,025$.