



思维素养专练

1. **A** 【解析】因为向量 $a = (1, 1)$, $b = (2, x)$, 所以 $b - 4a = (-2, x - 4)$, 又 $a \perp (b - 4a)$, 所以 $a \cdot (b - 4a) = -2 + x - 4 = 0$ (提示: 利用向量垂直的坐标表示进行计算), 得 $x = 6$. 故选 A.

2. **D** 【解析】
$$\frac{\sin \theta + \sin \theta \cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cdot 2\cos^2 \theta}{\cos \theta} = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1} = \frac{2\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$$
 (提示: 利用三角恒等变换将原式化简为只含 $\tan \theta$ 的形式, 再代入 $\tan \theta$ 的值计算). 故选 D.

3. **B** 【解析】由点 O 是 BC 的中点得 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{m}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{n}{2}\overrightarrow{AN}$, 由 M, O, N 三点共线得 $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} = 1$ (提示: 三点共线的性质).

又 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right) = 1 + \frac{n}{2m} + \frac{m}{2n} \geq$

$1 + 2\sqrt{\frac{n}{2m} \cdot \frac{m}{2n}} = 2$, 当且仅当 $\frac{n}{2m} = \frac{m}{2n}$, 即 $m = n = 1$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 2. 故选 B.

4. **D** 【解析】 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{CD}| \cos(\pi - \angle BCD) = -1$, 即 $1 \times$

易错点

$2 \times (-\cos \angle BCD) = -1$, 则 $\cos \angle BCD = \frac{1}{2}$.

又 $\angle BCD \in (0, \pi)$, 所以 $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$.

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 所以 $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2} =$

$\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD})} =$

$\sqrt{9 + 1 + 4 + 2 \times \left[3 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times 2 + (-1) \right]} = \sqrt{21}$. 故选 D.

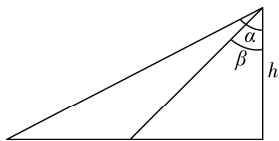
5. **C** 【解析】由向量 $s_A = (4, 3)$, $s_B = (2, 10)$, 可得 $s = s_B - s_A = (2, 10) - (4, 3) = (-2, 7)$ (提示: 注意位移的几何意义), 所以

s 在 s_A 上的投影向量为 $\frac{s \cdot s_A}{|s_A|} \cdot \frac{s_A}{|s_A|} = \left(\frac{-2 \times 4 + 7 \times 3}{25} \times 4, \frac{-2 \times 4 + 7 \times 3}{25} \times 3 \right) = \left(\frac{52}{25}, \frac{39}{25} \right)$. 故选 C.

6. **A** 【解析】由题意, 第一次测量时太阳天顶距为 α , 影长为表高的 2 倍, 所以 $\tan \alpha = 2$.



由 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3} = \frac{2 - \tan \beta}{1 + 2 \tan \beta}$, 解得 $\tan \beta = 1$, 即第二次测量时影长是表高的 1 倍. 故选 A.



7. A 【解析】因为两球的半径分别为 3 和 4, 所以 $PO_1 = 3$,

$PO_2 = 4$, 又 $O_1O_2 = \sqrt{13}$,

在 $\triangle O_1PO_2$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \angle O_1PO_2 =$

$$\frac{O_1P^2 + O_2P^2 - O_1O_2^2}{2O_1P \cdot O_2P} = \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PO_1} \cdot \overrightarrow{PO_2} = |\overrightarrow{PO_1}| \cdot |\overrightarrow{PO_2}| \cos \angle O_1PO_2 = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6.$$

故选 A.

8. C 【解析】设 $P(x, y)$, 坐标原点为 O , 则 $\overrightarrow{PA} = (\sin \alpha - x, \cos \alpha - y)$, $\overrightarrow{PB} = (-\sin \alpha - x, -\cos \alpha - y)$, 即 $W = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-\sin \alpha - x) \cdot (\sin \alpha - x) + (-\cos \alpha - y) \cdot (\cos \alpha - y) = x^2 + y^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = x^2 + y^2 - 1$, 即 $W = |\overrightarrow{OP}|^2 - 1$, 当 $|\overrightarrow{OP}|$ 最小时, W 最小,

坐标原点 O 到直线 $l: x + 2y - 8 = 0$ 的距离 $d = \frac{|0 + 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$, 所

以 $|\overrightarrow{OP}|_{\min}^2 = d^2 = \frac{64}{5}$ (提示: 点 $P(x, y)$ 在直线 $l: x + 2y - 8 = 0$ 上,

$x^2 + y^2$ 表示点 $P(x, y)$ 到坐标原点 O 的距离的平方, 可将 W

的最小值问题进行转化), 所以 $W_{\min} = \frac{64}{5} - 1 = \frac{59}{5}$. 故选 C.

9. BCD 【解析】A 选项, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \sin(-x) +$

$$\frac{1}{2}\sin(-2x) + \frac{1}{3}\sin(-3x) + \frac{1}{4}\sin(-4x) + \cdots + \frac{1}{50}\sin(-50x) =$$

$$-\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x - \cdots - \frac{1}{50}\sin 50x = -f(x),$$

故 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 (另解: $y = \sin x, y = \frac{1}{2}\sin 2x, y =$

$\frac{1}{3}\sin 3x, y = \frac{1}{4}\sin 4x, \cdots, y = \frac{1}{50}\sin 50x$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

故 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数), $f(x)$ 的图象关于原点对称, 故 A

错误.

B 选项, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 时, $2x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], 3x \in$

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, 故 $y = \sin x, y = \frac{1}{2}\sin 2x, y = \frac{1}{3}\sin 3x$ 在

$\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, 则 $m(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增

(提示: 增函数 + 增函数 = 增函数), 故 B 正确.



C 选项, 因为 $y = \sin x$ 的最小正周期为 2π , $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ 的最小正周期为 π , 所以 $g(x)$ 的最小正周期为 2π , 其频率 $f_1 = \frac{1}{2\pi}$, 纯音 $h(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 其频率 $f_2 = \frac{2}{\pi}$, 所以声音甲的频率更低, 故声音甲比纯音 $h(x)$ 更低沉, 故 C 正确.

D 选项, $F(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(2x + \pi) = \sin x + \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x$, 令 $\sin x + \cos x = t, t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 将 $\sin x + \cos x = t$ 两边平方可得 $1 + \sin 2x = t^2$, 则 $y = \sin x + \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x = t - \frac{1}{2}(t^2 - 1) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}, t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 易知 $y \in \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1\right]$, 则 $F(x) \geq -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

10. $2\sqrt{5}$ 【解析】如图所示, 过 C 作 $CM \perp AB$ 交 AB 于点 M,

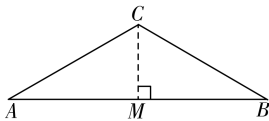
设 $|\vec{AB}| = c, |\vec{AC}| = b, |\vec{BC}| = a$,

则 $AM = AC \cos A = b \cos A, BM = BC \cos B = a \cos B$.

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $\angle BCA = 120^\circ$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin 120^\circ = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, 则 $ab = 8$,

所以 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos(\pi - B) + |\vec{BC}| |\vec{CA}| \cos(\pi - \angle BCA) + |\vec{CA}| |\vec{AB}| \cos(\pi - A) = -a \cos B - ab \cos \angle BCA - b \cos A = -c(a \cos B + b \cos A) - 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -c(BM + AM) + 4 = -c \cdot AB + 4 = -c^2 + 4 = -16$, 解得 $c = 2\sqrt{5}$, 即 $|\vec{AB}| = 2\sqrt{5}$.



快解 题中给出向量关系、 $C = 120^\circ$ 、 $\triangle ABC$ 的面积, 所求为三角形的一边长, 可考虑将向量关系转化为三角形边的关系, 将此题转化为解三角形问题. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 由题可得 $\vec{AB} \cdot (\vec{BC} + \vec{CA}) + \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -16$, 即 $\vec{AB} \cdot \vec{BA} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -16$, 即 $-c^2 + \frac{1}{2}ab = -16$, 又因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab \sin 120^\circ = 2\sqrt{3}$, 所以 $ab = 8$, 所以 $-c^2 + \frac{1}{2} \times 8 = -16$, 解得 $c = 2\sqrt{5}$, 即 $|\vec{AB}| = 2\sqrt{5}$.

11. 【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a < b < c$, 所以 $A < B < C$, 所以 A 为



锐角, $\tan A > 0$,

假设 $\tan A \geq 2$, 则 $\tan A > \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$, 又 $y = \tan x$ 在

$(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 所以 $A > \frac{\pi}{3}$,

又 $A < B < C$, 所以 $A + B + C > 3A > \pi$, 与 $A + B + C = \pi$ 矛盾, 所以 $0 <$

$\tan A < 2$, 又 $\tan A$ 为整数, 所以 $\tan A = 1$, 即 $A = \frac{\pi}{4}$.

(2) 因为 $\tan(\angle ABC + C) = \tan(\pi - A) = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, 所以

$$\frac{\tan \angle ABC + \tan C}{1 - \tan \angle ABC \cdot \tan C} = -1, \text{ 即 } \tan \angle ABC + \tan C = \tan \angle ABC \cdot \tan C - 1,$$

设 $x = \tan \angle ABC, y = \tan C, x \geq 2, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 由 $x + y = xy - 1$,

可得 $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, 由于 $x \geq 2, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 故

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y=3 \end{cases} \quad (\text{提示: 满足条件的 } x-1 \text{ 只能取 } 1), \text{ 即 } \begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\tan \angle ABC = 2, \tan C = 3, \text{ 所以 } \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos C = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{b}{\sin \angle ABC} = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{所以 } AC = b = 2\sqrt{5} \sin \angle ABC = 2\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 4, CD = \frac{1}{2} AC = 2. \text{ 在}$$

$$\triangle BCD \text{ 中, 由余弦定理得 } BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C =$$

$$(\sqrt{10})^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = 10, \text{ 所以 } BD = \sqrt{10}.$$

快解 (1) A 最小, 且 $\tan A$ 为整数, 可依据三角形内角和限制 A 的范围, 从而得到 A 的值. 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a < b < c$, 所以 $A < B < C$, 又 $A + B + C = \pi$, 所以 $3A < A + B + C = \pi$, 所以 $0 < A < \frac{\pi}{3}$. 因为 $y = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 所以 $0 <$

$$\tan A < \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \text{ 又 } \tan A \text{ 为整数, 所以 } \tan A = 1, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{4}.$$

(2) 已知 $A = \frac{\pi}{4}$, $\tan \angle ABC, \tan C$ 为整数, $a < b < c$, 所以可利用三角恒等变换求出 $\tan \angle ABC, \tan C$ 的值, 再用解三角形的知识求 BD . 因为 $\tan(\angle ABC + C) = \tan(\pi - A) = \tan \frac{3\pi}{4} =$

$$-1, \text{ 所以 } \frac{\tan \angle ABC + \tan C}{1 - \tan \angle ABC \cdot \tan C} = -1, \text{ 即 } \tan \angle ABC + \tan C =$$

$$\tan \angle ABC \cdot \tan C - 1, \text{ 可化为 } (\tan \angle ABC - 1)(\tan C - 1) = 2,$$

$$\text{又 } \tan \angle ABC \geq 2, \tan \angle ABC \in \mathbf{Z}, \tan C \in \mathbf{Z}, b < c, \text{ 所以}$$

$$\tan \angle ABC - 1 = 1, \tan C - 1 = 2, \text{ 即 } \tan \angle ABC = 2, \tan C = 3,$$

$$\text{所以 } \sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos C = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

下同正解.



12. 【解】(1) 选择条件①, 由 $\sqrt{3}a \sin \frac{A+B}{2} = c \sin A$, 可得 $\sqrt{3} \sin A \cdot$

$$\cos \frac{C}{2} = \sin C \sin A, \text{ 因为 } \sin A \neq 0, \text{ 所以 } \sqrt{3} \cos \frac{C}{2} = \sin C =$$

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ 因为 } \frac{C}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \sin \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, C = \frac{2\pi}{3}.$$

选择条件③, 由 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{c^2}{ab}$ 知 $a^2 + b^2 - c^2 = -ab$, 故 $\cos C =$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2},$$

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.

不能选择条件②, 由 $a \cos B + b \cos A = \frac{c \sin C}{2}$, 可得 $\sin A \cos B +$

$$\sin B \cos A = \frac{\sin^2 C}{2}, \text{ 即 } \sin(A+B) = \frac{\sin^2 C}{2}, \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, } A+B+$$

$$C = \pi, \text{ 所以 } \sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C, \text{ 故 } \sin C = \frac{\sin^2 C}{2}, \text{ 又}$$

因为 $0 < C < \pi$, 所以 C 无解, 即条件②不合理 (另解: 易知 $c =$

$$a \cos B + b \cos A, \text{ 若选②, 则 } c = \frac{c \sin C}{2}, \text{ 又 } c \neq 0, \text{ 则 } \sin C = 2, \text{ 不}$$

成立, 故条件②不合理).

(2) (i) 由 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, CD 是 $\angle ACB$ 的平分线, 可得 $\frac{1}{2}a \cdot$

$$CD \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}b \cdot CD \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (提示: 三角形中遇到角}$$

平分线, 联想面积公式), 即 $(a+b) \cdot CD = ab$, 又由 $\frac{1}{a} +$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \text{ 知 } a+b = \frac{ab}{2}, \text{ 故 } CD = 2.$$

(ii) 设 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r . 由余弦定理得 $(4\sqrt{3})^2 =$

$$a^2 + b^2 - 2ab \times \left(-\frac{1}{2}\right), \text{ 即 } a^2 + b^2 + ab - 48 = 0, \text{ 所以 } (a+b)^2 - ab -$$

$$48 = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 - ab - 48 = 0. \text{ 因为 } ab > 0, \text{ 所以 } ab = 16, \text{ 即 } a+b = 8.$$

$$\text{又 } \frac{1}{2}ab \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r, \text{ 故 } r = 4\sqrt{3} - 6.$$

13. 【解】(1) 因为 $f(0) = 2 \sin \varphi = 1$, 所以 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 因为 $|\varphi| <$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{当 } \omega = 1 \text{ 时, } f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{因为 } f(x_0) = 2 \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{5}, \text{ 所以 } \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}.$$

$$\text{令 } x_0 + \frac{\pi}{6} = t, \text{ 则 } \sin t = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } \sin\left(2x_0 + \frac{5\pi}{6}\right) =$$



$$\sin \left[2 \left(t - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{5\pi}{6} \right] = \sin \left(2t + \frac{\pi}{2} \right) = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = \frac{7}{25},$$

$$\text{所以 } f \left(2x_0 + \frac{2\pi}{3} \right) = 2\sin \left(2x_0 + \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{14}{25}.$$

(2) 对于①: 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \pi\omega + \frac{\pi}{6} \right)$,

则 $\frac{\pi}{2} < \pi\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}$ (提示: 给定区间为开区间, 所以左侧不

取等号, 右侧取等号), 解得 $\frac{1}{3} < \omega \leq \frac{4}{3}$.

对于②: 因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$,

则 $4\pi < \frac{\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{6} \leq 5\pi$, 解得 $\frac{23}{3} < \omega \leq \frac{29}{3}$.

对于③: 因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{6} \right)$, 则

$$\begin{cases} -\frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi\omega}{4} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{解得 } 0 < \omega \leq \frac{4}{3}.$$

因为②与①, ③中 ω 取值范围的交集都为空集, 所以选①和

③. 由 $\begin{cases} \frac{1}{3} < \omega \leq \frac{4}{3}, \\ 0 < \omega \leq \frac{4}{3}, \end{cases}$ 得 $\frac{1}{3} < \omega \leq \frac{4}{3}$, 即 ω 的取值范围是

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right].$$