



全书综合训练

1. C 必刷知识 ⊙ 向量垂直、投影数量

【解析】设 $\langle a, b \rangle = \theta$, 因为 $(2a+b) \perp b$, 所以 $(2a+b) \cdot b = 2a \cdot$

$b + b^2 = 2 \times 2 \times \sqrt{3} \cos \theta + 3 = 0$, 解得 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, 所以 b 在 a 上的

投影数量为 $|b| \cos \theta = \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{3}{4}$, 故选 C.

2. C 必刷考点 ⊙ 正弦定理、余弦定理

【解析】由于 $\sin^2 A \leq \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C$, 根据正弦定理可

知 $a^2 \leq b^2 + c^2 - bc$, 故 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \geq \frac{1}{2}$.

又 $A \in (0, \pi)$, 则 A 的取值范围为 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$. 故选 C.

3. D 必刷题型 ⊙ 由函数图象确定解析式

【解析】由题图知, 该函数的周期 T 满足 $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$, 则 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 将点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 代

入, 可得 $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 由题图知, 该函数在 $x = \frac{\pi}{6}$ 附近单调

递减, 故 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故

关键点

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\omega x + \varphi) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

4. B 必刷考点 ⊙ 平面向量的数量积

【解析】 $\because N$ 是边 BC 的中点, 可得 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

$\because M$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心,

$$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAM = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8,$$

$$\text{同理可得 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|^2 = 18,$$

$$\therefore \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

$$\frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 18 = 13. \text{ 故选 B.}$$

5. D 必刷考点 ⊙ 余弦型函数的性质

【解析】函数 $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) =$

$\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 所以 A 不正确.

令 $t = 2x - \frac{\pi}{4}$, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$, 因为 $t =$



$2x - \frac{\pi}{4}$ 是增函数, 且 $y = \cos t$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减, 所以函数

$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 上单调递减, 所以 **B** 不正确.

易知当 $2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时, $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 取得最大值, 最大值为 1, 所以 **C** 不正确.

因为 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称, 所以 **D** 正确. 故选 **D**.

6. C 必刷考点 ⊙ 正弦定理、三角形面积公式

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $C = \frac{\pi}{4}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}c^2$, 可得 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{2}}{4}c^2$, 即 $\frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}c^2$, 所以 $ab = c^2$.

由正弦定理化边为角, 得 $\sin A \sin B = \sin^2 C = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$.

7. D 必刷题型 ⊙ 三角函数单调性与 ω 的结合

【解析】由题意可得函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq 2 \times (2 - 0) = 4$, 所以 $0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$.

若 $f(2) = f(4)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 3$ 对称, 则

$$3\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi (n \in \mathbf{Z}).$$

函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上单调递减, 则 $\omega \times 0 + \varphi \geq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 且

$$2\omega + \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{则 } -3\omega + \frac{\pi}{2} + n\pi \geq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ 且 } -\omega + \frac{\pi}{2} + n\pi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k, n \in$$

$$\mathbf{Z}), \text{ 即 } -\pi + (n - 2k)\pi \leq \omega \leq \frac{(n - 2k)\pi}{3} (k, n \in \mathbf{Z}).$$

又 $0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$, 则取 $n - 2k = 1$, 解得 $0 < \omega \leq \frac{\pi}{3}$, 则实数 ω 的取值

范围为 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$. 故选 **D**.

8. A 必刷题型 ⊙ 解三角形问题中的取值范围问题

【解析】由 $a^2 - a + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - a\right) \cos 4B$ 可得 $a^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right) (-1 + \cos 4B) = \left(\frac{1}{2} - a\right) (-1 + 1 - 2\sin^2 2B) = -2\left(\frac{1}{2} - a\right) \sin^2 2B$,

因此 $a^2 - 2\sin^2 2B \cdot a + \sin^2 2B = 0$, 由于 $\Delta = 4\sin^4 2B - 4\sin^2 2B = 4\sin^2 2B(\sin^2 2B - 1) \geq 0$ (提示: 将 a 看作变量, 方程必有解),

故 $\sin^2 2B - 1 \geq 0$, 即 $\sin^2 2B \geq 1$, 又 $\sin^2 2B \leq 1$, 故 $\sin^2 2B = 1$, 结

关键点

合 B 为锐角, 则 $2B \in (0, \pi)$, 故 $\sin 2B = 1$, 且 $B = \frac{\pi}{4}$, 此时 $a =$

1. 因此 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ 且 $0 < C = \frac{3\pi}{4} - A < \frac{\pi}{2}$, 故 $\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2}$,



又 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin A}$, 则 $b^2 = \frac{1}{2 \sin^2 A}$, 故 $a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{2 \sin^2 A}$, 由于 $\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin A < 1$, $\frac{1}{2} < \sin^2 A < 1$, 故 $a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{2 \sin^2 A} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. 故选 A.

9. AC 必刷考点 ⊙ 正、余弦定理与三角形面积公式

【解析】由余弦定理可得 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C = ab \sin C$, 解得 $\tan C = 2$, 故 A 正确.

因为在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = \pi - C$, 所以由 $a \cos B + b \sin A = c$ 及正弦定理, 可得 $\sin A \cos B + \sin B \sin A = \sin C = \sin(A + B)$,

化简可得 $\sin B \sin A = \cos A \sin B$. 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin A = \cos A$, 即 $\tan A = 1$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$ (另解: 由射影定理得 $a \cos B + b \cos A = c$, 结合 $a \cos B + b \sin A = c$ 可知 $\sin A = \cos A$, 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$), 故 B 错误.

因为 $\tan C = 2$, 所以 $\cos C > 0$ 且 $\sin C = 2 \cos C$, 代入 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, 可得 $5 \cos^2 C = 1$, 解得 $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为 $a = 2\sqrt{10}$, $A = \frac{\pi}{4}$, $\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以由正弦定理可得 $c =$

$$\frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2\sqrt{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8.$$

由 $a^2 + b^2 - c^2 = ab \sin C$, 可得 $(2\sqrt{10})^2 + b^2 - 8^2 = 2\sqrt{10}b \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

化简可得 $b^2 - 4\sqrt{2}b - 24 = 0$, 解得 $b = 6\sqrt{2}$ 或 $b = -2\sqrt{2}$ (舍), 故 C 正确.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24$, 故 D 错误. 故选 AC.

10. BD 必刷题型 ⊙ 三角函数性质的综合应用

【解析】 $f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| = f(x)$, 因此, $f(x)$ 是偶函数, 同理可判断 $g(x)$ 也为偶函数.

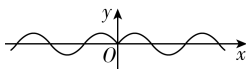
对于 A, 当 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = 2\cos x > 2\sin x$,

所以此时 $f(x) < g(x)$, 又因为 $f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数,

所以当 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) < g(x)$, 故 A 错误.

对于 B, $f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数, 故 B 正确.

对于 C, $y = \sin|x|$ 的图象如图所示, 易知其不是周期函数, 又 $y = |\sin x|$ 为周期函数, 周期为 π , 故 $f(x)$ 不是周期函数, 而 $g(x) = \cos|x| + |\cos x| = \cos x + |\cos x|$, 由于 $y = \cos x$, $y = |\cos x|$ 均为周期函数, 所以 $g(x)$ 为周期函数, 因此两者周期性不同, 故 C 错误.



对于 D, $0 \leq \sin|x| + |\sin x| \leq 1 + 1 = 2$, 当且仅当 $\sin|x| = 1$ 且 $|\sin x| = 1$ 时, $f(x) = 2$ 成立, 当且仅当 $2k\pi + \pi \leq |x| \leq 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbf{N}$ 时, $f(x) = 0$ 成立.

$0 \leq \cos|x| + |\cos x| \leq 1 + 1 = 2$, 当且仅当 $\cos|x| = 1$ 且 $|\cos x| = 1$ 时, $g(x) = 2$ 成立, 当且仅当 $2k_1\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k_1\pi + \frac{3}{2}\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$ 时, $g(x) = 0$ 成立, 故 D 正确.

11. BCD 必刷考点 ④ 平面向量的坐标运算、模长的计算、投影向量

【解析】选项 A: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (\cos x + \cos 2x, \sin x + \sin 2x)$,

所以 $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(\cos x + \cos 2x)^2 + (\sin x + \sin 2x)^2}$
 $= \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x \cos 2x + \cos^2 2x + \sin^2 x + 2\sin x \sin 2x + \sin^2 2x}$
 $= \sqrt{(\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 2x + \sin^2 2x) + 2(\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x)}$
 $= \sqrt{1 + 1 + 2\cos(x - 2x)} = \sqrt{2 + 2\cos x}$, 因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\cos x \in [0, 1]$, 则 $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2 + 2\cos x} \in [\sqrt{2}, 2]$, 所以 $|\overrightarrow{OB}|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$, A 错误.

选项 B: 因为 $\overrightarrow{OA} = (\cos x, \sin x), \overrightarrow{AB} = (\cos 2x, \sin 2x)$, 所以

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\cos^2 2x + \sin^2 2x} = 1$,
 又 $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2 + 2\cos x}$, 所以 $\triangle OAB$ 的周长为 $|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{OB}| = 2 + \sqrt{2 + 2\cos x}$, 因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x = 0$, 此时周长取得最小值, 最小值为 $2 + \sqrt{2}$, B 正确.

选项 C: $\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$
 $= \frac{\cos x(\cos x + \cos 2x) + \sin x(\sin x + \sin 2x)}{1 \times \sqrt{2 + 2\cos x}}$
 $= \frac{\cos^2 x + \cos x \cos 2x + \sin^2 x + \sin x \sin 2x}{\sqrt{2 + 2\cos x}}$
 $= \frac{1 + \cos(x - 2x)}{\sqrt{2 + 2\cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{2 + 2\cos x}} = \frac{\sqrt{2 + 2\cos x}}{2},$

所以 $\sin \angle AOB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2 + 2\cos x}}{2}\right)^2} =$
 $\sqrt{1 - \frac{2 + 2\cos x}{4}} = \sqrt{\frac{2 - 2\cos x}{4}} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos x}}{2},$

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin \angle AOB$
 $= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2 + 2\cos x} \times \frac{\sqrt{2 - 2\cos x}}{2}$
 $= \frac{1}{4} \sqrt{(2 + 2\cos x)(2 - 2\cos x)}$
 $= \frac{1}{4} \sqrt{4 - 4\cos^2 x} = \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 x}$, 因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以当 $x =$



$\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x = 1$, 此时 $S_{\triangle OAB}$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$, C 正确.

选项 D: $\vec{OA}$ 在 $\vec{OB}$ 上的投影向量的模为 $\frac{|\vec{OA} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{OB}|} =$

$$\left| \frac{\cos x(\cos x + \cos 2x) + \sin x(\sin x + \sin 2x)}{\sqrt{2+2\cos x}} \right| = \left| \frac{1+\cos x}{\sqrt{2+2\cos x}} \right| =$$

$\frac{\sqrt{2+2\cos x}}{2}$, 因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x = 0$, 此

时 $\vec{OA}$ 在 $\vec{OB}$ 上的投影向量的模取得最小值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, D 正确. 故

选 BCD.

12. $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{8}$ 必刷题型 ⊙ 三角恒等变换求值

【解析】由 $2\cos 2\alpha - \cos \alpha = 1$ 得 $4\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 3 = 0$, 解得

$$\cos \alpha = -\frac{3}{4} \text{ 或 } \cos \alpha = 1,$$

又 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, 则 $\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{7}}{4}$,

$$\text{所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{8}.$$

13. 1 必刷考点 ⊙ 正、余弦定理的应用

【解析】由 $c = (a+2b) \cos B$ 及正弦定理得 $\sin C = \sin A \cos B +$

$2\sin B \cos B$, 又 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 所

以 $\cos A \sin B = 2\sin B \cos B$, 因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A =$

$2\cos B$. 由余弦定理知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos B$, 即 $b^2 - c^2 = a^2 -$

$2accos B$, 即 $2 = 4 - 4ccos B$, 所以 $c \cdot \cos B = \frac{1}{2}$, 所以

$$c \cdot \cos A = c \times 2\cos B = 1.$$

14. [0, 3] 必刷考点 ⊙ 平面向量的模的几何意义、平面向量的坐标运算

【解析】如图所示, 以 A 为坐标原点, 边长为 2 的正方形

ABCD 的边 AB, AD 所在直线分别为 x 轴和 y 轴, 建立平面直

角坐标系. 设 $\vec{AD} = \mathbf{a}$, $\vec{AB} = \mathbf{b}$, Q 为线段 BC 上一点 (含端点),

则 $\vec{AQ} = \mathbf{c}$, 设 $\vec{AP} = \mathbf{d}$, 因为 $|\mathbf{c} - \mathbf{d}| = \sqrt{2}$, 所以点 P 为以 Q 为圆

心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆上的一点.

$$\vec{AB} = (2, 0), \vec{AD} = (0, 2), \text{ 设 } P(x, y), \text{ 则 } \vec{AP} = m\vec{AD} + n\vec{AB} =$$

$$(2n, 2m), \text{ 所以 } x = 2n, y = 2m, \text{ 设 } z = m + n = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \text{ 所以}$$

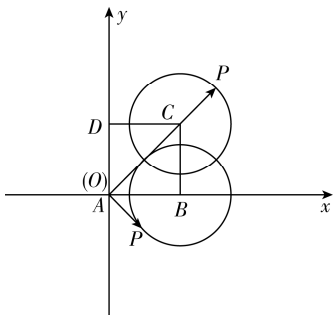
$y = -x + 2z$, 且直线 $y = -x + 2z$ 表示斜率为 -1, 纵截距为 2z 的直线.

由图可知, 当圆心为点 B, AP 与 $\odot B$ 相切且点 P 在 x 轴的下方时, 可知圆 B 的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 2$, 切点坐标为 P(1,

-1), 此时 $z = m + n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, 取得最小值;



当圆心为点 C , AP 经过圆心时, 可知圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$, 当点 P 的坐标为 $(3, 3)$ 时, $z = m + n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$, 取得最大值, 所以 $m + n$ 的取值范围为 $[0, 3]$.



15. 必刷考点 ①平面向量的数量积运算、三角函数图象的平移变换、三角恒等变换求值

【解】(1) $f(x) = \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x - \sqrt{3} \cdot$

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 则得到的函数

图象对应的解析式为 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 则得到的函数图象对应的解析式为

$$g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 由题意得 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, 所以

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}. \because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \alpha - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{13}}{4},$$

$$\cos \alpha = \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{3} -$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{13}}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{13} - 3}{8}.$$

16. 必刷考点 ②辅助角公式、正弦函数的图象与性质、三角形的角平分线、余弦定理

【解】(1) $f(x) = \sin^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2} \cos 2\omega x$$

$$= \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) \quad (\omega > 0),$$



当 $\omega = 1$ 时, $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

又 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, 又 $y = \sin t$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减, 且 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 故函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的值域为 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$.

(2) 由(1)知, $f(x) = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$, 由其最小正周期为 2π , 可得

得 $T = \frac{2\pi}{|2\omega|} = 2\pi$. 又 $\omega > 0$, 解得 $\omega = \frac{1}{2}$, 则 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

由 $A \in (0, \pi)$, 可得 $\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$. 又 $f\left(\frac{A}{2}\right) = 0$, 即 $\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, 则 $\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} = 0$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$.

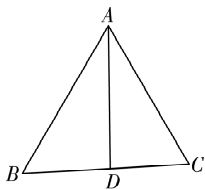
如图, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 故可得 $\angle BAD = \frac{\pi}{6}$, $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 则 $\frac{1}{2}bc \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$ (提示: 处理三角形的角平分线问题, 优先考虑等

面积法), 即 $\frac{\sqrt{3}}{4}bc = \frac{1}{4} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}(b+c)$, 整理得 $b+c = \frac{3}{2}bc$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \angle BAC = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 即 $\frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-3}{2bc} = \frac{(b+c)^2-2bc-3}{2bc}$,

将 $b+c = \frac{3}{2}bc$ 代入上式可得 $bc = \frac{9}{4}(bc)^2 - 2bc - 3$, 即 $(3bc+2)(3bc-6) = 0$, 解得 $bc = 2$ (负值舍去).

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



17. 必刷题型 ⊙ 与空间向量有关的新定义题型

(1) ①【解】因为 $A(1, 2, 1)$, $B(0, -1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (0, -1, 1)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{0} + (-1)\mathbf{k} - \mathbf{0} - \mathbf{j} - (-1)\mathbf{i} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = (3, -1, -1).$$

②【证明】设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$,



$$\text{则 } \vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 \mathbf{i} + z_1 x_2 \mathbf{j} + x_1 y_2 \mathbf{k} - x_2 y_1 \mathbf{k} - z_2 x_1 \mathbf{j} - y_2 z_1 \mathbf{i}$$

$$y_2 z_1 \mathbf{i} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

将 x_2 与 x_1 互换, y_2 与 y_1 互换, z_2 与 z_1 互换,

突破点

$$\text{可得 } \vec{OB} \times \vec{OA} = (y_2 z_1 - y_1 z_2, z_2 x_1 - z_1 x_2, x_2 y_1 - x_1 y_2),$$

$$\text{故 } \vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OA} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

$$(2) \text{ 【证明】 因为 } \sin \angle AOB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{(\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2}} = \frac{\sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|},$$

$$\text{故 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \angle AOB = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}.$$

$$\text{故要证 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}|,$$

$$\text{只需证 } |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2},$$

$$\text{即证 } |\vec{OA} \times \vec{OB}|^2 = |\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2.$$

$$\text{由 (1) ② 知 } \vec{OA} = (x_1, y_1, z_1), \vec{OB} = (x_2, y_2, z_2), \vec{OA} \times \vec{OB} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } |\vec{OA} \times \vec{OB}|^2 &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = \\ &= y_1^2 z_2^2 + y_2^2 z_1^2 + z_1^2 x_2^2 + z_2^2 x_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - 2y_1 z_2 y_2 z_1 - 2z_1 x_2 z_2 x_1 - \\ &= 2x_1 y_2 x_2 y_1. \end{aligned}$$

$$\text{又 } |\vec{OA}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, |\vec{OB}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } |\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - \\ &= (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 = y_1^2 z_2^2 + y_2^2 z_1^2 + z_1^2 x_2^2 + z_2^2 x_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - \\ &= 2y_1 z_2 y_2 z_1 - 2z_1 x_2 z_2 x_1 - 2x_1 y_2 x_2 y_1, \end{aligned}$$

$$\text{则 } |\vec{OA} \times \vec{OB}|^2 = |\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2 \text{ 成立,}$$

$$\text{故 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}|.$$

$$(3) \text{ 【证明】 由 (2) } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| \text{ 得 } (\vec{OA} \times \vec{OB})^2 = |\vec{OA} \times$$

$$\vec{OB}|^2 = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| \cdot 2 |\vec{OA} \times \vec{OB}| = S_{\triangle AOB} \cdot 2 |\vec{OA} \times \vec{OB}|,$$

$$\text{故 } (\vec{OA} \times \vec{OB})^2 = \frac{1}{3} S_{\triangle AOB} \cdot |\vec{OA} \times \vec{OB}| \times 6,$$

故 $(\vec{OA} \times \vec{OB})^2$ 的几何意义为以 $\triangle AOB$ 为底面, $|\vec{OA} \times \vec{OB}|$ 为高的三棱锥体积的 6 倍.