



思维素养专练

1. **A** 【解析】因为集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 所以 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 又因为 $U = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以 $\complement_U(A \cup B) = \{7, 8\}$.

2. **D** 【解析】 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$, 则 $f'(1) = 0$, 而 $f(1) = -1$, 所以曲线 $f(x) = \ln x - x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 1 = 0 \times (x - 1)$, 即 $y + 1 = 0$.

3. **C** 【解析】当 $a = 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 不符合题意;

当 $a < 0$ 时, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{a}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 则 $f(x) = \sqrt{x} +$

$\frac{a}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}}$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, a)$ 上

单调递减(提示:“对勾函数”的性质), 由函数 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递减知 $a \geq 2$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

4. **(0, 1)** 【解析】令函数 $g(x) = 2^x - a - (-x + 6 - a) = 2^x + x - 6$, 易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $\therefore g(2) = 0$, $\therefore$ 当 $x < 2$ 时, $2^x - a < -x + 6 - a$, 当 $x \geq 2$ 时, $2^x - a \geq -x + 6 - a$,

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 2, \\ -x + 6 - a, & x \geq 2, \end{cases} \quad f(x) + ax = \begin{cases} 2^x + ax - a, & x < 2, \\ -x + 6 + ax - a, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$\text{令 } h(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 2, \\ -x + 6, & x \geq 2, \end{cases} \quad \text{由 } f(x) + ax = 0, \text{ 得 } h(x) = -a(x - 1),$$

$\therefore$ 函数 $y = f(x) + ax$ 的零点为函数 $y = h(x)$ 的图象与直线 $y =$

关键点

$-a(x - 1)$ 交点的横坐标, 易知直线 $y = -a(x - 1)$ 恒过点 $(1, 0)$, 当 $x = 2$ 时, $h(2) = 4$,

在平面直角坐标系内作出直线 $y = -a(x - 1)$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象(提示: 已知直线过定点时, 可旋转直线结合图象变化判断交点情况).

如图①, 当 $0 \leq -a < 4$, 即 $-4 < a \leq 0$ 时, 直线 $y = -a(x - 1)$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象只有一个交点.

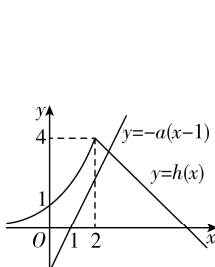
如图②, 当 $-a = 4$, 即 $a = -4$ 时, 直线 $y = 4(x - 1)$ 过点 $(1, 0)$, $(2, 4)$, 故直线 $y = 4(x - 1)$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象只有一个交点.

如图③, 当 $-a > 4$, 即 $a < -4$ 时, 直线 $y = -a(x - 1)$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象只有一个交点.

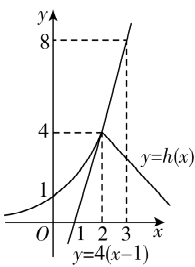
如图④, 当 $-a \leq -1$, 即 $a \geq 1$ 时, 直线 $y = -a(x - 1)$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象只有一个交点.

如图⑤, 当 $-1 < -a < 0$, 即 $0 < a < 1$ 时, 直线 $y = -a(x - 1)$ 与函数 $y = h(x)$ 的图象有两个交点.

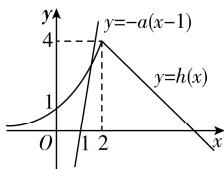
综上, 若函数 $y = f(x) + ax$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$.



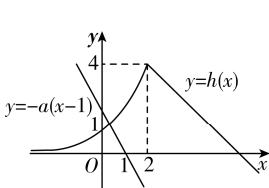
图①



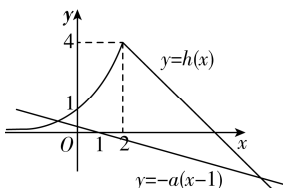
图②



图③



图④



图⑤

5. B 【解析】易知 $\sum_{n=k}^{19} P(n) = \frac{\log_3 8 - \log_3 2}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{\log_3 4}{\log_3 10} = \lg 4$ (提示: 换底公式的应用),

由 $P(n) = \lg \frac{n+1}{n}$, 可得 $\sum_{n=k}^{19} P(n) = \lg \frac{k+1}{k} + \lg \frac{k+2}{k+1} + \cdots + \lg \frac{20}{19} = \lg \left(\frac{k+1}{k} \times \frac{k+2}{k+1} \times \cdots \times \frac{20}{19} \right) = \lg \frac{20}{k}$, 所以 $\lg \frac{20}{k} = \lg 4$, 解得 $k=5$. 故选 B.

6. B 【解析】对于①: 令 $a = \frac{K-N_0}{N_0}$ ($a > 0$), 则 $f(t) =$

$$\frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0} \right) e^{-rt}} = \frac{K}{1 + ae^{-rt}},$$

$$\text{所以 } f'(t) = \frac{Krae^{-rt}}{(1+ae^{-rt})^2} = \frac{Krae^{-rt}}{a^2 e^{-2rt} + 2ae^{-rt} + 1} = \frac{Kr}{ae^{-rt} + 2 + \frac{1}{ae^{-rt}}} \leq$$

$$\frac{Kr}{2\sqrt{ae^{-rt} \cdot \frac{1}{ae^{-rt}}} + 2} = \frac{Kr}{4},$$

当且仅当 $ae^{-rt} = \frac{1}{ae^{-rt}}$, 即 $ae^{-rt} = 1$, 即 $\frac{K-N_0}{N_0} e^{-rt} = 1$, 即 $t = \frac{1}{r} \ln \frac{K-N_0}{N_0}$ 时取等号, 即 $f'(t)$ 有最大值, 故①正确;

对于②: 令 $t_4 = \frac{1}{r} \ln \frac{K-N_0}{N_0}$ (提示: 结合对①的分析赋值), 则

$$\frac{K-N_0}{N_0} e^{-rt_4} = 1, f(t_4) = \frac{K}{2},$$

$$\text{所以 } f(t) + f(2t_4 - t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0} \right) e^{-rt}} + \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0} \right) e^{-r(2t_4-t)}} =$$

$$\frac{K}{1 + e^{\frac{rt_4}{N_0}} e^{-rt}} + \frac{K}{1 + e^{\frac{rt_4}{N_0}} e^{-r(2t_4-t)}} = \frac{K}{1 + e^{\frac{r(t-t_4)}{N_0}}} + \frac{K}{1 + e^{\frac{r(t-t_4)}{N_0}}} = K \left(\frac{e^{\frac{r(t-t_4)}{N_0}}}{1 + e^{\frac{r(t-t_4)}{N_0}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{r(t-t_4)}{N_0}}} \right) = K = 2f(t_4),$$

所以函数 $f(t)$ 在区间 $(0, 2t_4)$ 上的图象关于 $(t_4, f(t_4))$ 中心对称, 故②正确;

对于③: $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ 表示点 $(t_1, f(t_1))$ 与点 $(t_2, f(t_2))$ 连线所

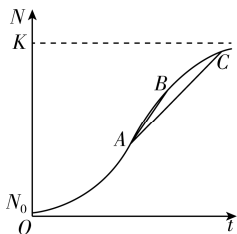


在直线的斜率,

$\frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$ 表示点 $(t_1, f(t_1))$ 与点 $(t_3, f(t_3))$ 连线所在直线的斜率,

不妨令 $A(t_1, f(t_1)), B(t_2, f(t_2)), C(t_3, f(t_3))$, 取如图所示的三点 $A(t_1, f(t_1)), B(t_2, f(t_2)), C(t_3, f(t_3))$, 显然 $k_{AB} >$

k_{AC} , 即 $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} > \frac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$, 故③错误.



7. C 【解析】函数 $f(x) = (x+1)(x^2+ax+b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$,

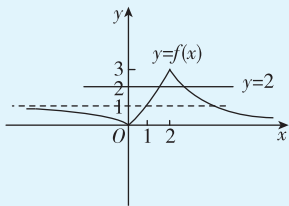
则 $f(2-x) = -x^3 + (a+7)x^2 - (5a+b+16)x + 6a+3b+12$, 由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称得 $f(2-x) + f(x) = 0$ 恒成立, 即 $(2a+8)x^2 - (4a+16)x + 6a+4b+12 = 0$ 恒成立,

$$\text{因此} \begin{cases} 2a+8=0, \\ 4a+16=0, \\ 6a+4b+12=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-4, \\ b=3, \end{cases} \text{所以 } a+2b=2.$$

快解 函数 $f(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度得到函数 $g(x) = f(x+1)$ 的图象, 则 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 所以函数 $g(x) = f(x+1)$ 为奇函数, 我们可以利用奇函数的性质求参数值. 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度所得图象对应的函数 $g(x) = f(x+1) = (x+2)[(x+1)^2 + a(x+1) + b] = (x+2)[x^2 + (a+2)x + 1+a+b]$ 为奇函数, 由 $g(0) = 0$ 得 $1+a+b=0$ ①. 由 $g(2) = g(-2)$ 得 $3a+b+9=0$ ② (提示: 本题中 $g(-2)=0$, 所以取 $g(2)=g(-2)$ 计算更简单), 联立①②, 解得 $a=-4, b=3$, 经验证, 当 $a=-4, b=3$ 时满足题意, 则 $a+2b=2$.

8. B 【解析】当 $x < 2$ 时, 由 $f(x) = |2^x - 1| = 2$, 可得 $2^x - 1 = 2$ 或 $2^x - 1 = -2$, 由 $2^x - 1 = 2$, 解得 $x = \log_2 3 < 2$, 符合题意, 由 $2^x - 1 = -2$, 可得 $2^x = -1$, 无实数解, 舍去. 当 $x \geq 2$ 时, 由 $f(x) = \frac{3}{x-1} = 2$, 解得 $x = \frac{5}{2} \geq 2$, 符合题意. 综上, 方程 $f(x) = 2$ 有 2 个实数根.

快解 本题要求方程的根的个数, 画图象判断更简单. 作出函数 $f(x)$ 的图象和直线 $y=2$, 如图所示, 由图易知函数 $f(x)$ 的图象和直线 $y=2$ 有 2 个交点, 所以方程 $f(x) = 2$ 有 2 个实数根.



9. B 【解析】设 $x-1=t, g(t) = e^t - e^{-t} - 2t$, 则 $g'(t) = e^t + e^{-t} - 2 \geq$



$2\sqrt{e^t \cdot e^{-t}} - 2 = 0$, 当且仅当 $t = 0$ 时取等号, 所以函数 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $g(-t) = e^{-t} - e^t + 2t = -g(t)$, 所以 $g(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

因为 $f(x) = g(x-1) - 2$, 所以 $f(2x-1) = g(2x-2) - 2$, 所以原不等式可化为 $g(x-1) + g(2x-2) \leq 0$, 即 $g(x-1) \leq g(2-2x)$, 又因为 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $x-1 \leq 2-2x$, 解得 $x \leq 1$.

快解 设 $x-1=t$, $g(t) = e^t - e^{-t} - 2t$, 则 $g'(t) = e^t + e^{-t} - 2 \geq 2\sqrt{e^t \cdot e^{-t}} - 2 = 0$, 当且仅当 $t=0$ 时取等号, 所以函数 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $g(-t) = e^{-t} - e^t + 2t = -g(t)$, 所以 $g(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

因为 $f(x) = g(x-1) - 2$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, -2)$ 对称, 则 $f(x) + f(2-x) = -4$, 所以原不等式可化为 $f(2x-1) \leq f(2-x)$, 又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $2x-1 \leq 2-x$, 解得 $x \leq 1$.

- 10. B** 【解析】因为 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(x+1) = -f(-x+1)$, 即 $f(x) = -f(2-x)$, 所以 $f(1) = -f(1)$, 即 $f(1) = 0$. 因为 $g(x) = f(x) - x$, 所以 $g(2-x) = f(2-x) - (2-x)$, 则 $g(x) + g(2-x) = f(x) + f(2-x) - 2 = -2$. 又 $g(x+2)$ 是偶函数, 所以 $g(x+2) = g(-x+2)$, 所以 $g(x) + g(x+2) = -2$, $g(x+2) + g(x+4) = -2$, 所以 $g(x+4) = g(x)$, 所以 $g(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 又 $g(1) = f(1) - 1 = -1$, 所以 $g(2\ 025) = g(1) = -1$, 所以 $f(2\ 025) = g(2\ 025) + 2\ 025 = 2\ 024$.

快解 $f(x+1)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的图象是中心对称图形, 可类比奇函数; $g(x+2)$ 是偶函数, 则 $g(x)$ 的函数图象是轴对称图形, 可类比偶函数; $f(x) - g(x) = x$, 可类比奇函数 - 偶函数 = 奇函数, 一般情况下, 奇函数 - 偶函数 = 非奇非偶函数, 所以想到应存在某种“特殊情况”. 由 $g(x+2)$ 是偶函数, 不妨取 $g(x)$ 为常数函数, 设 $g(x) = c (c \in \mathbf{R})$, 则 $f(x) = x + c$. 又因为 $f(x+1)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 所以 $f(0+1) = 0+1+c = 0$, 解得 $c = -1$, 则 $f(x) = x-1$, 经检验, 此情况符合题意, 故 $f(2\ 025) = 2\ 025 - 1 = 2\ 024$.

- 11. B** 【解析】因为 45 个正奇数的和不小于 $1+3+5+\cdots+(2 \times 45 - 1) = 2\ 025$, 结合 A 中有 50 个不同的正整数, 故 A 中偶数的个数一定超过 5.

分析: 结合选项, 超过 5 的最小数是 7, 可代入进行验证.

取 $A = \{1, 3, 5, \cdots, 2 \times 43 - 1, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 38\}$, 则 A 中共有 $43+7=50$ (个) 元素, 这 50 个元素的和为 $43^2 + 18 \times 6 + \frac{6 \times 5}{2} \times 2 + 38 = 1\ 849 + 108 + 30 + 38 = 2\ 025$, 故 $E(A)$ 的最小值为

7. 故选 B.

- 12. ABD** 【解析】对于 A, 若 $f(x)$ 是 $[m, n]$ 上的 L_a 函数, 则有 $f(x) \leq 2f(a)$, $x \in [m, n]$. 设 $g(x) = f(-x)$, 则 $g(-a) = f(a)$, 由 $x \in [-n, -m]$ 得 $-x \in [m, n]$, 则 $g(x) = f(-x) \leq 2f(a) = 2g(-a)$, $\therefore g(x)$ 为 $[-n, -m]$ 上的 L_{-a} 函数, 故 A 正确.

对于 B, 由题意得 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1} < 1$, $\therefore$ 对 $\forall a \geq \ln 3$,

$e^a + 1 \geq 4$, $\therefore f(a) = 1 - \frac{2}{e^a + 1} \geq \frac{1}{2}$, 即 $2f(a) \geq 1 > f(x)$,

$\therefore \forall a \geq \ln 3, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 L_a 函数, 故 B 正确.



对于 C, 当 $f(0) = 1$ 时, $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) \leq 1 < 2f(0)$ 恒成立, 即 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 L_0 函数, 故 C 错误.

对于 D, 由 $f(x) = (a-x)(x^2 - a^2x + b)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的 L_a 函数, 得 $f(x) = (a-x)(x^2 - a^2x + b) \leq 2f(a) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

当 $x \in (0, a)$ 时, $a-x > 0$, 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $a-x < 0$, 故当 $x \in (0, a)$ 时, $x^2 - a^2x + b \leq 0$, 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $x^2 - a^2x + b \geq 0$, 根据二次函数的性质可知, a 是函数 $y = x^2 - a^2x + b$ 的零点, 即 $a^2 - a^3 + b = 0$, 故 $b = a^3 - a^2$.

记 $h(a) = a^3 - a^2 (a > 0)$, 则 $h'(a) = 3a^2 - 2a$, 由 $h'(a) > 0$, 得 $a > \frac{2}{3}$, 由 $h'(a) < 0$, 得 $0 < a < \frac{2}{3}$, $\therefore h(a)$ 在 $(0, \frac{2}{3})$ 上单调递减, 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(a) \geq h(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$, 所以 $b \geq -\frac{4}{27}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

13. ABD 【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

对于 A, 因为 A, B 关于 x 轴对称, 所以 $B(x_1, -y_1)$, 由 $AB_n = (|x_1 - x_2|^n + |y_1 - y_2|^n)^{\frac{1}{n}}$, 可知 $AB_s = (|x_1 - x_2|^s + |y_1 - y_2|^s)^{\frac{1}{s}} = [|y_1 - (-y_1)|^s]^{\frac{1}{s}} = (|2y_1|^s)^{\frac{1}{s}} = |2y_1|$, 同理 $AB_t = (|x_1 - x_2|^t + |y_1 - y_2|^t)^{\frac{1}{t}} = [|y_1 - (-y_1)|^t]^{\frac{1}{t}} = (|2y_1|^t)^{\frac{1}{t}} = |2y_1|$, 即满足 $AB_s = AB_t$, 故 A 正确.

对于 B, 因为 A, B 关于直线 $y = x$ 对称, 所以 $B(y_1, x_1)$, 则 $AB_s = (|x_1 - x_2|^s + |y_1 - y_2|^s)^{\frac{1}{s}} = (2|x_1 - x_2|^s)^{\frac{1}{s}} = 2^{\frac{1}{s}} |x_1 - x_2|$, $AB_t = (|x_1 - x_2|^t + |y_1 - y_2|^t)^{\frac{1}{t}} = (2|x_1 - x_2|^t)^{\frac{1}{t}} = 2^{\frac{1}{t}} |x_1 - x_2|$, 因为 $s, t \in \mathbf{N}^*$, 且 $s < t$, 所以 $\frac{1}{s} > \frac{1}{t}$, 因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调

递增, 所以 $2^{\frac{1}{s}} > 2^{\frac{1}{t}}$, 则 $2^{\frac{1}{s}} |x_1 - x_2| \geq 2^{\frac{1}{t}} |x_1 - x_2|$, 即 $AB_s \geq AB_t$, 故 B 正确.

对于 C, 由题意得 $OA_s = (|x_1|^s + |y_1|^s)^{\frac{1}{s}}$, $OB_s = (|x_2|^s + |y_2|^s)^{\frac{1}{s}}$, 因为 $OA_s = 2OB_s$, 所以 $(|x_1|^s + |y_1|^s)^{\frac{1}{s}} = 2(|x_2|^s + |y_2|^s)^{\frac{1}{s}}$, 则 $|x_1|^s + |y_1|^s = 2^s(|x_2|^s + |y_2|^s) = |2x_2|^s + |2y_2|^s$, 令 $x_1 = 2, x_2 = 0, y_1 = 2, y_2 = 2^{\frac{1}{s}}$, 符合题意, 此时 $OA_t = (2^t + 2^t)^{\frac{1}{t}} = 2^{\frac{t+1}{t}} = 2^{1+\frac{1}{t}} = 2 \times 2^{\frac{1}{t}}$, 而 $OB_t = (|2^{\frac{1}{s}}|^t)^{\frac{1}{t}} = 2^{\frac{1}{s}}$, 则 $2OB_t = 2 \times 2^{\frac{1}{s}}$, 由已知得 $2^{\frac{1}{s}} > 2^{\frac{1}{t}}$, 则 $2OB_t > OA_t$, 故 C 错误.

对于 D, 设 $M(x, y) \in C$, 则 $AM_s = (|x - x_1|^s + |y - y_1|^s)^{\frac{1}{s}} \leq 1$, 则 $|x - x_1|^s + |y - y_1|^s \leq 1$, 由 $AM_t = (|x - x_1|^t + |y - y_1|^t)^{\frac{1}{t}} \leq 1$, 得到 $|x - x_1|^t + |y - y_1|^t \leq 1$, 则 $|x - x_1|, |y - y_1| \in [0, 1]$, 得到 $1 \geq |x - x_1|^s + |y - y_1|^s \geq |x - x_1|^t + |y - y_1|^t$, 则 $M(x, y) \in D$, 故 $C \subseteq D$, 故 D 正确. 故选 ABD.

14. (1) 【解】记 $A_1 = \{1, 6, 8\}, A_2 = \{2, 4, 9\}, A_3 = \{3, 5, 7\}$, 则 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 为集合 X 的一个 3 分隔 (答案不唯一).

(2) 【证明】取 $A_1 = \{9n+1 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\} \cup \{9n+9 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\} \cup \{9n+5 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\}$,



$$A_2 = \{9n+4 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\} \cup \{9n+3 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\} \cup \{9n+8 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\},$$

$$A_3 = \{9n+2 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\} \cup \{9n+7 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\} \cup \{9n+6 | n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 224\}.$$

经检验, $\{A_1, A_2, A_3\}$ 为集合 X 的一个 3 分隔.

(3)【解】先证明存在 k 分隔的充要条件, 然后判断 $\{1, 2, \dots, 2\,025\}$ 中有多少个数符合题意, 再应用古典概型概率计算公式计算即可.

要使 $X = \{1, 2, \dots, 3k\}$ 存在 k 分隔, 必有 $k \geq 2$.

一方面, 由 $S(A_1) = S(A_2) = \dots = S(A_k)$ 且 $\sum_{i=1}^k S(A_i) = \sum_{i=1}^{3k} i$

知 $S(A_1) = \frac{3(3k+1)}{2}$, 因为 $S(A_1)$ 为正整数, 所以 k 为奇数.

另一方面, 不妨设 $k = 2t+1$ ($t \geq 1$), 我们证明此时 $X = \{1, 2, \dots, 3k\}$ 存在 k 分隔.

设 $A_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ ($1 \leq i \leq k$), 则 $a_i + b_i + c_i = \frac{3(3k+1)}{2} = 9t+6$.

先取第一列, 令 $a_1 = 4t+3, a_2 = 4t+4, \dots, a_{2t+1} = 6t+3$, 为满足 $X = \{1, 2, \dots, 3k\}$ 存在 k 分隔, 则 $b_i, c_i \in \{1, 2, \dots, 4t+2\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2t+1$).

又 $b_i + c_i = 9t+6 - a_i$, 则得到一组等式,

$$1 + (3t+2) = 3t+3,$$

$$2 + (3t+3) = 3t+5,$$

$\dots,$

$$(t+1) + (4t+2) = 5t+3,$$

$$(t+2) + (2t+2) = 3t+4,$$

$$(t+3) + (2t+3) = 3t+6,$$

$\dots,$

$$(2t+1) + (3t+1) = 5t+2,$$

在这组等式中, 第一列是 $1, 2, \dots, 2t+1$ 的排列, 第二列是 $2t+2, 2t+3, \dots, 4t+2$ 的排列.

第三列中前 $t+1$ 行为 $3t+3, 3t+4, \dots, 5t+3$ 中的奇数项, 后 $t+1$ 行是 $3t+3, 3t+4, \dots, 5t+3$ 中的偶数项,

从而我们可以找到所需的 b_i, c_i ($1 \leq i \leq k$).

即取 $(b_1, c_1) = (t+1, 4t+2), (b_3, c_3) = (t, 4t+1), \dots, (b_{2t+1}, c_{2t+1}) = (1, 3t+2);$

$(b_2, c_2) = (2t+1, 3t+1), (b_4, c_4) = (2t, 3t), \dots, (b_{2t}, c_{2t}) = (t+2, 2t+2).$

这样构造出的 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 为集合 $X = \{1, 2, \dots, 3k\}$ 的 k 分隔.

综上, $X = \{1, 2, \dots, 3k\}$ 存在 k 分隔的充要条件为 k 为大于 1 的奇数, 而 $\{1, 2, \dots, 2\,025\}$ 中有 1 012 个数符合题意,

故集合 $X = \{1, 2, \dots, 3k\}$ 存在 k 分隔的概率为 $\frac{1\,012}{2\,025}$.

15. (1)【解】因为 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 I 上单调递增, 若 $f(x)$ 存在自映射区间 $[\mu, \lambda]$, 则 $f(\lambda) = \lambda$, $f(\mu) = \mu$, 即方程 $f(x) = x$ ($x \in [-10, 10]$) 至少有两个不同的实数解.

$f(x) = x$ ($x \in [-10, 10]$), 即 $\sin x = 0$ ($x \in [-10, 10]$) 的解集为 $\{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$, 所以自映射区间 $[\mu, \lambda]$ 的选择共有 C_7^2 种.



若 $d=\pi$, 共有 6 种选择, 所以区间的长度 $d>\pi$ 的概率为 $1-\frac{6}{C_7^2}=\frac{5}{7}$.

(2) ①【解】因为 $m>0$, $y=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 若 $g(x)$ 存在自映射区间 $[a, b]$, 则 $g(a)=a, g(b)=b$, 即 $h(x)=m\ln x-x$ 至少有两个零点, 因为 $h'(x)=\frac{m-x}{x}$, 当 $x\in(0, m)$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增, 当 $x\in(m, +\infty)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减.

当 $x\rightarrow 0^+$ 时, $h(x)<0$, 当 $x\rightarrow +\infty$ 时, $h(x)<0$, 若 $h(x)$ 存在两个零点, 则 $h(m)=m\ln m-m>0$, 即 $m>e$.

故 m 的取值范围为 $(e, +\infty)$.

②【证明】因为 $m\ln a-a=0, m\ln b-b=0$, 所以 $\frac{b-a}{\ln b-\ln a}=\frac{b+a}{\ln b+\ln a}=m$.

下面证: $\frac{a+b}{2}>\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$.

记 $l(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$ ($x>1$), 则 $l'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$, 则 $l(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $l(x)>l(1)=$

0, 即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$, 则 $\ln \frac{b}{a}>2\frac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1}$,

所以 $\frac{a+b}{2}>\frac{b-a}{\ln b-\ln a}=\frac{b+a}{\ln b+\ln a}$.

所以 $\ln a+\ln b=\ln(ab)>2$, 所以 $ab>e^2$.

设 $s(x)=\ln x+\frac{e}{x}-2$, 则 $s'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}$, 当 $x\in(0, e)$ 时, $s'(x)<0$, $s(x)$ 单调递减; 当 $x\in(e, +\infty)$ 时, $s'(x)>0$, $s(x)$ 单调递增, 所以 $s(x)\geq s(e)=0$, 即 $\ln x\geq 2-\frac{e}{x}$.

将 $a=e$ 代入 $g(a)=a$ 中, 得 $m\ln e=e$, 则 $m=e$, 不符合题意, 故 $a\neq e$, 则 $\frac{1}{m}a=\ln a>2-\frac{e}{a}$, 即 $\frac{1}{m}a^2-2a+e>0$, 同理 $\frac{1}{m}b^2-2b+e>0$.

设 $t(x)=\frac{1}{m}x^2-2x+e$, 其图象的对称轴为直线 $x=m$, 令

$t(x)=0$, 因为 $\Delta=4-4\cdot\frac{e}{m}>0$, 所以方程 $t(x)=0$ 存在两根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1<m<x_2$, 则 $x_1+x_2=2m, x_1x_2=em, x_2-x_1=2\sqrt{m^2-em}$.

又 $a<m<b$, 且 $t(a)>0, t(b)>0$, 所以 $a<x_1<m<x_2<b$, 则 $b-a>x_2-x_1=2\sqrt{m^2-em}$, 所以区间 $[a, b]$ 的长度 $d'>2\sqrt{m^2-em}$.

16. 【解】(1) 因为 $\cos C=\frac{2}{3}>0$, 所以 C 为锐角, 且 $\sin C=$

$$\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, 所以 $c\sin A=a\sin C=\sqrt{5}$, 则

$$\frac{\sqrt{5}}{3}a=\sqrt{5}, \text{ 所以 } a=3.$$



(2) 若 $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, 则

$$\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - \left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

若命题“ $\forall \theta \in \mathbf{R}, \exists x \in \left[\frac{\pi}{3} + \theta, A + \theta\right]$, 使得 $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”为真命题,

则 $(A + \theta) - \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = A - \frac{\pi}{3} \geq \frac{\pi}{3}$, 解得 $A \geq \frac{2\pi}{3}$, 所以 A 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$,

$$\text{此时 } c = \frac{\sqrt{5}}{\sin A} = \frac{2\sqrt{15}}{3}, \sin B = \sin(A + C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6} = \sqrt{5} - \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

17. 【证明】 (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -x + \sin x$, 因为 $f'(x) = -1 + \cos x \leq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点 $x_0 = 0$.

(2) 必要性: 因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(\pi) \geq 0$, 即 $a\pi^2 - \pi + \sin \pi \geq 0$, 所以 $a \geq \frac{1}{\pi}$.

充分性: 当 $a \geq \frac{1}{\pi}$ 时, $f(x) = ax^2 - x + \sin x \geq \frac{1}{\pi}x^2 - x + \sin x$, 令

$$h(x) = \frac{1}{\pi}x^2 - x + \sin x, x \geq 0, \text{ 则 } h'(x) = \frac{2}{\pi}x - 1 + \cos x, x \geq 0.$$

① 当 $x > \pi$ 时, $h'(x) = \frac{2}{\pi}x - 1 + \cos x > \frac{2}{\pi} \cdot \pi - 1 + \cos x = 1 + \cos x \geq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(x) > h(\pi) = 0$, 所以 $f(x) > 0$.

② 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, 记 $\varphi(x) = h'(x)$, 则 $\varphi'(x) = \frac{2}{\pi} - \sin x$, 因为

$$\varphi'(0) = \frac{2}{\pi} > 0, \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - 1 < 0, \varphi'(\pi) = \frac{2}{\pi} > 0, \text{ 且}$$

$\varphi'(x) = \frac{2}{\pi} - \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增,

所以在 $(0, \pi)$ 上, 存在 x_1, x_2 , 使 $\varphi'(x_1) = 0, \varphi'(x_2) = 0$, 且

$$x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

所以当 $0 < x < x_1$ 或 $x_2 < x < \pi$ 时, $\varphi'(x) > 0$; 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $\varphi'(x) < 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, x_1), (x_2, \pi)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减.

$$\text{又因为 } \varphi(0) = h'(0) = 0, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \varphi(\pi) =$$

$$h'(\pi) = 0, \text{ 所以当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } h'(x) > 0; \text{ 当 } x \in$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 时, } h'(x) < 0, \text{ 所以 } h(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递增, 在}$$



$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 又 $h(0)=0, h(\pi)=0$, 所以当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $h(x)_{\min}=0$, 所以 $h(x) \geq 0$, 所以 $f(x) \geq 0$.

综上, $a \geq \frac{1}{\pi}$ 时, $f(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. 故 $f(x) \geq 0$

在 $[0, +\infty)$ 上恒成立的充要条件是 $a \geq \frac{1}{\pi}$ 得证.

18. (1) 【解】当 $a=2$ 时, $f(x)=8x+2x\cos x-3\sin x$, 则 $f'(x)=8+2\cos x-2x\sin x-3\cos x=8-2x\sin x-\cos x$, 所以 $f'(0)=8-1=7$, 又 $f(0)=0$, 故当 $a=2$ 时, 曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=7x$.

(2) 【证明】对任意的 $x \geq 0$, 当 $a \geq \frac{3}{5}$ 时, $f(x)=ax(4+\cos x)-3\sin x \geq \frac{3}{5}x(4+\cos x)-3\sin x$ (提示: 利用不等式放

缩消掉参数 a), 故只需证 $\frac{3}{5}x(4+\cos x)-3\sin x \geq 0$ 对任意

的 $x \geq 0$ 恒成立, 即证 $\frac{3\sin x}{4+\cos x} \leq \frac{3}{5}x$ 对任意的 $x \geq 0$ 恒成立.

构造函数 $h(x)=\frac{3\sin x}{4+\cos x}-\frac{3}{5}x$, 其中 $x \geq 0$,

则 $h'(x)=\frac{3\cos x(4+\cos x)-3\sin x(-\sin x)}{(4+\cos x)^2}-\frac{3}{5}=$

$$\frac{3(4\cos x+1)}{(4+\cos x)^2}-\frac{3}{5}=-\frac{3(\cos x-1)(\cos x-11)}{5(\cos x+4)^2} \leq 0,$$

所以函数 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $h(x) \leq h(0)=0$,

即 $\frac{3\sin x}{4+\cos x} \leq \frac{3}{5}x$,

故对任意的 $x \geq 0$, $\frac{3}{5}x(4+\cos x)-3\sin x \geq 0$ 恒成立, 故当

$a \geq \frac{3}{5}$ 时, 对任意的 $x \geq 0$, 都有 $f(x) \geq 0$.

(3) 【证明】由 (2) 知, 当 $a=\frac{3}{5}$ 时, 对任意的 $x \geq 0$, 都有

$f(x) \geq 0$, 则当 $x \geq 0$ 时, $3\sin x \leq \frac{3}{5}x(4+\cos x)$ 恒成立 (当且

仅当 $x=0$ 时取等号), 即 $\sin x \leq \frac{x(4+\cos x)}{5}$ 恒成立 (提示:

注意前后问之间的联系), 令 $x=\frac{1}{k+2}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 则

$$\sin \frac{1}{k+2} < \frac{\frac{1}{k+2} \left(4 + \cos \frac{1}{k+2} \right)}{5}.$$

因为 $4 + \cos \frac{1}{k+2} < 5$, 所以 $\sin \frac{1}{k+2} < \frac{\frac{1}{k+2} \left(4 + \cos \frac{1}{k+2} \right)}{5} < \frac{1}{k+2}$.

设 $\varphi(x)=x-1-\ln x, x>0$, 则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 即函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 即函数 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(x)=x-1-\ln x \geq \varphi(1)=0$, 即 $x-1 \geq \ln x$ (当且仅当 $x=1$ 时取等号).



令 $x = \frac{k+1}{k+2} (k \in \mathbf{N}^*)$ 得 $\frac{k+1}{k+2} - 1 > \ln \frac{k+1}{k+2}$, 即 $-\frac{1}{k+2} > \ln \frac{k+1}{k+2}$,

整理得 $\frac{1}{k+2} < -\ln \frac{k+1}{k+2} = \ln(k+2) - \ln(k+1)$, 则 $\sin \frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+2} <$

$-\ln(k+1) + \ln(k+2)$, 即 $\sin \frac{1}{k+2} < -\ln(k+1) + \ln(k+2)$, 所以

$\sin \frac{1}{3} < -\ln 2 + \ln 3, \sin \frac{1}{4} < -\ln 3 + \ln 4, \dots, \sin \frac{1}{n+2} < -\ln(n+1) + \ln(n+2)$, 累加得 $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{k+2} < -\ln 2 + \ln 3 - \ln 3 + \ln 4 - \dots -$

$\ln(n+1) + \ln(n+2) = \ln(n+2) - \ln 2 = \ln \frac{n+2}{2} = \ln\left(\frac{n}{2} + 1\right) <$

$\ln(n+1)$, 故证得 $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{k+2} < \ln(n+1), n \in \mathbf{N}^*$.