

$\left[\frac{36}{x+1} + 4(x+1) \right] \leq 76 - 2\sqrt{\frac{36}{x+1} \cdot 4(x+1)} = 52$, 当且仅当 $\frac{36}{x+1} = 4(x+1)$, 即 $x=2$ 时, 等号成立, 所以当 $x=2$ 时, $L(x)$ 取得最大值 52;

当 $6 < x \leq 10$ 时, $L(x) = -x^2 + 14x + \frac{1}{2} = -(x-7)^2 + 49.5$, 所以当 $x=7$ 时, $L(x)$ 取得最大值, 最大值为 $L(7) = 49.5 < 52$, 所以当投入的肥料费用为 2 百元时, 该梨树获得的利润最大, 最大利润是 52 百元.

18. 【解】 (1) 因为 $f(x)$ 为幂函数, 所以 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = -1$ 或 $m = 2$,

故 $f(x) = x^2$ 或 $f(x) = x^{-1}$.

(2) 当 $f(x) = x^2$ 时, $f(x)$ 的图象经过坐标原点, 不满足要求. 当 $f(x) = x^{-1}$ 时, $f(x)$ 的图象不经过坐标原点, 所以 $f(x) = x^{-1}$. $f(x)$ 为奇函数, 证明如下:

$f(x) = x^{-1}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称, $f(-x) = (-x)^{-1} = -x^{-1} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 若 $f(x)$ 的图象经过坐标原点, 则 $f(x) = x^2$,

由 $f(2-x) > f(x)$ 可得 $(2-x)^2 > x^2$, 解得 $x < 1$,

所以原不等式的解集为 $(-\infty, 1)$.

19. 【解】 (1) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 所以 $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$,

由 $f(x)$ 为偶函数知, $f(x) = f(-x) = \frac{x^2}{1-x}$,

所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

(2) $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 有

$$\begin{aligned}
 f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1^2}{1+x_1} - \frac{x_2^2}{1+x_2} = \frac{x_1^2 + x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 - x_2^2 \cdot x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} \\
 &= \frac{(x_1^2 - x_2^2) + (x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 \cdot x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)} \\
 &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + x_1 x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)},$$

根据 $x_2 > x_1 \geq 0$, 可得 $1+x_1 > 0$, $1+x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + x_2 + x_1 x_2 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 由函数 $f(x)$ 为偶函数知 $f(ax-1) < f((a-1)x)$ 等价于 $f(|ax-1|) < f(|(a-1)x|)$,

图重点: 偶函数的函数值比较大小, 可先在自变量中加上绝对值

又由 (2) 知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $|ax-1| < |(a-1)x|$, 所以 $|ax-1|^2 < |(a-1)x|^2$,

即 $(x-1)[(2a-1)x-1] < 0$.

(i) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式可化为 $x-1 > 0$, 解得 $x > 1$,

此时原不等式的解集为 $(1, +\infty)$;

(ii) 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, $2a-1 < 0$, 令 $(x-1)[(2a-1)x-1] = 0$, 得 $x_1 =$

$$1, x_2 = \frac{1}{2a-1}, x_1 > x_2,$$

此时原不等式的解集为 $(-\infty, \frac{1}{2a-1}) \cup (1, +\infty)$;

(iii) 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $0 < 2a-1 < 1$, 令 $(x-1)[(2a-1)x-1] =$

拆逻辑: 分类讨论解不等式

0, 得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2a-1}, x_1 < x_2$,

此时原不等式的解集为 $(1, \frac{1}{2a-1})$.

综上, 当 $a < \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $(-\infty, \frac{1}{2a-1}) \cup (1, +\infty)$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $(1, +\infty)$;

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 原不等式的解集为 $(1, \frac{1}{2a-1})$.

专练 1 新定义、新情境专练

1. C 【解析】 对于①, 设集合 $A = \{0\}$, 显然 $0+0=0$, 符合性质一, 同时也符合性质二, 因此集合 $A = \{0\}$ 是一个“群”, 但它是有限集, 故①不正确.

对于②, 根据“群”的性质, 由 $b \in A$ 可得 $-b \in A$, 因此可得 $a-b \in A$, 故②正确.

对于③, 根据性质一和性质二, 可知 $A \cap B$ 中必定有一个元素为 0, 设 $A \cap B = C$, 则 C 一定不为空集. 若 $c \in C$, 则一定有 $c \in A, c \in B$, 因为 A, B 都是“群”, 所以 $-c \in A, -c \in B$,

因此 $-c \in C$, 此时 $c - c = 0 \in C$. 若 $d \in C$, 则一定有 $d \in A, d \in B$, 则 $c+d \in A, c+d \in B$, 所以 $c+d \in C$, 所以集合 C 为一个“群”, 故③正确.

故选 C.

2. $\left\{ (4, 1), \left(6, \frac{2}{3} \right) \right\}$ 【解析】 由题可得 $A = B = \{2, 3\}$, $A \oplus B =$

$\left\{ (4, 1), \left(4, \frac{2}{3} \right), (6, 1), \left(6, \frac{2}{3} \right) \right\}$, 因为 $1 = -\frac{1}{6} \times 4 +$

$$\frac{5}{3}, \frac{2}{3} \neq -\frac{1}{6} \times 4 + \frac{5}{3}, 1 \neq -\frac{1}{6} \times 6 + \frac{5}{3}, \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \times 6 + \frac{5}{3}, \text{ 所以 } (A \oplus B) \cap C = \left\{ (4, 1), \left(6, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

3. 【解】(1) $y = -2x + 3$, 令 $x = 0$, 解得 $y = 3$, 令 $x = 1$, 解得 $y = 1$, 故 $P \cap S = \{(0, 3), (1, 1)\}$.

$$y = -x^2 + 3, \text{ 令 } x = 0, \text{ 解得 } y = 3, \text{ 令 } x = 1, \text{ 解得 } y = 2,$$

$$\text{故 } Q \cap S = \{(0, 3), (1, 2)\}.$$

$$(2) (P \cap S) \cup (Q \cap S) = \{(0, 3), (1, 1), (1, 2)\}.$$

4. B 【解析】因为 $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x}$, 又 $0 < x < \frac{1}{2}$, 所以 $1-2x > 0$, 所以由权方和不等式可得 $\frac{4}{2x} + \frac{9}{1-2x} \geq \frac{(2+3)^2}{2x+1-2x} =$

$$25, \text{ 当且仅当 } \frac{2}{2x} = \frac{3}{1-2x}, \text{ 即 } x = \frac{1}{5} \text{ 时等号成立. 故选 B.}$$

5. B 【解析】设正方形 $EFGH$ 上的贵宾席的两个等腰直角三角形的直角边长为 x , 正方形 $ABCD$ 上的贵宾席的三个等腰直角三角形的直角边长为 y , 所以 $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = P$, 即 $2x^2 + 3y^2 = 2P$, 且正方形 $EFGH$ 的边长为 $2x + \sqrt{2}y$, 所以舞台面积 $S = (2x + \sqrt{2}y)^2 - 2x^2 = 2x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 \leq 2x^2 + (2x^2 + 4y^2) + 2y^2 = 2(2x^2 + 3y^2) = 4P$,

【防区】和定积最大, 此处不等式右边一定要为和是定值的形式

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \sqrt{2}x = 2y, \\ 2x^2 + 3y^2 = 2P, \end{cases} \text{ 即 } x = 2\sqrt{\frac{P}{7}}, y = \sqrt{\frac{2P}{7}} \text{ 时, 等号成立, 此时 } S \leq 4P. \text{ 故选 B.}$$

6. $6\sqrt{10}$ 【解析】不妨令 $b = 6$, 则 $a + c = 14$,

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]} = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 c^2 - [(c+a)^2 - 2ac - b^2]^2},$$

$$\text{代入数据得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \sqrt{[(2ac)^2 - (160 - 2ac)^2]} =$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{160(4ac - 160)},$$

由基本不等式得, $14 = a + c \geq 2\sqrt{ac}$, 所以 $4ac \leq 196$, 可得

$$S_{\triangle ABC} \leq 6\sqrt{10}, \text{ 当且仅当 } a = c = 7 \text{ 时取等号,}$$

所以该三角形面积的最大值为 $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$.

7. D 【解析】由题意得 $\begin{cases} a+b=-1, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a-\sqrt{2}b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-2, \\ b=1, \end{cases}$ 则

$$f(x) = -2x + \frac{1}{x}, \text{ 定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ 关于原点对称, 因为 } f(-x) = 2x + \frac{1}{-x} = -\left(-2x + \frac{1}{x}\right) = -f(x), \text{ 所以 } f(x)$$

$$\text{称, 因为 } f(-x) = 2x + \frac{1}{-x} = -\left(-2x + \frac{1}{x}\right) = -f(x), \text{ 所以 } f(x)$$

【防区】判断函数奇偶性前先判断定义域是否关于原点对称

是奇函数, ①错误. 因为 $y = -2x, y = \frac{1}{x}$ 均在 $(-\infty, 0)$ 上单调

递减, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 没有最小值, ②正

$$\text{确, ③错误. 由 } f(x) = -2x + \frac{1}{x} \text{ 得, } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 2 = -1, \text{ ④正}$$

确. 故选 D.

8. ABD 【解析】对于集合 $\{0\}$, 若 $x_1 - x_2 = 0$, 则 $x_1 = x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = 0, \text{ 故 A 正确; 对于区间 } [-2.025, 2.025], \text{ 只要}$$

$$x_1 = m, x_2 = n, x_1 - x_2 = m - n \in [-2.025, 2.025], \text{ 都有 } f(x_1) -$$

$$f(x_2) = m + 2.025 - n - 2.025 = m - n \in [-2.025, 2.025], \text{ 故 B 正}$$

$$\text{确; 对于区间 } [-1, 1], \text{ 取 } x_1 = 2, x_2 = 1, \text{ 则 } x_1 - x_2 = 1 \in [-1,$$

$$1], \text{ 但 } f(x_1) - f(x_2) = 7 \notin [-1, 1], \text{ 故 C 不正确; 若 } f(x) \text{ 是}$$

$$\text{"}\{1\}\text{ 封闭"函数, 则当 } x_1 - x_2 = 1, \text{ 即 } x_1 = x_2 + 1 \text{ 时, 都有 } f(x_2 +$$

$$1) - f(x_2) = 1, \text{ 即 } f(x+1) - f(x) = 1. \text{ 若 } x_1 - x_2 = k, \text{ 即 } x_1 =$$

$$x_2 + k, \text{ 则 } f(x_2 + k) = f(x_2 + k - 1) + 1 = f(x_2 + k - 2) + 1 + 1 = \cdots =$$

$$f(x_2) + k, \text{ 即 } f(x_2 + k) - f(x_2) = k, \text{ 则 } f(x) \text{ 是 "}\{k\}\text{ 封闭" 函数, 故}$$

D 正确. 故选 ABD.

9. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ 【解析】由题意知, $1 \triangle k = \sqrt{k} + 1 + k = 3$, 整理得 $k +$

$$\sqrt{k} - 2 = 0, \text{ 即 } (\sqrt{k} + 2)(\sqrt{k} - 1) = 0, \text{ 解得 } k = 1,$$

$$\text{则 } y = \sqrt{x} + 1 + x - \frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}x + \sqrt{x} + 1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{所以函数 } y = (k \triangle x) - \frac{3x}{2} \text{ 的值域为 } \left(-\infty, \frac{3}{2}\right].$$

10. 【解】(1) $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别为 $A =$

$$\{x | f(x) = x\}, B = \{x | f(f(x)) = x\},$$

$$\text{令 } f(x) = x, \text{ 可得 } 2x - 1 = x, \text{ 解得 } x = 1;$$

$$\text{令 } f(f(x)) = x, \text{ 可得 } 2(2x - 1) - 1 = x, \text{ 解得 } x = 1,$$

$$\text{所以集合 } A = \{1\}, B = \{1\}.$$

$$(2) \text{ 函数 } f(x) = x^2 + ax + b,$$

$$\text{因为 } A = \{-1, 3\}, \text{ 所以 } \begin{cases} f(-1) = -1, \\ f(3) = 3, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} (-1)^2 - a + b = -1, \\ 3^2 + 3a + b = 3, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ b=-3, \end{cases} \text{ 所以 } f(x)=x^2-x-3,$$

$$\text{可得 } f(f(x))=f(x^2-x-3)=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x,$$

$$\text{整理得 } (x^2-x-3)^2-x^2=0, \text{ 即 } (x^2-3)(x^2-2x-3)=0,$$

$$\text{所以 } (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+1)(x-3)=0,$$

$$\text{解得 } x=\pm\sqrt{3} \text{ 或 } x=-1 \text{ 或 } x=3,$$

$$\text{所以集合 } B=\{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, 3\}.$$

11. 【解】(1) 函数 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上的值域为 $[0, +\infty)$, 令 $f(x)=x^2$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[a, b]$,

$$\text{则 } a \geq 0, \text{ 函数 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上单调递增, 因此 } \begin{cases} a^2=a, \\ b^2=b, \end{cases} \text{ 而 } a <$$

$$b, \text{ 解得 } \begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases}$$

所以函数 $f(x)=x^2$ 的所有“保值”区间为 $[0, 1]$.

(2) 函数 $g(x)=1-\frac{1}{x}$ 不存在“保值”区间. 理由如下:

函数 $g(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{若 } [p, q] \text{ 是 } g(x)=1-\frac{1}{x} \text{ 的“保值”区间, 则 } \begin{cases} g(p)=p, \\ g(q)=q, \end{cases}$$

🔗**重点:** $[p, q]$ 是连续区间, 则 $[p, q] \not\subseteq (-\infty, 0)$ 或 $[p, q] \not\subseteq (0, +\infty)$

因此 p, q 是方程 $1-\frac{1}{x}=x$ 的两个同号不等实根.

由 $1-\frac{1}{x}=x$, 得 $x^2-x+1=0$, 则 $\Delta=(-1)^2-4=-3<0$, 则方程

$x^2-x+1=0$ 无实根,

所以函数 $g(x)=1-\frac{1}{x}$ 不存在“保值”区间.

$$(3) \text{ 函数 } h(x)=\frac{(a^2+a)x-1}{a^2x}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2x} \text{ 在 } (-\infty, 0), (0,$$

$+\infty)$ 上单调递增,

依题意, $\begin{cases} h(m)=m, \\ h(n)=n, \end{cases}$ 则 m, n 是方程 $1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2x}=x$ 的两个同号不等实根,

🔗**拆逻辑:** 函数与方程的相互转化

即 m, n 是关于 x 的方程 $x^2-\left(1+\frac{1}{a}\right)x+\frac{1}{a^2}=0$ 的两个同号不等实根,

$$\text{由 } \Delta'=\left(1+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{4}{a^2}>0, \text{ 解得 } a<-3 \text{ 或 } a>1, \text{ 于是 } m+n=1+\frac{1}{a}>0, mn=\frac{1}{a^2}>0,$$

$$\text{则 } n-m=\sqrt{(n+m)^2-4mn}=\sqrt{-\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}+1}=$$

$$\sqrt{-3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ 当且仅当 } a=3 \text{ 时取等号,}$$

所以当 $n-m$ 取得最大值时, a 的值为 3.

专练 2 开放题专练

1. $\frac{1}{2}$ (答案不唯一) 【解析】若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充要条件,

则 A, B 表示的集合相同, 由 $B=\{x \mid bx>1\}$, 得 $B=$

$$\left\{x \mid x>\frac{1}{b}\right\} (b>0), \text{ 因为 } A=\{x \mid x>2\}, \text{ 所以 } \frac{1}{b}=2, \text{ 解得 } b=$$

$\frac{1}{2}$. 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 则 $A \subsetneq B$, 所以

$$\begin{cases} b>0, \\ \frac{1}{b}<2, \end{cases} \text{ 解得 } b>\frac{1}{2}, \text{ 即实数 } b \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \text{ 则答}$$

案可为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 中的任一实数.

2. 【解】(1) 由 $(x+1)(x-3)<0$, 解得 $-1<x<3$, 所以 $B=\{x \mid -1<x<3\}$.

当 $a=2$ 时, $A=\{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$, 所以 $A \cap B=\{x \mid 2 \leq x<3\}$.

$$(2) \text{ 若选 } \textcircled{1} A \cup B=B, \text{ 则 } A \subseteq B, \text{ 则 } \begin{cases} a>-1, \\ a+2<3, \end{cases}$$

解得 $-1<a<1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-1, 1)$.

$$\text{若选 } \textcircled{2} “x \in A” \text{ 是 “} x \in B” \text{ 的充分条件, 则 } A \subseteq B, \text{ 则 } \begin{cases} a>-1, \\ a+2<3, \end{cases}$$

解得 $-1<a<1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-1, 1)$.

若选 $\textcircled{3} “x \in \complement_{\mathbf{R}} A” \text{ 是 “} x \in \complement_{\mathbf{R}} B” \text{ 的必要条件, 则 } \complement_{\mathbf{R}} B \subseteq \complement_{\mathbf{R}} A,$

$$\text{故 } A \subseteq B, \text{ 所以 } \begin{cases} a>-1, \\ a+2<3, \end{cases}$$

解得 $-1<a<1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-1, 1)$.

3. 【解】若选 $\textcircled{1}$: 因为 $f(x)=x^2+(1-a)x+4$ 在定义域 $[b-1, b+1]$ 上为偶函数,

所以 $b-1+b+1=0$, 所以 $b=0$. 又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-1)=f(1)$, 即 $1-(1-a)+4=1+(1-a)+4$, 所以 $a=1$. 经检验, 当 $a=$

1 时 $f(x) = x^2 + 4$ 为 $[-1, 1]$ 上的偶函数.

综上, $a = 1, b = 0$.

若选②: 因为 $f(x) = ax + b (a > 0)$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增.

因为 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的值域为 $[1, 2]$,

所以 $f(1) = 1, f(2) = 2$, 即 $\begin{cases} f(1) = a + b = 1, \\ f(2) = 2a + b = 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases}$

(1) 由以上分析知, $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, 所以 $g(-x) = \frac{-x}{x^2 + 1}$, 所以 $g(x) + g(-x) = 0$, 且 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以 $g(x)$ 是奇函数.

(2) 由 (1) 知, 当 $x > 0$ 时, $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \geq$

$2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, 所以 $0 < \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq$

$\frac{1}{2}$, 即当 $x > 0$ 时, $g(x) \in (0, \frac{1}{2}]$. 当 $x = 0$ 时, $g(0) = 0$. 因

为 $g(x)$ 是奇函数, 所以当 $x < 0$ 时, $g(x) \in [-\frac{1}{2}, 0)$.

综上, $g(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

记 $g(x)$ 的值域为集合 A , 所以 $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

记 $h(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的值域为集合 B .

因为 $h(x) = -x - 2c$, 所以 $B = [-2 - 2c, 2 - 2c]$.

因为 $\forall x_1 \in \mathbf{R}, \exists x_2 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_1) = h(x_2)$ 成立,

所以 $A \subseteq B$, 所以 $\begin{cases} -2 - 2c \leq -\frac{1}{2}, \\ 2 - 2c \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以 $-\frac{3}{4} \leq c \leq \frac{3}{4}$.

🔗重点: 把双变量问题转化为值域间的包含关系

故实数 c 的取值范围为 $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$.

模块综合测试

1. D 【解析】因为全集为 $\mathbf{R}$, $N = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} N = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$. 又集合 $M = \{0, 1, 2\}$, 所以 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) = \{1, 2\}$, 故选 D.

2. D 【解析】当 $x = a = 1, y = b = 0$ 时, 满足 $x > y, a > b$, 但 $a - x > b - y$ 不成立, 故 A 错误;

当 $a = 1, b = -1$ 时, 满足 $a > b$, 但 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立, 故 B 错误;

当 $x = 2, y = -1, a = 0, b = -2$ 时, 满足 $x > y, a > b$, 但 $ax > by$ 不成立, 故 C 错误;

$\because a > |b| \geq 0, \therefore a^2 > |b|^2 = b^2$, 故 D 正确.

🔗重点: $a > |b|$ 中包含隐含条件 $|b| \geq 0$

故选 D.

3. B 【解析】当 $b = 2, a = -1$ 时, 满足 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, 但不满足 $b < a < 0$, $\therefore$ 充分性不成立;

当 $b < a < 0$ 时, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ba} > 0, \therefore \frac{1}{b} > \frac{1}{a}, \therefore$ 必要性成立,

$\therefore \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 是 “ $b < a < 0$ ” 的必要不充分条件, 故选 B.

4. C 【解析】由题图知, 甲厂总费用函数为 $y = \frac{1}{2}x + 1$, 乙厂总

费用函数为 $y = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 < x < 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, & x \geq 2. \end{cases}$

当 $0 < x < 2$ 时, 令 $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{2}x$, 可得 $x = 1$; 当 $x \geq 2$ 时, 令 $\frac{1}{2}x +$

$1 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$, 可得 $x = 6$.

结合题图知, 当 $0 < x < 1$ 或 $x > 6$ 时, 选择乙厂比较划算; 当 $1 < x < 6$ 时, 选择甲厂比较划算; 当 $x = 1$ 或 $x = 6$ 时, 甲、乙厂总费用相同, 所以 A, B, D 错误, C 正确.

故选 C.

5. D 【解析】 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对

称, $f(-x) = \frac{|(-x)^2 - 1|}{-x} = -\frac{|x^2 - 1|}{x} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称, 所以 A 选项错误.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x} \geq 0$, 所以 C 选项错误.

当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x} = 0$, 解得 $x = 1$, 所以 B 选项错误. 所以 $f(x)$ 的大致图象是 D 选项. 故选 D.

6. B 【解析】因为 $m > n > 0$, 所以 $m + n > 0, m - n > 0$, 则 $2m + \frac{8}{m+n} +$

$\frac{1}{m-n} = m + n + \frac{8}{m+n} + \frac{1}{m-n} + m - n \geq 2\sqrt{(m+n) \cdot \frac{8}{m+n}} +$

$$2\sqrt{(m-n) \cdot \frac{1}{m-n}} = 4\sqrt{2} + 2, \text{ 当且仅当 } \begin{cases} m+n = \frac{8}{m+n}, \\ m-n = \frac{1}{m-n}, \end{cases} \text{ 即}$$

$$\begin{cases} m = \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \\ n = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时等号成立, 故 } 2m + \frac{8}{m+n} + \frac{1}{m-n} \text{ 的最小值为}$$

【防区】多次运用基本不等式时要注意等号必须同时成立
 $4\sqrt{2} + 2$. 故选 B.

7. D 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数, 所以 $a-1+2a=0$, 解得 $a = \frac{1}{3}$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. 又当 $x \in [0, \frac{2}{3}]$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则当 $x \in [-\frac{2}{3}, 0]$ 时, $f(x)$ 单调递增, 所以不等式 $f(x-1) > f(2x-3a)$

$$\text{可化为 } f(|x-1|) > f(|2x-1|), \text{ 所以 } \begin{cases} |x-1| < |2x-1|, \\ -\frac{2}{3} \leq x-1 \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{2}{3} \leq 2x-1 \leq \frac{2}{3}, \end{cases}$$

【防区】注意定义域的限制条件

解得 $-\frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{6}$, 即原不等式的解集为 $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$. 故选 D.

8. C 【解析】由“隐对称点”的定义可知函数 $f(x)$ 的图象上存在关于原点对称的点,

设 $g(x)$ 的图象与 $f(x) = x^2 + 4x (x > 0)$ 的图象关于原点对称, 令 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 所以 $f(-x) = x^2 - 4x$, 所以 $g(x) = -f(-x) = -x^2 + 4x (x < 0)$.

因为 $f(0) = 2 \neq -f(0)$,

所以函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x > 0, \\ mx + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象存在“隐对称点”等价

于 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象在 $(-\infty, 0)$ 上有交点, 即方程 $mx + 2 = -x^2 + 4x (x < 0)$ 有解, 则 $m = -x - \frac{2}{x} + 4 (x < 0)$ 有解.

【拆逻辑】: 先由“隐对称点”的定义转化为图象交点问题, 再参变分离转化为求函数值域问题

又 $-x - \frac{2}{x} + 4 \geq 2\sqrt{-x \cdot (-\frac{2}{x})} + 4 = 2\sqrt{2} + 4$, 当且仅当 $-x = -\frac{2}{x} (x < 0)$, 即 $x = -\sqrt{2}$ 时等号成立, 所以 $m \geq 2\sqrt{2} + 4$. 故选 C.

9. ACD 【解析】对于 A, 由幂函数的定义可知 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -1$,

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $m < 0$, 所以 $m = -1$, 故 A 正确;

对于 B, 由题知, $ax^2 + ax + 1 \neq 0$ 恒成立, 显然 $a = 0$ 符合题意, 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 4$, 综上所述, $a \in [0, 4)$, 故 B 错误;

对于 C, 令 $t = \sqrt{4-x} (t \geq 0) \Rightarrow x = 4 - t^2$, 此时 $f(x)$ 即为 $g(t) = 4 - t^2 + 2t = 5 - (t-1)^2 (t \geq 0)$, 显然 $g(t) \leq 5$, 故 C 正确;

对于 D, $y = f(x+1)$ 的定义域是 $[1, 2]$, 故可得 $x+1 \in [2, 3]$, 则 $y = f(x)$ 的定义域是 $[2, 3]$,

则对于 $y = f(2x-1)$, 有 $2x-1 \in [2, 3]$, 解得 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$, 因此其

定义域为 $[\frac{3}{2}, 2]$, 故 D 正确.

故选 ACD.

10. BCD 【解析】对于 A, 因为 $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$, 所以 $0 < a < b$, 所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $ac^6 > bc^6$, 所以 $c^6 > 0$, 所以 $a > b$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $a > b > 1$, 所以 $f(a) > f(b)$, 即 $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$, 故 C 正确;

对于 D, $a^2 + b^2 \geq 6(a+b-3)$ 等价于 $(a-3)^2 + (b-3)^2 \geq 0$, 不等式恒成立, 故 D 正确.

故选 BCD.

11. BCD 【解析】令 $t = x-1$, 则 $x = t+1$, 由 $f(x-1) = x^2 - 2x$, 可得 $f(t) = (t+1)^2 - 2(t+1) = t^2 - 1$, 所以 $f(x) = x^2 - 1$.

对于 A, 由 $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$, 可知 $f(x) - f(-x) = 0$, 所以 A 错误;

对于 B, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, 可得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 < 0$, 所以 B 正确;

对于 C, 由 $f(x) = x^2 - 1$, 可得 $f(x+1) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$, 令 $x^2 + 2x = x^2 - 1$, 化简得 $2x = -1$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, 所以“ $\exists x \in$

$\mathbf{R}$, 使 $f(x) = f(x+1)$ 成立”为真命题, 所以 C 正确;

【拆逻辑】: 证明存在量词命题成立只需要有一个值符合要求即可

对于 D, 由 $f(x) = x^2 - 1$, 可得 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{x_1^2 - 1 + x_2^2 - 1}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - 1$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - 1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} - 1$, 则 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{4} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{4}$, 因为 $x_1 \neq x_2$, 所以 $\frac{(x_1 - x_2)^2}{4} > 0$, 即 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 所以 D 正确. 故选 BCD.

12. $\{-1, 0\}$ 【解析】当 $a = 0$ 时, $A = \{x \mid 2x - 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, 满足条件;

当 $a \neq 0$ 时, $A = \{x \mid ax^2 + 2x - 1 = 0\}$ 只有 1 个元素, 则一元二次方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = 2^2 + 4a = 0$, 解得 $a = -1$. 故 $a = 0$ 或 $a = -1$, 即实数 a 的取值集合是 $\{-1, 0\}$.

13. $x^2 + 2$ (答案不唯一) 【解析】对于 $f(x) = x^2 + 2$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称. 因为 $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$, 所以 $f(x) = x^2 + 2$ 为偶函数. 因为 $x^2 + 2 \geq 2$, 所以 $f(x) = x^2 + 2$ 的最小值为 2, 所以 $f(x) = x^2 + 2$ 符合题意. 写出其他符合要求的函数也满足题意.

14. $(-\infty, 6)$ 【解析】若对任意 $x_1 \in [0, 1]$, 存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得不等式 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立, 则只需满足 $f(x)_{\min} > g(x)_{\min}, x \in [0, 1]$.

【拆逻辑】把双变量不等式转化为函数最值间的关系求解

$g(x) = x^2 - x + a^2 - \frac{31}{4}$, 其图象的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, 易

知 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增, 则

$g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = a^2 - 8$.

$f(x) = 2x^2 - ax + a^2 - 4$, 其图象的对称轴为直线 $x = \frac{a}{4}$.

①当 $\frac{a}{4} \leq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, $f(x)_{\min} = f(0) = a^2 - 4$, 又 $g(x)_{\min} = a^2 - 8$, 所以 $a^2 - 4 > a^2 - 8$ 恒成立;

②当 $0 < \frac{a}{4} < 1$, 即 $0 < a < 4$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{a}{4}\right]$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a}{4}, 1\right]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{7}{8}a^2 - 4$, 又 $g(x)_{\min} = a^2 - 8$, 所以 $\frac{7}{8}a^2 - 4 > a^2 - 8$, 解得 $-4\sqrt{2} < a <$

$4\sqrt{2}$, 又 $0 < a < 4$, 所以 $0 < a < 4$;

③当 $\frac{a}{4} \geq 1$, 即 $a \geq 4$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 则

【图重点】动轴定区间问题, 分对称轴在区间左侧、在区间内、在区间右侧求解

$f(x)_{\min} = f(1) = a^2 - a - 2$, 又 $g(x)_{\min} = a^2 - 8$,

所以 $a^2 - a - 2 > a^2 - 8$, 解得 $a < 6$, 又 $a \geq 4$, 所以 $4 \leq a < 6$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 6)$.

15. 【解】(1) 当 $a = -1$ 时, $A = \{x \mid -5 \leq x \leq -1\}$, 故 $\complement_{\mathbf{R}}A = \{x \mid x < -5$ 或 $x > -1\}$.

又 $B = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$,

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = \{x \mid -1 < x \leq 4\}$.

(2) 因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件,

所以 $A \subsetneq B$.

当 A 为空集时, $3a - 2 > a$, 解得 $a > 1$;

当 A 不为空集时, 则 $\begin{cases} 3a - 2 \leq a, \\ 3a - 2 > -4, \text{ 或 } 3a - 2 \geq -4, \\ a \leq 4 \end{cases}$

解得 $-\frac{2}{3} \leq a \leq 1$.

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid a \geq -\frac{2}{3}\right\}$.

16. 【解】(1) 因为不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x >$

$\frac{1}{2}\right\}$, 所以 $a > 0$, 且 $\begin{cases} -1 + \frac{1}{2} = -\frac{b}{a}, \\ -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{a}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases}$ 故 $f(x) =$

$2x^2 + x - 1$.

(2) 因为 $f(x) = 2x^2 + x - 1$, 所以不等式 $\frac{x}{f(x) + 1} > 0$, 可化为

$\frac{x}{2x^2 + x} > 0$, 即 $\frac{x}{x(2x + 1)} > 0$,

又 $x \neq 0, x \neq -\frac{1}{2}$, 可得 $\frac{1}{2x + 1} > 0$, 解得 $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$,

【防雷区】注意分母不为 0

则原不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ 或 } x > 0\right\}$.

(3) 由题意得 $a \neq 0$, 因为关于 x 的方程 $f(x) + ax + b + 1 = 0$ 有两实数根, 所以 $ax^2 + (a + b)x + b = 0$ 有两实数根, 所以 $\Delta = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0$, 因为 $x_1 + x_2 = 2$, 所以由根与系数的关

【图重点】含参的一元二次方程有两个实数根时要保证判别式大于等于 0

系得, $\frac{-(a+b)}{a} = 2, x_1 x_2 = \frac{b}{a}$, 所以 $b = -3a, x_1 x_2 = -3$, 故 $\frac{1}{x_1} +$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

17. 【解】(1) 设 $f(x) = mx^2 + bx + c (m \neq 0)$,

由 $f(x+1) - f(x-2) = 6x - 9$, 得 $6mx - 3m + 3b = 6x - 9$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$$\text{故} \begin{cases} 6m = 6, \\ -3m + 3b = -9, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = 1, \\ b = -2, \end{cases}$$

又由 $f(0) = 2$, 得 $c = 2$,

所以 $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

$$(2) g(x) = (2a-2)x - a + 3 - f(x) = -(x-a)^2 + a^2 - a + 1,$$

当 $a > 1$ 时, $g(x)_{\max} = g(1) = a$;

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $g(x)_{\max} = g(a) = a^2 - a + 1$;

当 $a < 0$ 时, $g(x)_{\max} = g(0) = 1 - a$.

$$\text{根据已知条件得} \begin{cases} a > 1, \\ a = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 0 \leq a \leq 1, \\ a^2 - a + 1 = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a < 0, \\ 1 - a = 2, \end{cases}$$

解得 $a = 2$ 或 $a = -1$.

所以实数 a 的值为 -1 或 2 .

18. 【解】(1) 当 $0 \leq x < 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$$P = 80x - x^2 - 20x - 100 - 500 = -x^2 + 60x - 600;$$

当 $40 \leq x \leq 100, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$$P = 80x - \left(\frac{165}{2}x + \frac{9000}{x} - 1150 \right) - 500 = -\frac{5}{2}x - \frac{9000}{x} + 650,$$

$$\text{故} P = \begin{cases} -x^2 + 60x - 600, & 0 \leq x < 40, 100x \in \mathbf{N}, \\ -\frac{5}{2}x - \frac{9000}{x} + 650, & 40 \leq x \leq 100, 100x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(2) 当 $0 \leq x < 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$P = -(x-30)^2 + 300$, 故当 $x = 30$ 百台时, P 取得最大值, 最大值为 300 万元;

当 $40 \leq x \leq 100, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$$P = -\frac{5}{2}x - \frac{9000}{x} + 650 \leq -2\sqrt{\frac{5}{2}x \cdot \frac{9000}{x}} + 650 = 350, \text{ 当且仅当}$$

当 $\frac{5x}{2} = \frac{9000}{x}$, 即 $x = 60$ 时, 等号成立, 故当 $x = 60$ 百台时, P

取得最大值, 最大值为 350 万元.

由于 $350 > 300$, 故当年产量为 60 百台时, 企业所获年利润最大, 最大利润为 350 万元.

$$19. (1) \text{【解】对任意 } x > 0, f(x) = f\left(\frac{4}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{t+x^2} = \frac{\frac{4}{x}}{t+\frac{16}{x^2}} \Leftrightarrow \frac{x}{t+x^2} =$$

$$\frac{x}{\frac{t}{4}x^2 + 4} \text{ 恒成立, 则对任意 } x > 0, t + x^2 = \frac{t}{4}x^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{t}{4} - 1\right)x^2 + (4 - t) = 0 \text{ 恒成立, 因此 } \frac{t}{4} - 1 = 0 \text{ 且 } 4 - t = 0, \text{ 所以}$$

$$t = 4.$$

(2) 【证明】由 (1) 得 $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$, 函数 $f(x)$ 的定义域为

$\mathbf{R}$, 关于原点对称, 而 $f(-x) = \frac{-x}{4+x^2} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数.

$$(3) \text{【解】当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{x}{4+x^2} = \frac{1}{\frac{4}{x} + x} > 0, \text{ 由函数 } y = \frac{4}{x} + x$$

在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 得函数 $f(x)$

在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

由直线 AB 与 x 轴平行, 得 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $0 < x_1 < 2 < x_2$, 即

$$\frac{x_1}{4+x_1^2} = \frac{x_2}{4+x_2^2}, \text{ 整理得 } (x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 4) = 0, \text{ 则 } x_1 x_2 = 4, \text{ 即 } x_2 =$$

$$\frac{4}{x_1}, \text{ 则 } |AB| = x_2 - x_1 = \frac{4}{x_1} - x_1. \text{ 则 } S = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x_1} - x_1 \right) \cdot \frac{x_1}{4+x_1^2} =$$

重点: 在 $\triangle OAB$ 中, AB 边上的高即为函数值 $f(x_1)$ 或函数值 $f(x_2)$

$$\frac{4-x_1^2}{2(4+x_1^2)} = \frac{4}{4+x_1^2} - \frac{1}{2}, \text{ 由 } x_1 \in (0, 2), \text{ 得 } 4+x_1^2 \in (4, 8), \text{ 因此}$$

$$\frac{4}{4+x_1^2} \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right), \text{ 即 } \frac{4}{4+x_1^2} - \frac{1}{2} \in \left(0, \frac{1}{2} \right), \text{ 所以 } S \text{ 的取值范围}$$

$$\text{为 } \left(0, \frac{1}{2} \right).$$